

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Квантовая электродинамика
по направлению подготовки:

03.04.01 «Прикладная математика и физика»,
14.04.02 «Ядерная физика и технологии»,
16.04.01 «Техническая физика»

физтех-школа: для всех физтех-школ, кроме ФЭФМ, ФПМИ
кафедра: теоретической физики

курс: 1 (магистратура)

семестр: 1

Трудоемкость:

теор. курс: вариативная часть – 3 зачет. ед.

лекции – 30 часов Экзамен – 1 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа
– 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.

А. А. Абрикосов

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 мая 2019 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Ю. М. Белоусов

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Уравнения Клейна–Гордона и Дирака. Решения с положительными и отрицательными частотами. Волновая функция позитрона. Алгебра матриц Дирака. Уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле.

2. Электромагнитное взаимодействие. Принцип локальной калибровочной инвариантности. Лагранжиан квантовой электродинамики. Система уравнений квантовой электродинамики.

3. Квантование электромагнитного поля. Условие Лоренца в квантовой электродинамике. Вакуум электромагнитного поля. Хронологическое и нормальное произведения операторов. Связь (свертка) операторов. Средние по вакууму от произведений операторов. Пропагатор фотонов в различных калибровках.

4. Квантование электрон-позитронного поля. Хронологическое и нормальное произведения операторов поля. Связь операторов. Средние по вакууму от произведений операторов. Пропагатор дираковского поля.

5. Постановка задачи рассеяния в квантовой электродинамике. Представление взаимодействия. Инвариантная теория возмущений. S -матрица. Представление матрицы рассеяния в виде суммы нормальных произведений операторов (теоремы Вика).

6. Графическое представление нормальных произведений операторов полей. Топологически эквивалентные нормальные произведения. Импульсное представление. Диаграммы Фейнмана. Амплитуда, вероятность и сечение рассеяния.

7. Интеграл по траекториям и его применение в квантовой электродинамике. Вывод фейнмановских правил теории возмущений с помощью производящего функционала.

8. Основные электродинамические явления. Рассеяние электрона во внешнем поле. Комптоновское рассеяние. Аннигиляция пары в два фотона. Рассеяние электрона и позитрона электроном. Распад позитрония. Рассеяние фотона фотоном.

9. Структура диаграмм матрицы рассеяния. Беспетлевые и петлевые диаграммы. Неприводимые и приводимые диаграммы. Степень расходимости неприводимых диаграмм. Перенормируемость квантовой электродинамики.

10. Собственно энергетические и вершинные диаграммы. Поляризационный, массовый и вершинный операторы. Перенормировка массы и заряда электрона. Метод инвариантной регуляризации Фейнмана. «Бегущая» константа взаимодействия. Проблема ноль-заряда. Асимптотическая свобода в квантовой хромодинамике. Электромагнитная и «голая» масса электрона. Метод размерной регуляризации.

11. Модификация закона Кулона. Аномальный магнитный момент электрона. Радиационное смещение атомных уровней.

Литература

1. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. – Москва : Физматлит, 2006.
2. *Ахизер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. – Москва : Физматлит, 1981.
3. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Квантовые поля. – Москва : Физматлит, 2005.
4. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. – Москва : Наука, 2008.
5. *Пескин М., Шрёдер Д.* Введение в квантовую теорию поля. – Ижевск : РХД, 2001.
6. *Волошин М.Б., Тер-Мартirosян К.А.* Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. – Москва : Энергоатомиздат, 1984.
7. *Грибов В.Н.* Квантовая электродинамика. – Ижевск : РХД, 2001.
8. *Вергелес С.Н.* Теоретическая физика. Квантовая электродинамика. – Москва : Юрайт, 2019.

ЗАДАНИЕ

- Доказать, что оператор спиральности $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\vec{n}$ (где $\vec{\Sigma} = \gamma_0\gamma_5\vec{\gamma}$, \vec{n} – единичный вектор вдоль импульса частицы, $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$) коммутирует со свободным дираковским гамильтонианом. Найти собственные значения оператора спиральности.
- У свободной дираковской частицы (и дираковской частицы в сферически-симметричном потенциале) сохраняется компонента полного момента

$$J_k = \epsilon_{klm}(r_l p_m + A\gamma_l\gamma_m), \quad \text{где } k, l, m = 1, 2, 3.$$

Чему равна постоянная A перед спиновой частью?

- Вычислить суммы произведений биспиноров

$$\sum_{\sigma} u(\sigma, \pm E, \vec{p}) \bar{u}(\sigma, \pm E, \vec{p}), \quad \text{где } E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0.$$

по спиральности частиц $\sigma = \pm\frac{1}{2}$.

