УДК 517.95, 517.98

А. Р. Ханалыев

Российский университет дружбы народов

О коэрцитивной разрешимости нелокальных краевых задач для параболических уравнений

В произвольном банаховом пространстве E рассматривается нелокальная краевая задача

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \le t \le 1),\ v(0) = v(\lambda) + \mu \ \ (0 < \lambda \le 1)$$

для дифференциального уравнения с (переменным) линейным сильно позитивным оператором $A(t)$, имеющим не зависящую от t, всюду плотную в E область определения $D = D(A(t))$, порождающим аналитическую полугруппу $\exp\{-sA(t)\}(s \ge 0)$. Устанавливается коэрцитивная разрешимость нелокальной краевой задачи в банаховом пространстве $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ и доказывается неравенство коэрцитивности при естественных предположениях относительно оператор-функции $A(t)$. Прежде неравенство коэрцитивности в таком виде было доказано лишь для случая постоянного оператора $A(t) \equiv A$. С другой стороны, полученная оценка усиливает результаты, известные ранее для переменного оператора.

Ключевые слова: Коэрцитивная разрешимость, нелокальная краевая задача, параболическое уравнение, банахово пространство, аналитическая полугруппа.

A. R. Hanalyev

Peoples' Friendship University of Russia

On the coercive solvability of nonlocal boundary value problems for parabolic equations

In the arbitrary Banach space E, the nonlocal boundary value problem

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \le t \le 1),\ v(0) = v(\lambda) + \mu \ \ (0 < \lambda \le 1)$$

is considered for a differential equation with a (variable) linear strongly positive operator $A(t)$, whose domain $D = D(A(t))$ is everywhere dense in E and independent of t, generating the analytical semigroup $\exp\{-sA(t)\}(s \ge 0)$. We establish the coercive solvability of the nonlocal boundary value problem in the Banach space $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ and prove the coercivity estimate under some natural assumptions on the operator function $A(t)$. Earlier, the similar estimate was only known for a the constant operator $A(t) \equiv A$. On the other hand, it enhances the results obtained previously for the case of a variable operator.

Key words: Coercive solvability of nonlocal boundary value problem, parabolic equation, Banach space, analytic semigroup.

1. Введение

Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \le t \le 1),\ v(0) = v(\lambda) + \mu \ \ (0 < \lambda \le 1) \tag{1}$$

в произвольном банаховом пространстве E. Здесь $v(t)$ и $f(t)$ – искомая и заданная функции, определенные на $[0, 1]$ со значениями в E; $v'(t)$ – производная, понимаемая как предел по норме E соответствующего конечно-разностного отношения; $A(t)$ – действующий в E линейный неограниченный оператор, имеющий не зависящую от t, всюду плотную в E

область определения D; $\mu \in D$. К такой задаче сводятся различные краевые задачи для эволюционных уравнений в частных производных (см. [1]).

Будем предпологать, что

1) при любых $t \in [0,1]$ и ρ с $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$ оператор $A(t)+\rho I$ имеет ограниченный обратный, причем

$$\left\| [A(t)+\rho I]^{-1} \right\|_{E\to E} \leqslant M(1+|\rho|)^{-1}$$

(согласно [2], оператор $A(t)$ принято называть сильно позитивным);

2) для любых $t, s, \tau \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\left\| [A(t)-A(s)]A^{-1}(\tau) \right\|_{E\to E} \leqslant M|t-s|^{\varepsilon}, 0<\varepsilon \leqslant 1.$$

Функцию $v(t)$ назовем решением задачи (1), если выполнены следующие условия:

1) функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$;

2) элемент $v(t)$ принадлежит $D = D(A(t))$ при каждом $t \in [0,1]$ и $A(t)v(t)$ непрерывна на $[0,1]$;

3) функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению и нелокальному краевому условию (1).

Задача (1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $v(t)$ при определенных ограничениях на μ, достаточно гладких функций $f(t)$, и для её решения справедлива формула

$$v(t) = v(t,0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\{\mu + \int\limits_0^{\lambda} v(\lambda,s)f(s)ds\} + \int\limits_0^{t} v(t,s)f(s)ds,$$

где $v(t,s)$ – фундаментальное решение уравнения (1), называемое также эволюционной оператор-функцией (см. [1,9]). Она определяется из соотношения

$$v(t,s) = \exp\{-(t-s)A(t)\} + \int\limits_s^{t} \exp\{-(t-t_1)A(t)\}[A(t)-A(t_1)]v(t_1,s)dt_1$$

или

$$v(t,s) = \exp\{-(t-s)A(s)\} + \int\limits_s^{t} v(t,t_1)[A(s)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-s)A(s)\}dt_1$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1) оператор $v(t,s)$ сильно непрерывен по t и s $(0 \leq s \leq t \leq 1)$;

2) $v(t,s) = v(t,\tau)v(\tau,s), v(t,t) = I,\ \ 0 \leq s \leq \tau \leq t \leq 1$;

3) оператор $v(t,s)$ отображает область определения $D = D(A(t))$ в себя, оператор $u(t,s) = A(t)v(t,s)A^{-1}(s)$ ограничен, сильно непрерывен по t и s $(0 \leq s \leq t \leq 1)$;

4) на области D оператор $v(t,s)$ сильно дифференцируем по t и s, причем

$$\frac{\partial v(t,s)}{\partial t} = -A(t)v(t,s), \qquad \frac{\partial v(t,s)}{\partial s} = v(t,s)A(s).$$

Определение. *Говорят, что задача* (1) *коэрцитивно разрешима в некотором банаховом пространстве* $F(E) = F([0,1],E)$ *функций* $f(t)$ *со значениями в* E *на* $[0,1]$, *если для всякой* $f \in F(E)$ *существует единственное решение задачи* (1), *причем* v' *и* $A(t)v$ *принадлежат тому же пространству* $F(E)$ (см. [3]).

Введем банахово пространство $C_0^{\beta,\gamma}(E) = C_0^{\beta,\gamma}([0,1],E)(0 \leq \gamma \leq \beta,\ 0<\beta<1)$ полученное замыканием множества всех гладких функций $f(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$ со значениями из E в норме

$$\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0\leq t<t+\tau\leq 1} \frac{(t+\tau)^{\gamma}\,\|f(t+\tau)-f(t)\|_E}{\tau^{\beta}}.$$

Здесь под $C(E) = C([0,1],E)$ понимается банахово пространство определенных на $[0,1]$ со значениями в E непрерывных функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_{C(E)} = \max_{0\le t\le 1} \|f(t)\|_E .$$

Таким образом, при $\beta = \alpha$ и $\gamma = 0$ пространство $C_0^{\alpha,0}(E) = C_0^{\alpha,0}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ совпадает с пространством $C^\alpha(E) = C^\alpha([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$, норма в котором имеет вид

$$\|f\|_{C^\alpha(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0\le t<t+\tau\le 1} \frac{\|f(t+\tau)-f(t)\|_E}{\tau^\alpha}.$$

А при $\gamma = \beta = \alpha$ пространство $C_0^{\alpha,\alpha}(E) = C_0^{\alpha,\alpha}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ совпадает с пространством $C_0^\alpha(E) = C_0^\alpha([0,1],E)(0 < \alpha < 1)$ с нормой

$$\|f\|_{C_0^\alpha(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0\le t<t+\tau\le 1} \frac{t^\alpha\|f(t+\tau)-f(t)\|_E}{\tau^\alpha},$$

причем нормы этих пространств равномерно по $\alpha \in (0,1)$ эквивалентны.

Обозначим через $E_\alpha^t = E_{\alpha,\infty}^t(A(t),E)$ $(0 < \alpha < 1)$ дробные пространства с нормой

$$\|u\|_{E_\alpha^t} = \sup_{z>0} z^{1-\alpha}\|A(t)\exp\{-zA(t)\}u\|_E + \|u\|_E ,$$

состоящие из всех элементов $u \in E$, для которых эта норма конечна.

Из результатов работы [4] следует, что пространство E_α^t не зависит от t в силу предположения $D(A(t)) = D$, то есть, что $\|u\|_{E_\alpha^t}$ эквивалентна $\|u\|_{E_\alpha^s}$ при любых $t,s \in [0,1]$. В дальнейшем пространство E_α^t обозначается просто E_α.

Известно, что самых общих требований ($A(t)$ — неограниченный сильно позитивный оператор, порождающий аналитическую полугруппу в некотором банаховом пространстве E) недостаточно для коэрцитивной разрешимости неоднородной задачи Коши, а также рассматриваемой нелокальной задачи (1) в пространстве непрерывных функций $C(E)$ (см., например, [9–11]). С этой точки зрения важно выделить классы функций на отрезке со значениями в E, где при таких общих предположениях относительно $A(t)$ неоднородная нелокальная краевая задача (1) коэрцитивно разрешима. Один из таких классов — описанные выше пространства $C_0^{\beta,\gamma}(E)$, был введен А. Ашыралыевым и П. Е. Соболевским [6, 9, 10]. В работах [6, 10] были получены оценки и доказана коэрцитивная разрешимость задачи (1) с постоянным оператором $A(t) \equiv A$ в пространствах $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ и $C_0^{\beta,\gamma}(E_{\alpha-\beta}) = C_0^{\beta,\gamma}([0,1],E_{\alpha-\beta})$ $(0 \le \gamma \le \beta \le \alpha,\ 0 < \alpha < 1)$. Основной результат настоящей статьи — это теорема 4, где доказывается аналогичная оценка для задачи (1) с переменным оператором в пространстве $C_0^{\beta,\gamma}(E)$.

Отметим, что ряд оценок для задачи (1) в случае переменного оператора был получен в [11, 12]. Однако они были связаны с завышенными предположениями относительно f или μ. Для сравнения удобно привести здесь эти результаты.

Теорема 1. *Пусть* $A(0)\mu + f(\lambda) - f(0) \in E_0^{\beta,\gamma}$, $f \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *при некоторых* $0 \le \gamma \le \beta$, $0 < \beta < \varepsilon \le 1$. *Тогда для единственного решения задачи* (1) *в* $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \le$$
$$\le M\left[|A(0)\mu + f(\lambda) - f(0)|_0^{\beta,\gamma} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right]$$

с постоянной M, не зависящей от β,γ,μ и f. Здесь $E_0^{\beta,\gamma}$ – банахово пространство, состоящее из всех элементов $w \in E$ таких, что конечна норма

$$|w|_0^{\beta,\gamma} = \max_{0\le z\le 1}\left\|e^{-zA(t)}w\right\|_E + \sup_{0\le z<z+\tau\le 1}\tau^{-\beta}(z+\tau)^\gamma\left\|(e^{-(z+\tau)A(t)} - e^{-zA(t)})w\right\|_E$$

(с точностью до эквивалентности, эта норма не зависит от $t \in [0,1]$).

Теорема 2. *Пусть $A(0)\mu + f(\lambda) - f(0) \in E_{\alpha-\gamma}$, $f \in C_0^{\beta,\gamma}(E_{\alpha-\beta})$ при некоторых $0 \le \gamma \le \beta \le \alpha < \varepsilon \le 1$, $0 < \alpha < 1$. Тогда задача* (1) *коэрцитивно разрешима в $C_0^{\beta,\gamma}(E_{\alpha-\beta})$ и для её единственного решения $v(t)$ справедливо неравенство*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E_{\alpha-\beta})} + \left\|A(.)v\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E_{\alpha-\beta})} + \left\|v'\right\|_{C(E_{\alpha-\gamma})} \le$$

$$\le M\left[\frac{1}{\alpha}\left\|A(0)\mu + f(\lambda) - f(0)\right\|_{E_{\alpha-\gamma}} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|f\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E_{\alpha-\beta})}\right],$$

где M не зависит от $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ и f.

В настоящей работе доказывается усиленная оценка в предположениях $A(0)\mu + f(\lambda) - f(0) \in E_{\beta-\gamma}$ и $f \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Она опирается на соответствующую оценку, полученную в [7] для задачи Коши:

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \le t \le 1),\ v(0) = v_0. \tag{2}$$

Теорема 3. *Пусть $v_0' = f(0) - A(0)v_0 \in E_{\beta-\gamma}$, $f \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ при некоторых $0 \le \gamma < \beta < \varepsilon \le 1$, $0 < \beta < 1$. Тогда задача* (2) *коэрцитивно разрешима в $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ и для её единственного решения $v(t)$ справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \left\|A(.)v\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \left\|v'\right\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \le$$

$$\le M\left[\frac{1}{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\left\|f\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right] \tag{3}$$

с постоянной M, не зависящей от β, γ, v_0' и f.

В конце введения приведем вспомогательные результаты, которые будем использовать при доказательстве основной теоремы.

Так, известно, что для аналитической полугруппы справедливы оценки (см. [5, 9]):

$$\left\|\exp\{-(t-s)A(t)\}\right\|_{E\to E} \le M\exp\{-\delta(t-s)\},\ t > s,\ M > 0,\ \delta > 0,$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)\exp\{-(t-s)A(t)\}\right\|_{E\to E} \le \frac{M}{(t-s)^{1+\alpha}},\ 0 \le \alpha \le 1,$$

$$\left\|z^{1-\alpha}A^{1-\alpha}(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E} \le M,\ z > 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

$$\left\|\exp\{-(t+\tau-s)A(t+\tau)\} - \exp\{-(t+\tau-s)A(t)\}\right\|_{E\to E} \le M\tau^{\varepsilon},\ 0 < \varepsilon \le 1.$$

Далее, в [5, 9, 11, 12] для $v(t,s)$ получены следующие леммы.

Лемма 1. *Для любых* $0 \le s < t \le 1$, $0 \le \alpha \le 1$, $0 < \varepsilon \le 1$ *верны оценки*

$$\left\|v(t,s)\right\|_{E\to E} \le M,$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)v(t,s)A^{-1}(s)\right\|_{E\to E} \le \frac{M}{(t-s)^{\alpha}},$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)v(t,s)\right\|_{E\to E} \le \frac{M}{(t-s)^{1+\alpha}},$$

$$\left\|v(t,s) - \exp\{-(t-s)A(t)\}\right\|_{E\to E} \le M(t-s)^{\varepsilon},$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)[v(t,s) - \exp\{-(t-s)A(t)\}]\right\|_{E\to E} \le \frac{M}{(t-s)^{1+\alpha-\varepsilon}},$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)[v(t,s) - \exp\{-(t-s)A(t)\}]A^{-1}(s)\right\|_{E\to E} \le M(t-s)^{\varepsilon-\alpha},$$

где M не зависит от t, s, α и ε.

Лемма 2. *Для любых $0 \le s < t < t+\tau \le 1$, $0 \le \alpha \le 1$, $0 < \varepsilon \le 1$ справедливы оценки*

$$\|v(t+\tau, s) - v(t,s)\|_{E\to E} \le M\varphi,$$

$$\|A(t+\tau)v(t+\tau, s) - A(t)v(t,s)\|_{E\to E} \le \frac{M\varphi}{t-s},$$

$$\left\|A(t+\tau)v(t+\tau, s)A^{-1}(s) - A(t)v(t,s)A^{-1}(s)\right\|_{E\to E} \le M\varphi,$$

где $\varphi = \tau^{\varepsilon} + \frac{\tau^{\alpha}}{(t-s)^{\alpha}}$ и M не зависит от t, s, τ, α и ε.

Лемма 3. *Пусть $A(t)A^{-1}(p) = A(t+\lambda)A^{-1}(p)$ при некоторых $0 \le t \le t+\lambda$, $p \in [0,1]$. Тогда для любых $0 \le s < t \le t+\lambda$, $u \in D$ справедливо тождество*

$$v(t,s)u = v(t+\lambda, s+\lambda)u.$$

Лемма 4. *Пусть выполняются условия леммы 1.3. Тогда оператор $I - v(\lambda, 0)$ имеет ограниченный обратный и справедливы неравенства*

$$\left\|(I - v(\lambda,0))^{-1}\right\|_{E\to E} \le M,$$

$$\left\|A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E\to E} \le M.$$

Опираясь на норму в E_α, из последней леммы нетрудно вывести, что

$$\left\|A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E_\alpha\to E_\alpha} \le M, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4}$$

Наконец, удобно будет представить v_0' в виде суммы следующим образом:

$$v_0' = v'(0) = -A(0)v(0) + f(0) =$$

$$= -A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\{\mu + \int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)f(s)ds\} + f(0) =$$

$$= A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)(f(\lambda) - f(s))ds -$$

$$-A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)[A(\lambda) - A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds -$$

$$-A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}((I - v(\lambda,0))A^{-1}(\lambda)f(\lambda) + \mu) + f(0) =$$

$$= A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)(f(\lambda) - f(s))ds -$$

$$-A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)[A(\lambda) - A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds -$$

$$-A(0)A^{-1}(\lambda)f(\lambda) - A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\mu + f(0) =$$

$$= A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)(f(\lambda)-f(s))ds-$$

$$-A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)[A(\lambda)-A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds+$$

$$+A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(0)(-A(0)\mu - f(\lambda)+f(0))+$$

$$+A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}v(\lambda,0)(A^{-1}(\lambda)f(\lambda)-A^{-1}(0)f(0))+$$

$$+A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}v(\lambda,0)A^{-1}(\lambda)(A(\lambda)-A(0))A^{-1}(0)f(\lambda)=$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)(f(\lambda)-f(s))ds,$$

$$I_2 = -A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)[A(\lambda)-A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds,$$

$$I_3 = A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(0)(-A(0)\mu - f(\lambda)+f(0)),$$

$$I_4 = A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}v(\lambda,0)(A^{-1}(\lambda)f(\lambda)-A^{-1}(0)f(0))+$$

$$+A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}v(\lambda,0)A^{-1}(\lambda)(A(\lambda)-A(0))A^{-1}(0)f(\lambda).$$

2. Формулировка и доказательство основной теоремы

Для нелокальной краевой задачи (1) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $A(0)\mu + f(\lambda) - f(0) \in E_{\beta-\gamma}$, $f \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ при некоторых $0 \le \gamma < \beta < \varepsilon \le 1$, $0 < \beta < 1$. Тогда задача (1) коэрцитивно разрешима в $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ и для её единственного решения $v(t)$ справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \left\|A(.)v\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \left\|v'\right\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \le$$

$$\le M\left[\frac{1}{\beta-\gamma}\left\|A(0)\mu + f(\lambda) - f(0)\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\left\|f\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right], \qquad (5)$$

где M не зависит от β, γ, μ и f.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (3), полученным для задачи Коши. Достаточно установить следующую оценку:

$$\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} = \left\|f(0) - A(0)v(0)\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \le$$

$$\le M\left[\left\|A(0)\mu + f(\lambda) - f(0)\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\left\|f\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right]. \qquad (6)$$

Поэтому нужно получить оценки для I_1, I_2, I_3 и I_4 в норме $E_{\beta-\gamma}$. Вначале оценим I_1. Верна оценка

$$\left\|\int\limits_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)(f(\lambda)-f(s))ds\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \le \frac{M}{\beta(1-\beta)}\left\|f\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \qquad (7)$$

Действительно,

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\left\|A(\lambda)\exp\{-zA(\lambda)\}\int\limits_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)(f(\lambda)-f(s))ds\right\|_E \leq$$

$$\leq z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^\lambda \left\|A^2(\lambda)\exp\{-zA(\lambda)\}v(t,s)\right\|_{E\to E}\|f(\lambda)-f(s)\|_E\, ds \leq$$

$$\leq Mz^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^\lambda \min\left[\frac{1}{z^2},\frac{1}{(\lambda-s)^2}\right](\lambda-s)^\beta\lambda^{-\gamma}ds\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leq$$

$$\leq M_1 z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^\lambda \frac{(\lambda-s)^\beta ds}{(z+\lambda-s)^2\lambda^\gamma}\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\,.$$

Рассмотрим два случая: $z \leq \lambda$ и $z > \lambda$. Пусть сначала $z \leq \lambda$. Тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^\lambda \frac{(\lambda-s)^\beta ds}{(z+\lambda-s)^2\lambda^\gamma} \leq z^{1-\beta}\int\limits_0^\lambda \frac{ds}{(z+\lambda-s)^{2-\beta}} \leq \frac{1}{1-\beta}.$$

Пусть теперь $z > \lambda$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^\lambda \frac{(\lambda-s)^\beta ds}{(z+\lambda-s)^2\lambda^\gamma} \leq \frac{1}{z^{\beta-\gamma}\lambda^\gamma}\int\limits_0^\lambda \frac{ds}{(\lambda-s)^{1-\beta}} = \frac{\lambda^{\beta-\gamma}}{\beta z^{\beta-\gamma}} < \frac{1}{\beta}.$$

Поэтому для любого $z > 0$ получим

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^\lambda \frac{(\lambda-s)^\beta ds}{(z+\lambda-s)^2\lambda^\gamma} \leq \frac{1}{\beta(1-\beta)}.$$

Итак, установили, что

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\left\|A(\lambda)\exp\{-zA(\lambda)\}\int\limits_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)(f(\lambda)-f(s))ds\right\|_E \leq \frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\,.$$

Отсюда следует (7). Воспользовавшись оценками (4) и (7), получаем

$$\|I_1\|_{E_{\beta-\gamma}} \leq \left\|A(0)(I-v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E_{\beta-\gamma}\to E_{\beta-\gamma}} \times$$

$$\times\left\|\int\limits_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)(f(\lambda)-f(s))ds\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leq \frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\,,$$

Теперь оценим I_2:

$$\|I_2\|_{E_{\beta-\gamma}} \leq \left\|A(0)(I-v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E_{\beta-\gamma}\to E_{\beta-\gamma}} \times$$

$$\times\left\|\int\limits_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)[A(\lambda)-A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leq \frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\,.$$

Так как здесь имеет место оценка

$$\left\| \int_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)[A(\lambda)-A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds \right\|_{E_{\beta-\gamma}} \le \frac{M}{\beta(1-\beta)} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{8}$$

Действительно,

$$z^{1-(\beta-\gamma)} \left\| A(t)\exp\{-zA(\lambda)\} \int_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)[A(\lambda)-A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds \right\|_E \le$$

$$\le z^{1-\beta+\gamma} \int_0^\lambda \left\| A^2(t)\exp\{-zA(\lambda)\}v(\lambda,s)\right\|_{E\to E} \left\|[A(\lambda)-A(s)]A^{-1}(\lambda)\right\|_{E\to E} \|f(\lambda)\|_E \, ds \le$$

$$\le Mz^{1-\beta+\gamma} \int_0^\lambda \min\left[\frac{1}{z^2}, \frac{1}{(\lambda-s)^2}\right](\lambda-s)^\varepsilon ds \, \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \le$$

$$\le M_1 z^{1-\beta+\gamma} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-s)^\varepsilon ds}{(z+\lambda-s)^2} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть сначала $z \le \lambda$, тогда получаем

$$z^{1-\beta+\gamma} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-s)^\varepsilon ds}{(z+\lambda-s)^2} \le z^{1-\beta}\lambda^\gamma \int_0^\lambda \frac{ds}{(z+\lambda-s)^{2-\beta}} \le \frac{\lambda^\gamma}{1-\beta} \le \frac{1}{1-\beta}.$$

Пусть $z > \lambda$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-s)^\beta ds}{(z+\lambda-s)^2} \le \frac{1}{z^{\beta-\gamma}} \int_0^\lambda \frac{ds}{(\lambda-s)^{1-\varepsilon}} = \frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon z^{\beta-\gamma}} < \frac{\lambda^\varepsilon}{\varepsilon \lambda^{\beta-\gamma}} \le \frac{1}{\beta}.$$

Поэтому для любого $z > 0$

$$z^{1-\beta+\gamma} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-s)^\varepsilon ds}{(z+\lambda-s)^2} \le \frac{1}{\beta(1-\beta)}.$$

Итак,

$$z^{1-(\beta-\gamma)} \left\| A(\lambda)\exp\{-zA(\lambda)\} \int_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)[A(\lambda)-A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds \right\|_E \le$$

$$\le \frac{M_1}{\beta(1-\beta)} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда получаем (8).

Воспользовавшись оценкой (4), оценим I_3 в норме $E_{\beta-\gamma}$:

$$\|I_3\|_{E_{\beta-\gamma}} \le \left\| A(0)(I-v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E_{\beta-\gamma}\to E_{\beta-\gamma}} \|-A(0)\mu - f(\lambda) + f(0)\|_{E_{\beta-\gamma}} \le$$

$$\le M\|A(0)\mu + f(\lambda) - f(0)\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Наконец, получим оценку для I_4. Справедлива оценка

$$\left\|A(\lambda)v(\lambda,0)((A^{-1}(\lambda)f(\lambda)-A^{-1}(0)f(0))+A^{-1}(\lambda)(A(\lambda)-A(0))A^{-1}(0)f(\lambda))\right\|_{E_{\beta-\gamma}}\leq$$

$$\leq M\left\|f\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{9}$$

Действительно,

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\parallel A^2(\lambda)\exp\{-zA(\lambda)\}v(\lambda,0)((A^{-1}(\lambda)f(\lambda)-A^{-1}(0)f(0))+$$

$$+A^{-1}(\lambda)(A(\lambda)-A(0))A^{-1}(0)f(\lambda))\parallel_E\leq$$

$$\leq z^{1-\beta+\gamma}\left\|A^2(\lambda)\exp\{-zA(\lambda)\}v(\lambda,0)A^{-1}(\lambda)\right\|_{E\to E}\times$$

$$\times(\|f(\lambda)\|_E+\left\|A(\lambda)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\|f(0)\|_E+\left\|[A(\lambda)-A(0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\|f(\lambda)\|_E)\leq$$

$$\leq Mz^{1-\beta+\gamma}\min\left\{\frac{1}{z},\frac{1}{\lambda}\right\}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leq\frac{M_1z^{1-\beta+\gamma}}{z+\lambda}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leq M_1\lambda^{-\beta+\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Итак,

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\parallel A^2(\lambda)\exp\{-zA(\lambda)\}v(\lambda,0)((A^{-1}(\lambda)f(\lambda)-A^{-1}(0)f(0))+$$

$$+A^{-1}(\lambda)(A(\lambda)-A(0))A^{-1}(0)f(\lambda))\parallel_E\leq M_1\lambda^{-\beta+\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда следует (9). В силу (4) и (9) имеем, что

$$\|I_4\|_{E_{\beta-\gamma}}\leq\left\|A(0)(I-v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E_{\beta-\gamma}\to E_{\beta-\gamma}}\times$$

$$\times\left\|A(\lambda)v(\lambda,0)((A^{-1}(\lambda)f(\lambda)-A^{-1}(0)f(0))+A^{-1}(\lambda)(A(\lambda)-A(0))A^{-1}(0)f(\lambda))\right\|_{E_{\beta-\gamma}}\leq$$

$$\leq M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_1, I_2, I_3 и I_4, получаем (6). Используя оценку (6) в правой части неравенства (3), получим неравенство коэрцитивности (5). Теорема 4 доказана.

3. Следствие

Теорема 5. *Пусть* $A(0)\mu+f(\lambda)-f(0)=0$, $f\in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *при некоторых* $0\leq\gamma\leq\beta<\varepsilon\leq 1$, $0<\beta<1$. *Тогда задача* (1) *коэрцитивно разрешима в* $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *и для её единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}+\|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leq\frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}$$

с постоянной M*, не зависящей от* β,γ *и* f.

Если в доказанной теореме $\beta=\alpha$ и $\gamma=0$, тогда получаем [8]:

Теорема 6. *Пусть* $A(0)\mu+f(\lambda)-f(0)\in E_\alpha$, $f\in C^\alpha(E)$ *при некоторых* $0<\alpha<\varepsilon\leq 1$. *Тогда задача* (1) *коэрцитивно разрешима в* $C^\alpha(E)$ *и для её единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство*

$$\left\|v'\right\|_{C^\alpha(E)}+\|A(.)v\|_{C^\alpha(E)}+\left\|v'\right\|_{C(E_\alpha)}\leq$$

$$\leq M\left[\frac{1}{\alpha}\|A(0)\mu+f(\lambda)-f(0)\|_{E_\alpha}+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(E)}\right],$$

где M *не зависит от* α,μ *и* f.

Теорема 7. *Пусть* $A(0)\mu + f(\lambda) - f(0) = 0$, $f \in C^{\alpha}(E)$ *при некоторых* $0 < \alpha < \varepsilon \leq 1$. *Тогда задача* (1) *коэрцитивно разрешима в* $C^{\alpha}(E)$ *и справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C^{\alpha}(E)} + \|A(.)v\|_{C^{\alpha}(E)} \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^{\alpha}(E)},$$

где M *не зависит от* α *и* f.

В пространстве Гёльдера $C_0^{\alpha}(E)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $\mu \in D(A(t))$, $f \in C_0^{\alpha}(E)$ *при некоторых* $0 < \alpha < \varepsilon \leq 1$. *Тогда задача* (1) *коэрцитивно разрешима в* $C_0^{\alpha}(E)$ *и справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\alpha}(E)} + \|A(.)v\|_{C_0^{\alpha}(E)} \leq M\left[\|A(0)\mu\|_E + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha}(E)}\right],$$

где M *не зависит от* α, μ *и* f.

Литература

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
3. *Крейн С.Г., Хазан М.И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техн. Сер. Матем. анал. 1983. Т. 21. С. 130–264.
4. *Соболевский П.Е.* О дробных нормах в банаховом пространстве, порожденных неограниченным оператором // Успехи матем. наук. 1964. Т. 19, вып. 6(120). С. 219–222.
5. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Моск. матем. общ-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
6. *Ашыралыев А., Ханалыев А.* Коэрцитивная разрешимость нелокальной краевой задачи для параболических уравнений в пространствах гладких функций // Известия АН Туркменистана. Сер. Физ.-техн., хим. и геол. наук. Ашхабад, 1996. № 3. С. 58–63.
7. *Ханалыев А.* Коэрцитивная разрешимость задачи Коши для параболических уравнений с переменным оператором // XXI Золотой век – век науки. Научные статьи победителей научного конкурса среди молодых ученых Туркменистана. Ашхабад, 2004. С. 381–384.
8. *Ханалыев А.Р.* Об одной оценке коэрцитивности нелокальной краевой задачи для абстрактного параболического уравнения с переменным оператором // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции: Воронежская весенная математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVII» (3–9 мая 2016 г.). Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. С. 275–277.
9. *Ashyralyev A. and Sobolevskii P.E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. Birkhäuser Verlag: Basel, Boston, Berlin, 2004.
10. *Ashyralyev A., Hanalyev A. and Sobolevskii P.E.* Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations // Abstract and Applied Analysis. 2001. V. 6, N 1. P. 53–61.
11. *Ashyralyev A., Hanalyev A.* Coercive solvability of parabolic differential equations with dependent operators // TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. 2012. V. 2, N 1. P. 75–93.
12. *Ashyralyev A., Hanalyev A.* Well-Posedness of Nonlocal Parabolic Differential Problems with Dependent Operators // The Scientific World Journal. V. 2014, N ID 519814. Jan. 2014. P. 1–11.

References

1. *Krein S.G.* Linear differential equations in Banach space. Moscow. Nauka, 1967. (in Russian).
2. *Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E.* Integral operators in spaces of summable functions. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
3. *Krein S.G., Khazan M.I.* Differential equations in Banach space. Itogi nauki i tekhn. Ser. Matem. Anal. 1983. V. 21. P. 130–264. (in Russian).
4. *Sobolevskii P.E.* On fractional norms in Banach space generated by the unbounded operator. Uspekhi Matem. Nauk. 1964. V. 19. N 6(120). P. 219–222. (in Russian).
5. *Sobolevskii P.E.* Equations of parabolic type in a Banach space. Trudy Mosk. Mat. Obs. 1961. V. 10. P. 297–350. (in Russian).
6. *Ashyralyev A., Hanalyev A.* Coercive solvability of the nonlocal boundary value problem for parabolic equations in spaces smooth functions. Proceedings of the Academy of Sciences of Turkmenistan, Ser. Phys.-Techn., Chem. and Geol. Sciences. Ashgabat. 1996. N 3. P. 58–63.
7. *Hanalyev A.* Coercive solvability of the Cauchy problem for parabolic equations with dependent operator. Gold XXI century – the century of science. Scientific articles of the winners of the scientific competition among young scientists of Turkmenistan. Ashgabat, 2004. P. 381–384.
8. *Hanalyev A.R.* On one of the estimate coercivity nonlocal boundary value problem for the abstract parabolic equation with dependent operator. Modern methods of theory of boundary value problems. Proceedings of the International conference: Voronezh spring mathematical school «Pontryagin readings XXI» (May 3–9, 2016). Voronezh: Publishing house of VSU, 2016. P. 275–277. (in Russian).
9. *Ashyralyev A. and Sobolevskii P.E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. Birkhäuser Verlag: Basel, Boston, Berlin, 2004.
10. *Ashyralyev A., Hanalyev A. and Sobolevskii P.E.* Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations. Abstract and Applied Analysis. 2001. V. 6, N 1. P. 53–61.
11. *Ashyralyev A., Hanalyev A.* Coercive solvability of parabolic differential equations with dependent operators. TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. 2012. V. 2, N 1. P. 75–93.
12. *Ashyralyev A., Hanalyev A.* Well-Posedness of Nonlocal Parabolic Differential Problems with Dependent Operators. The Scientific World Journal. V. 2014, N ID 519814. Jan. 2014. P. 1–11.

Поступила в редакцию 06.07.2016