

УДК 519.174

Д. В. Самиров¹, А. М. Райгородский^{1,2}¹Московский физико-технический институт (государственный университет)²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Об одной задаче, связанной с оптимальной раскраской пространства без одноцветных равнобедренных треугольников

В настоящей работе предложена модификация линейно-алгебраического метода в комбинаторике, позволяющая получать новые экспоненциальные нижние оценки в задаче о минимальном числе цветов, в которые можно так покрасить пространство, чтобы точки одного цвета не могли образовать равнобедренный треугольник с длинами сторон из некоторого множества.

Ключевые слова: хроматические числа, евклидова теория Рамсея, дистанционный граф.

D. V. Samirov¹, A. M. Raigorodskii^{1,2}¹Moscow Institute of Physics and Technology (State University)²Lomonosov Moscow State University

On colorings with forbidden isosceles triangles in Euclidean spaces

In this paper, we propose a modification of the linear algebra method in combinatorics that enables us to obtain new exponential lower bounds in a problem of the minimum number of colors needed to color the space so that no three points of the same color form an isosceles triangle with side lengths of a given set.

Key words: chromatic numbers, Euclidean Ramsey theory, distance graph.

1. Введение

Задача о раскраске метрического пространства — это одна из самых важных и в то же время многогранных задач современной комбинаторной геометрии. С подробностями ее истории можно ознакомиться по обзорам и книгам [1] – [6]. Ниже мы расскажем лишь о тех моментах, которые непосредственно важны для нашего исследования.

Итак, впервые задача о раскраске пространства была предложена Нелсоном и Хадвигером в середине XX века (см. [6], [7]). Тогда речь зашла об отыскании *хроматического числа пространства* \mathbb{R}^n , обозначаемого $\chi(\mathbb{R}^n)$ и равного минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки евклидова пространства, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \exists V_1, \dots, V_\chi \ \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1\}.$$

Из всего многообразия результатов, касающихся величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, выделим лишь несколько наиболее значимых для нашей работы. Во-первых, наилучшая известная верхняя оценка хроматического числа была получена Ларманом и Роджерсом в 1972 году (см. [8]):

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Во-вторых, известны две экспоненциальные нижние оценки:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} + o(1) \right)^n = (1.207\dots + o(1))^n$$

(см. работу [9] Франкла и Уилсона, опубликованную в 1981 году) и

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239\dots + o(1))^n$$

(см. работу [10] Райгородского, опубликованную в 2000 году). Подчеркнем, что функции $o(1)$ в неравенствах, конечно, разные. Более того, при малых n оценки из первого неравенства сильнее оценок из второго неравенства.

Существует множество естественных обобщений величины $\chi(\mathbb{R}^n)$. Так, вещественное евклидово пространство заменяют произвольным метрическим пространством (X, ρ) , при этом расстояние a , которому запрещено достигаться между точками одного цвета, также выбирают произвольно (в евклидовом случае величина a не влияла на значение хроматического числа):

$$\chi((X, \rho), a) = \min\{\chi : \exists V_1, \dots, V_\chi \ \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq a\}.$$

Здесь, в частности, много внимания уделялось случаям рационального евклидова пространства \mathbb{Q}^n (см. [2], [11] – [14]), пространствам \mathbb{R}^n и \mathbb{Q}^n с метриками l_p (см. [2], [15] – [17]), сферам с евклидовой метрикой (см. [2], [18] – [21]).

Далее, вместо одного запрета берут множества запретов $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+$ (как конечные, так и бесконечные):

$$\chi((X, \rho), \mathcal{A}) = \min\{\chi : \exists V_1, \dots, V_\chi \ \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \mathcal{A}\}.$$

Здесь среди прочего можно отметить работы [2], [22] – [27]. Также стоит отметить, что, как правило, в случае, когда $|\mathcal{A}| < \infty$, речь идет о величинах

$$\bar{\chi}((X, \rho); k) = \max_{\mathcal{A}: |\mathcal{A}|=k} \chi((X, \rho), \mathcal{A}).$$

В то же время можно запрещать не несколько независимых расстояний, но более сложные точечные конфигурации. В этом случае пока рассматривают только евклидовы пространства. А именно, пусть дано множество $S \subset \mathbb{R}^d$, $|S| \geq 2$. Пусть $n \geq d$. Положим

$$\chi_S(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \exists V_1, \dots, V_\chi \ \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \ \forall \varphi \text{ — движения пространства } \varphi(S) \not\subset V_i\}.$$

Множество S называется *рамсеевским*, если $\chi_S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Легко показать, что если множество S рамсеевское, то оно конечное и лежит на некоторой сфере (см. [28]). Обратное утверждение является открытой гипотезой, которая доказана в ряде случаев — например, для произвольных симплексов (подразумеваются множества вершин симплексов) и декартовых произведений любых рамсеевских множеств (см. [28], [29] – [34]). Для симплексов соответствующие хроматические числа растут экспоненциально, как и для двухточечных множеств, с которых начиналась вся проблематика. Правда, константы в основаниях экспонент очень близки к 1, и даже для треугольников, которые нам особенно интересны в контексте настоящей работы, наилучшая известная оценка имеет вид (см. [32] – [34])

$$\chi_\Delta(\mathbb{R}^n) \geq (1.052\dots + o(1))^n.$$

Вместе с тем, конечно, $\chi_S(\mathbb{R}^n) \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$.

Запрещенных одноцветных конфигураций, как и запрещенных расстояний, можно брать целое множество. В недавних работах авторов этой статьи (см. [35] – [37]) была изучена величина $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$ (при $0 < a < 1 < b < \sqrt{2}$), равная минимальному количеству

цветов, в которые можно так покрасить все точки евклидова пространства, чтобы никакие три точки одного цвета не образовывали равнобедренный треугольник с длинами боковых сторон 1 и длиной основания в пределах от a до b . Разумеется, если в данном определении единицу заменить каким-нибудь числом c , то получится некоторое новое хроматическое число $\chi_{a,b,c}(\mathbb{R}^n)$. В настоящей работе мы рассмотрим, в частности, вопрос об отыскании величины

$$\bar{\chi}_{a,b}(\mathbb{R}^n) = \max_c \chi_{a,b,c}(\mathbb{R}^n).$$

Наконец, пусть $\chi_{a,b,c_1,\dots,c_l}(\mathbb{R}^n)$ — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все точки евклидова пространства, чтобы никакие три точки одного цвета не образовывали равнобедренный треугольник с длинами боковых сторон c_i и длиной основания в пределах от a до b , $i = 1, \dots, l$. Положим

$$\bar{\chi}_{a,b;l}(\mathbb{R}^n) = \max_{c_1,\dots,c_l} \chi_{a,b,c_1,\dots,c_l}(\mathbb{R}^n).$$

Понятно, что для любых a, b, l, n выполнено

$$\bar{\chi}_{a,b;l}(\mathbb{R}^n) \leq \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; l).$$

Последняя величина, как нетрудно увидеть, не превосходит $(3 + o(1))^{ln}$. В следующем разделе мы сформулируем новую теорему о нижней оценке хроматического числа $\bar{\chi}_{a,b;l}(\mathbb{R}^n)$ и выведем из нее численные следствия при $l \leq 5$.

2. Формулировка результата

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть $0 < a < b < \sqrt{2}$, $l \in \mathbb{N}$. Возьмем любые числа κ, α , удовлетворяющие ограничениям $0 < \kappa < \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \kappa$. Положим

$$\beta = \kappa - \frac{a^2}{b^2}(\kappa - \alpha), \quad \delta = \left[\frac{(l+1)(\kappa - \alpha)}{\beta - \alpha} \right], \quad p = \frac{\kappa - \alpha}{\delta}, \quad r = \frac{\alpha(\kappa - \alpha)}{1 + 2(\alpha - \kappa)}.$$

При $x \in [\beta - \kappa + \alpha + r, \alpha + r]$ положим

$$C_1 = (\alpha + 2r)^{\alpha+2r} \cdot (\alpha + r)^{-\alpha-r} \cdot r^{-r} \cdot (1 - \alpha - 2r)^{1-\alpha-2r} \cdot (\kappa - \alpha - r)^{r+\alpha-\kappa} \cdot (1 - \kappa - r)^{r+\kappa-1},$$

$$C_2(x) = (\alpha + r)^{\alpha+r} \cdot x^{-x} \cdot (\alpha + r - x)^{2(x-\alpha-r)} \cdot r^r \cdot (x - \alpha)^{\alpha-x},$$

$$C_3(x) = (\kappa - \alpha - r)^{\kappa-\alpha-r} \cdot (\beta - x)^{x-\beta} \cdot (\kappa + x - \alpha - \beta - r)^{2(\alpha+\beta+r-\kappa-x)} \times \\ \times (1 - \kappa - r)^{1-\kappa-r} \cdot (1 + \alpha + \beta - x - 2\kappa)^{x+2\kappa-1-\alpha-\beta},$$

$$\lambda = \max_x C_2(x) \cdot C_3(x).$$

Тогда

$$\bar{\chi}_{a,b;l}(\mathbb{R}^n) \geq \left(\frac{C_1 \cdot p^p \cdot (1-p)^{1-p}}{\lambda} + o(1) \right)^n.$$

Для $l \leq 5$ были получены оптимальные оценки с помощью компьютера, но в данной работе мы приведем только три таблицы. Таблица с номером l построена именно для данного l из формулировки теоремы. По вертикали в таблице откладывается значение a с небольшим шагом, по горизонтали — b . В соответствующей клетке сверху вниз расположены 4 числа:

1) оптимальная константа в основании экспоненты, которая согласно утверждению теоремы служит нижней оценкой для изучаемого нами хроматического числа;

2) оптимальное значение параметра κ ;

3) оптимальное значение параметра α ;

4) оптимальное значение параметра β .

Можно заметить также, что при $l = 1$ константа 1) приближается к величине 1.207 из упомянутой в начале введения теоремы Франкла–Уилсона. К сожалению, метод, позволивший в асимптотике заменить 1.207 на 1.239, нам в текущей задаче применить не удалось.

	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
0,1	1,001 0,010 0,003 0,008	1,033 0,160 0,080 0,151	1,072 0,240 0,096 0,231	1,102 0,420 0,236 0,412	1,124 0,370 0,160 0,364	1,139 0,290 0,063 0,285	1,151 0,310 0,070 0,306	1,160 0,400 0,151 0,396	1,167 0,310 0,054 0,307	1,172 0,480 0,219 0,477	1,177 0,470 0,204 0,468	1,180 0,350 0,081 0,348	1,183 0,280 0,008 0,278
0,2			1,001 0,010 0,003 0,008	1,013 0,040 0,000 0,033	1,033 0,160 0,080 0,151	1,053 0,120 0,004 0,110	1,072 0,200 0,056 0,191	1,088 0,170 0,004 0,161	1,102 0,200 0,016 0,192	1,114 0,200 0,002 0,193	1,124 0,370 0,160 0,364	1,132 0,320 0,101 0,314	1,139 0,290 0,063 0,285
0,3					1,001 0,010 0,003 0,008	1,008 0,030 0,003 0,025	1,020 0,060 0,006 0,052	1,033 0,160 0,080 0,151	1,047 0,110 0,005 0,100	1,060 0,140 0,014 0,130	1,072 0,240 0,096 0,231	1,083 0,180 0,021 0,171	1,093 0,300 0,128 0,292
0,4							1,001 0,010 0,003 0,008	1,006 0,030 0,009 0,025	1,013 0,040 0,000 0,033	1,023 0,070 0,009 0,062	1,033 0,080 0,000 0,071	1,043 0,100 0,001 0,090	1,053 0,120 0,004 0,110
0,5									1,001 0,010 0,003 0,008	1,005 0,020 0,002 0,016	1,010 0,040 0,008 0,034	1,017 0,050 0,002 0,042	1,025 0,070 0,005 0,061
0,6											1,001 0,010 0,003 0,008	1,004 0,020 0,004 0,016	1,008 0,030 0,003 0,025
0,7													1,001 0,010 0,003 0,008

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство нашей теоремы очень близко к доказательству теоремы 2 из статьи [36]. Однако выбор некоторых параметров будет по существу отличаться. Поэтому мы аккуратно введем необходимые обозначения и проверим, что стоящие за ними объекты обладают теми свойствами, которых хватит для ссылок на подходящие части доказательства упомянутой выше теоремы 2.

Итак, пусть заданы $a, b, l, \kappa, \alpha, \beta, \delta, p, r, x, \lambda$. Считаем, не ограничивая общности, что размерность n пространства достаточно велика. Пусть $p_1 = p_1(n)$ — минимальное простое число, большее, чем $[pn] + 1$. Хорошо известно, что тогда $p_1(n) = pn + p'(n)$, где $p' = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [38], [39]). Положим

$$\bar{\beta} = [\beta n - \delta p'(n) - 1], \quad \bar{\alpha} = [\alpha n] + 2, \quad t = \sqrt{\frac{2[\kappa n] - 2\bar{\alpha}}{b^2}}.$$

Ясно, что

$$p_1 \sim pn, \quad \bar{\beta} \sim \beta n, \quad \bar{\alpha} \sim \alpha n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Рассмотрим (ср. начало п. 4.2 в статье [36]) совокупность векторов

$$\Sigma = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \left\{ 0, \frac{1}{t} \right\}, \quad |\{i : x_i \neq 0\}| = [\kappa n] \right\}.$$

Как и в статье [36], проверим, что для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Sigma$ из неравенства $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq \frac{\bar{\alpha}}{t^2}$ следует оценка $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 \leq b^2$, а из неравенства $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \frac{\bar{\beta}}{t^2}$ следует оценка $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 \geq a^2$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq \frac{\bar{\alpha}}{t^2} \implies |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 \leq \frac{2[\kappa n] - 2\bar{\alpha}}{t^2} = b^2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \frac{\bar{\beta}}{t^2} \implies |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 &\geq \frac{2[\kappa n] - 2\bar{\beta}}{t^2} = \frac{[\kappa n] - \bar{\beta}}{[\kappa n] - \bar{\alpha}} \cdot b^2 \geq \frac{\kappa n - 1 - \beta n + \delta p'(n) + 1}{\kappa n - \alpha n} \cdot b^2 > \\ &> \frac{\kappa - \beta}{\kappa - \alpha} \cdot b^2 = a^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Как и в статье [36], выберем из Σ как можно бóльшую по мощности подсовокупность M , в которой попарные расстояния между векторами лежат в пределах от a до b . В свете импликаций (2) и (3) достаточно добиться того, чтобы в известные границы попали скалярные произведения векторов из M . Но в точности такую же задачу мы решаем и в работе [36]: хотя значения функций $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ там немного другие и величина нормировки (аналог величины t) совсем иная, однако нормировка в итоге вовсе не важна (наша задача, очевидно, равносильна задаче о построении как можно бóльшей совокупности $(0, 1)$ -векторов, в которой каждый вектор имеет ровно $[\kappa n]$ единиц и скалярное произведение любых двух векторов заключено между $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$), а все, что нужно от функций $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, — это то, что они имеют асимптотики (1). В результате мы гарантируем существование подсовокупности $M \subset \Sigma$ с мощностью

$$T_1 = \left(\frac{C_1}{\lambda} + o(1) \right)^n.$$

Положим

$$\gamma_1(n) = [\kappa n] - (\delta - 1)p_1(n), \quad \gamma_2(n) = [\kappa n] - (\delta - 2)p_1(n), \quad \dots, \quad \gamma_l(n) = [\kappa n] - (\delta - l)p_1(n).$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $Q \subset M$ — произвольная совокупность векторов, у которых попарные скалярные произведения не равны ни одному из чисел $\frac{\gamma_1}{t^2}, \dots, \frac{\gamma_l}{t^2}$. Тогда

$$|Q| \leq \sum_{i=0}^{p_1(n)-1} C_n^i =: T_2.$$

Доказательство леммы 1. Домножим каждый вектор из совокупности M на t . Тогда возникнет совокупность M' , состоящая из $(0, 1)$ -векторов (ср. [36]). А совокупность Q превратится в совокупность Q' , в которой запрещены скалярные произведения $\gamma_1 = \gamma_1(n), \dots, \gamma_l = \gamma_l(n)$. Далее, пользуемся, как и в работе [36], линейно-алгебраическим методом (см. также [40] – [42]). А именно, каждому вектору из совокупности Q' сопоставляем некоторый полином, лежащий в пространстве размерности $\sum_{i=0}^{p_1(n)-1} C_n^i$, и доказываем, что сопоставленные полиномы линейно независимы, откуда и следует утверждение леммы. При этом полиномы буквально такие же, как в [36]. Но для доказательства их линейной независимости важно (см. [36]), чтобы на отрезке от $\bar{\alpha}$ до $\bar{\beta}$ не было тех же вычетов по модулю $p_1 = p_1(n)$, что и числа $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Иными словами, остается проверить, что $[\kappa n] - \delta p_1(n) < \bar{\alpha}$ и $[\kappa n] - (\delta - l - 1)p_1(n) > \bar{\beta}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} [\kappa n] - (\delta - l - 1)p_1 &> \kappa n - 1 - \delta p n - \delta p' + (l + 1)p_1 = \kappa n - 1 - (\kappa - \alpha)n - \delta p' + (l + 1)p_1 = \\ &= \alpha n - 1 - \delta p' + (l + 1)p_1 \geq \alpha n - 1 - \delta p' + (l + 1)p n \geq \alpha n - 1 - \delta p' + (\beta - \alpha)n = \beta n - \delta p' - 1 \geq \bar{\beta}; \\ [\kappa n] - \delta p_1 &< \kappa n - \delta p n = \kappa n - (\kappa - \alpha)n = \alpha n < \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим

$$c_i = \sqrt{\frac{2[\kappa n] - 2\gamma_i}{t^2}}, \quad i = 1, \dots, l.$$

Ясно, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ утверждение “ $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = c_i$ ” равносильно утверждению “ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\gamma_i}{t^2}$ ”.

Предположим, что $\chi_{a,b,c_1,\dots,c_l}(\mathbb{R}^n) < \frac{T_1}{(l+2)T_2}$. Тогда и совокупность M допускает раскраску в указанное число цветов без троек точек одного цвета, образующих равнобедренный треугольник с длинами боковых сторон c_i и длиной основания в пределах от a до b . Очевидно, найдется цвет, в который покрашены все точки из некоторой такой подсовокупности $L \subset M$, что $|L| = (l + 2)T_2$. На множестве L как на множестве вершин построим граф с ребрами l типов, соединяя две вершины ребром i -го типа, коль скоро расстояние между ними равно c_i . Пусть $Q_1 \subset L$ — максимальная по мощности подсовокупность в L , свободная от каких-либо ребер. Тогда по лемме 1 имеем $|Q_1| \leq T_2$. Следовательно, из каждой вершины в $L \setminus Q_1$ идет хотя бы одно ребро в Q_1 . Получаем не менее $(l + 1)T_2$ разных ребер. Удаляем из L совокупность Q_1 и берем в оставшемся множестве максимальную по мощности совокупность Q_2 , свободную от ребер. Набираем еще хотя бы lT_2 ребер. И так далее. Суммируя возникающую арифметическую прогрессию, получаем в итоге не менее $\frac{(l+2)(l+1)}{2}T_2$ ребер. Предположим теперь, что из каждой вершины в L выходят только ребра разных типов. Тогда суммарное количество ребер не превосходит величины $\frac{l}{2}(l + 2)T_2$. Противоречие. Значит, в L есть вершина \mathbf{x} , из которой выходят два ребра какого-то одного i -го типа. Пусть концы этих ребер суть \mathbf{y}, \mathbf{z} . Тогда треугольник с вершинами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ равнобедренный, причем длины его боковых сторон равны c_i , а длина основания лежит в пределах от a до b , т.к. $L \subset M$, а в M все длины находятся в этих пределах по построению. Таким образом, мы нашли одноцветный запрещенный треугольник, и это приводит нас к противоречию с исходным предположением, т.е.

$$\chi_{a,b,c_1,\dots,c_l}(\mathbb{R}^n) \geq \frac{T_1}{(l + 2)T_2} = \left(\frac{C_1 \cdot p^p \cdot (1 - p)^{1-p}}{\lambda} + o(1) \right)^n,$$

и теорема доказана.

Литература

1. Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. 2001. Т. 56, вып. 1. С. 107–146.
2. Raigorodskii A. M. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed. 2013. P. 429–460.
3. Raigorodskii A. M. Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics. 2014. N 625. P. 93–109.
4. Brass P., Moser W., Pach. J. Research problems in discrete geometry // Springer. 2005.
5. Székely L. A. Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // J. Bolyai Math. Soc. 2002. N 11. P. 649–666
6. Soifer A. The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.
7. Hadwiger H. Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. 1944. N 4. P. 140–144.
8. Larman D. G., Rogers C. A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. N 19. P. 1–24.
9. Frankl P, Wilson R. Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. N 1. P. 357–368.
10. Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55, вып. 2. С. 147–148.
11. Benda M., Perles M. Colorings of metric spaces // Geombinatorics. 2000. N 9. P. 113–126.
12. Пономаренко Е. И., Райгородский А. М. Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 2. С. 84–89.
13. Пономаренко Е. И., Райгородский А. М. Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства // Успехи матем. наук. 2013. Т. 68, вып. 5. С. 183–184.
14. Пономаренко Е. И., Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства \mathbb{Q}^n // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, вып. 1. С. 127–130.
15. Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства с l_q -нормой // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59, вып. 5. С. 161–162.
16. Kang J.-H., Füredi Z. Distance graphs on \mathbb{Z}^n with l_1 -norm // Theoretical Comp. Sci. 2004. V. 319, N 1–3. P. 357–366.
17. Курнавский А. Б. On the chromatic NUMBER. of \mathbb{R}^n with an arbitrary norm // Discrete Math. 2011. N 311. P. 437–440.
18. Lovász L. Self-dual polytopes and the chromatic NUMBER. of distance graphs on the sphere // Acta Sci. Math. 1983. N 45. P. 317–323.
19. Курнавский А. Б. О раскрасках сфер, вложенных в \mathbb{R}^n // Матем. сборник. 2011. Т. 202, вып. 6. С. 83–110.
20. Райгородский А. М. О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах // Доклады РАН. 2010. Т. 432, вып. 2. С. 174–177.
21. Raigorodskii A. M. On the chromatic NUMBER.s of spheres in \mathbb{R}^n // Combinatorica. 2012. V. 32, N 1. P. 111–123.
22. Курнавский А. Б. Хроматическое число пространства \mathbb{R}^n с множеством запрещенных расстояний // Доклады РАН. 2010. — Т. 435, вып. 6. С. 740–743.

23. Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства с двумя запрещенными расстояниями // Доклады РАН. 2006. Т. 408, вып. 5. С. 601–604.
24. Райгородский А. М., Шитова И. М. О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями // Матем. сборник. 2008. Т. 199, вып. 4. С. 107–142.
25. Горская Е. С., Митричева И. М., Протасов В. Ю., Райгородский А. М. Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации // Матем. сборник. 2009. Т. 200, вып. 6. С. 3–22.
26. Моцевитин Н. Г., Райгородский А. М. О раскрасках пространства \mathbb{R}^n с несколькими запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 5. С. 733–744.
27. Бердников А. В., Райгородский А. М. Хроматические числа евклидова пространства с двумя запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2014. Т. 96, вып. 5. С. 790–793.
28. Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H. Ramsey theory // John Wiley and Sons, NY, Second Edition. 1990.
29. Frankl P., Rödl V. All triangles are Ramsey // Transactions of the Amer. Math. Soc. 1986. V. 297, N 2. P. 777–779.
30. Frankl P., Rödl V. Forbidden intersections // Transactions of the Amer. Math. Soc. 1987. V. 300, N 1. P. 259–286.
31. Frankl P., Rödl V. A partition property of simplices in Euclidean space // J. Amer. Math. Soc. 1990. V. 3, N 1. P. 1–7.
32. Райгородский А. М., Звонарев А. Е., Самиров Д. В., Харламова А. А. Улучшение теоремы Франкла–Рёдля о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения // Доклады РАН. 2014. Т. 457, вып. 2. С. 144–146.
33. Райгородский А. М., Звонарев А. Е., Самиров Д. В., Харламова А. А. О хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником // Матем. сборник. 2014. Т. 205, вып. 9. С. 97–120.
34. Райгородский А. М., Звонарев А. Е. Улучшения теоремы Франкла–Рёдля о числе ребер гиперграфа с запрещенным пересечением и их следствия в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова. 2015. Т. 288. С. 109–119.
35. Райгородский А. М., Самиров Д. В. Хроматические числа пространств с запрещенными одноцветными треугольниками // Матем. заметки. 2013. Т. 93, вып. 1. С. 134–143.
36. Райгородский А. М., Самиров Д. В. Новые нижние оценки хроматического числа пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками // Итоги науки и техники, Современная математика и ее приложения. 2013. Т. 125. С. 252–268.
37. Райгородский А. М., Самиров Д. В. Новые оценки в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками // Доклады РАН. 2014. Т. 456, вып. 3. С. 280–283.
38. Прахар К. Распределение простых чисел // М.: Мир, 1967.
39. Baker R. C., Harman G., Printz J. The difference between consecutive primes, II // Proceedings of the London Mathematical Society. 2001. N 83. P. 532–562.
40. Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике // М.: МЦНМО, Второе издание. 2015.
41. Babai L., Frankl P. Linear algebra methods in combinatorics // Part 1, Department of Computer Science, The University of Chicago, Preliminary version 2. 1992.
42. Alon N., Babai L., Suzuki H. Multilinear polynomials and Frankl–Ray–Chaudhuri–Wilson type intersection theorems // J. Combin. Theory A. 1991. N 58. P. 165–180.

References

1. *Raigorodskii A. M.* Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces. Russian Mathematical Surveys. 2001. V. 56, N 1. P. 107–146. (in Russian).
2. *Raigorodskii A. M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters. Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed. 2013. P. 429–460.
3. *Raigorodskii A. M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters. Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics. 2014. N 625. P. 93–109.
4. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. Springer, 2005.
5. *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems. J. Bolyai Math. Soc. 2002. N 11. P. 649–666
6. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.
7. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum. Portugaliae Math. 1944. N 4. P. 140–144.
8. *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space. Mathematika. 1972. N 19. P. 1–24.
9. *Frankl P, Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences. Combinatorica. 1981. N 1. P. 357–368.
10. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic number of a space. Russian Mathematical Surveys. 2000. V. 55, N 2. P. 147–148. (in Russian).
11. *Benda M., Perles M.* Colorings of metric spaces. Geombinatorics. 2000. N 9. P. 113–126.
12. *Ponomarenko E. I., Raigorodskii A. M.* New lower bound for the chromatic number of a rational space with one and two forbidden distances. Mathematical Notes. 2015. V. 97, N 2. P. 84–89. (in Russian).
13. *Ponomarenko E. I., Raigorodskii A. M.* A new lower bound for the chromatic number of the rational space. Russian Mathematical Surveys. 2013. V. 68, N 5. P. 183–184. (in Russian).
14. *Ponomarenko E. I., Raigorodskii A. M.* On the chromatic number of \mathbb{Q}^n . Proceedings MIPT. 2012. V. 4, N 1. P. 127–130. (in Russian).
15. *Raigorodskii A. M.* The chromatic number of a space with the metric l_q . Russian Mathematical Surveys. 2004. V. 59, N 5. P. 161–162. (in Russian).
16. *Kang J.-H., Füredi Z.* Distance graphs on \mathbb{Z}^n with l_1 -norm. Theoretical Comp. Sci. 2004. V. 319, N 1-3. P. 357–366.
17. *Kupavskii A. B.* On the chromatic NUMBER. of \mathbb{R}^n with an arbitrary norm. Discrete Math. 2011. N 311. P. 437–440.
18. *Lovász L.* Self-dual polytopes and the chromatic NUMBER. of distance graphs on the sphere. Acta Sci. Math. 1983. N 45. P. 317–323.
19. *Kupavskii A. B.* On the colouring of spheres embedded in \mathbb{R}^n . Sbornik: Mathematics. 2011. V. 202, N 6. P. 83–110. (in Russian).
20. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in Euclidean spaces. Doklady Mathematics. 2010. V. 432, N 2. P. 174–177. (in Russian).
21. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic NUMBER.s of spheres in \mathbb{R}^n . Combinatorica. 2012. V. 32, N 1. P. 111–123.
22. *Kupavskii A. B.* The chromatic number of \mathbb{R}^n with a set of forbidden distances. Doklady Mathematics. 2010. V. 435, N 6. P. 740–743. (in Russian).
23. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic number of a space with two forbidden distances. Doklady Mathematics. 2006. V. 408, N 5. P. 601–604. (in Russian).

24. *Raigorodskii A. M., Shitova I. M.* Chromatic numbers of real and rational spaces with real or rational forbidden distances. *Sbornik: Mathematics*. 2008. V. 199, N 4. P. 107–142. (in Russian).
25. *Gorskaya E. S., Mitricheva I. M., Protasov V. Yu., Raigorodskii A. M.* Estimating the chromatic numbers of Euclidean space by convex minimization methods. *Sbornik: Mathematics*. 2009. V. 200, N 6. P. 3–22. (in Russian).
26. *Моцеевичин Н. Г., Raigorodskii A. M.* Colorings of the space \mathbb{R}^n with several forbidden distances. *Mathematical Notes*. 2007. V. 81, N 5. P. 733–744. (in Russian).
27. *Berdnikov A. V., Raigorodskii A. M.* On the chromatic number of Euclidean space with two forbidden distances. *Mathematical Notes*. 2014. V. 96, N 5. P. 790–793. (in Russian).
28. *Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H.* Ramsey theory. John Wiley and Sons, NY, Second Edition. 1990.
29. *Frankl P., Rödl V.* All triangles are Ramsey. *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 1986. V. 297, N 2. P. 777–779.
30. *Frankl P., Rödl V.* Forbidden intersections // *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 1987. V. 300, N 1. P. 259–286.
31. *Frankl P., Rödl V.* A partition property of simplices in Euclidean space. *J. Amer. Math. Soc.* 1990. V. 3, N 1. P. 1–7.
32. *Raigorodskii A. M., Zvonarev A. E., Samirov D. V., Kharlamova A. A.* Improvement of the Frankl-Rödl theorem on the number of edges in hypergraphs with forbidden cardinalities of edge intersections. *Doklady Mathematics*. 2014. V. 457, N 2. P. 144–146. (in Russian).
33. *Raigorodskii A. M., Zvonarev A. E., Samirov D. V., Kharlamova A. A.* On the chromatic number of a space with forbidden equilateral triangle. *Sbornik: Mathematics*. 2014. V. 205, N 9. P. 97–120. (in Russian).
34. *Raigorodskii A. M., Zvonarev A. E.* Improvements of the Frankl-Rödl theorem on the number of edges of a hypergraph with forbidden intersections, and their consequences in the problem of finding the chromatic number of a space with forbidden equilateral triangle. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2015. N 288. P. 109–119. (in Russian).
35. *Raigorodskii A. M., Samirov D. V.* Chromatic numbers of spaces with forbidden monochromatic triangles. *Mathematical Notes*. 2013. V. 93, N 1. P. 134–143. (in Russian).
36. *Raigorodskii A. M., Samirov D. V.* New lower bounds for the chromatic number of a space with forbidden isosceles triangles. *Journal of Mathematical Sciences*. 2014. V. 204, N 4. P. 531–541.
37. *Raigorodskii A. M., Samirov D. V.* New bounds in a problem of the chromatic number of a space with forbidden isosceles triangles. *Doklady Mathematics*. 2014. V. 456, N 3. P. 280–283. (in Russian).
38. *Prakhar K.* Distribution of Prime Numbers. M.: Mir. 1967, (in Russian).
39. *Baker R. C., Harman G., Printz J.* The difference between consecutive primes, II. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 2001. N 83. P. 532–562.
40. *Raigorodskii A. M.* Linear-Algebraic methods in combinatorics. M.: MCCME, The second edition. 2015. (in Russian).
41. *Babai L., Frankl P.* Linear algebra methods in combinatorics. Part 1, Department of Computer Science, The University of Chicago, Preliminary version 2. 1992.
42. *Alon N., Babai L., Suzuki H.* Multilinear polynomials and Frankl-Ray-Chaudhuri-Wilson type intersection theorems. *J. Combin. Theory A*. 1991. N 58. P. 165–180.