- Используя соотношения $\gamma_5^2 = 1$ и $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$, показать, что след произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю.
- Используя соотношение $\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 2\mathbf{I}g_{\alpha\beta}$, (где \mathbf{I} – единичная матрица), получить редукционную формулу для следа произведения четного числа γ -матриц:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d \dots \gamma_r\gamma_s &= g_{ab} \text{Tr } \gamma_c\gamma_d \dots \gamma_r\gamma_s - \\ &- g_{ac} \text{Tr } \gamma_b\gamma_d \dots \gamma_r\gamma_s + \dots + g_{as} \text{Tr } \gamma_b\gamma_c \dots \gamma_r. \end{aligned}$$

- Пусть $A = A_\mu\gamma_\mu$, а R – произвольное матричное выражение. Доказать равенство

$$\gamma_\mu A R \gamma_\mu + A \gamma_\mu R \gamma_\mu = 2RA.$$

- Динамика комплексного скалярного поля задается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \int (\partial_\nu\phi^*\partial^\nu\phi - m^2\phi^*\phi) d^3x.$$

- Напишите импульсы $\pi(x)$, $\pi^*(x)$, канонически сопряженные полям $\phi(x)$ и $\phi^*(x)$, и соответствующие операторы рождения и уничтожения;

(b) Проверьте, что гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \int (\pi^* \pi + \nabla \phi^* \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi) d^3 x,$$

и выразите его через операторы рождения и уничтожения;

- (c) Нapiшите уравнение Гейзенберга для $\phi(x)$;
 (d) Покажите, что оператор заряда

$$Q = \frac{i}{2} \int (\phi^* \pi^* - \phi \pi) d^3 x$$

не зависит от времени, выразите его через операторы рождения и уничтожения и определите заряд каждого из двух типов частиц.

8. Показать, что пропагатор фотона

$$D_{\mu\nu}(x-y) = i \left\langle 0 \left| \mathbf{T} \left\{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(y) \right\} \right| 0 \right\rangle$$

описывает следующие последовательности событий:

- (a) при $t_x > t_y$ в точке y рождается фотон, который затем уничтожается в точке x ;
 (b) при $t_x < t_y$ фотон рождается в точке x и уничтожается в точке y ;

Проверить в x - и p -представлениях, что $-D_{\mu\nu}$ — функция Грина оператора д'Аламбера \square .

9. Показать, что пропагатор электрон-позитронного поля

$$S(x-y) = -i \left\langle 0 \left| \mathbf{T} \left\{ \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \right\} \right| 0 \right\rangle$$

описывает следующие последовательности событий:

- (a) при $t_x > t_y$ в точке y рождается электрон, который затем уничтожается в точке x ;
 (b) при $t_x < t_y$ в точке x рождается позитрон, который уничтожается в точке y ;

Проверить в x - и p -представлениях, что $S(x-y)$ — функция Грина оператора Дирака $\hat{p} - m$.

10. Пусть $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ — операторы электрон-позитронного поля. Показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \left\{ \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \right\} &= \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y); \\ \mathbf{N} \left\{ \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \right\} &= \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{\bar{\psi}}(y); \\ \mathbf{N} \left\{ \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{\psi}(y) \right\} &= -\mathbf{N} \left\{ \hat{\psi}(y) \hat{\bar{\psi}}(x) \right\}. \end{aligned}$$

11. Показать, что при унитарных преобразованиях

$$U U^+ = U^+ U = 1$$

не меняются нормировка состояний, средние значения операторов, коммутационные соотношения, свойство эрмитовости операторов, собственные значения операторов.

12. Как выглядит калибровочное преобразование, которое реализует переход от фотонного пропагатора в калибровке Фейнмана D^F к пропагатору в поперечной калибровке Ландау D^L ?

- (а) Чему равна функция $D^F(x-y) - D^L(x-y)$ в координатном представлении?
- (б) (*) Как меняется оператор вектор-потенциала при смене калибровки $\hat{A}_\mu^F(x) \rightarrow \hat{A}_\mu^L(x)$?

13. Найти дифференциальное сечение рассеяния электрона в кулоновском поле точечного ядра с зарядом Z .
14. Показать, что амплитуды комптон-эффекта, соответствующие каждой из двух возможных фейнмановских диаграмм, порознь не являются калибровочно-инвариантными. Проверить калибровочно инвариантность суммарной амплитуды процесса.
15. Показать, что при малых энергиях позитрона сечение аннигиляции пары электрон-позитрон в два фотона обратно пропорционально относительной скорости частиц, а вероятность аннигиляции не зависит от скорости.
16. Найти сечение образования электрон-позитронной пары при столкновении двух фотонов, выразив его через сечение двухфотонной аннигиляции пары.

17. Показать, что поляризация вакуума искажает кулоновское поле точечного заряда в области $r \leq m^{-1}$ (где m – масса электрона), а вне этой области искажение поля экспоненциально убывает.
18. (*) Найти регуляризованный поляризационный оператор $\Pi(k^2)$ при $k^2 \gg m^2$ в методе инвариантной и размерной регуляризации.
19. (*) Найти электромагнитную массу электрона в методе инвариантной и размерной регуляризации.

Срок сдачи задания: 02.12.2019 – 07.12.2019 г.

Подписано в печать 25.06.2019. Формат $60 \times 84^1/16$.

Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 60 экз. Заказ № 210.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru