УДК 519.6

А. Г. Бирюков

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Лагранжева форма условий оптимальности для выпукло-гладких экстремальных задач в $\mathbb{R}^n$

Предложено определение выпукло-гладких функций и выпукло-гладких экстремальных задач в $\mathbb{R}^n$. Доказаны теоремы о необходимом условии экстремума выпукло-гладких задач математического программирования.

Ключевые слова: выпуклые функции, гладкие функции, выпукло-гладкие функции, выпуклые задачи математического программирования, гладкие задачи математического программирования, выпукло-гладкие задачи математического программирования, необходимые условия оптимальности, экстремальные задачи в $\mathbb{R}^n$.

A. G. Biryukov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Lagrangian form of optimality conditions for convex-smooth extremal problems in $\mathbb{R}^n$

The definition of convex smooth functions and convex smooth extremal problems is proposed. Theorems of the necessary condition for the extremum of convex-smooth problems of mathematical programming are proved.

Key words: convex functions, convex problems of mathematical programming, smooth problems of mathematical programming, convex smooth problems of mathematical programming, necessary optimality conditions, extremal problems in $\mathbb{R}^n$.

1. Введение

В статье рассматриваются условия оптимальности для экстремальной задачи в $\mathbb{R}^n$:

$$\min_{x\in G\subset\mathbb{R}^n} f(x), \tag{1}$$

где $G = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m};\ h_j(x) = 0, j = \overline{1,l};\ x \in \Pi\right\}$, $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпуклое замкнутое множество.

Задача 1 называется *общей задачей математического программирования* (*ОМП*). В учебно-научной литературе ([1–4] и др.) условия оптимальности в форме Лагранжа обычно рассматриваются:

а) для *гладких задач ОМП*, в которых функции f и φ_i, $i = \overline{1,m}$ – дифференцируемые, а функции h_j, $j = \overline{1,l}$ – непрерывно-дифференцируемые;

б) для *выпуклых задач ОМП*, в которых функция f выпукла и множество G выпуклое.

В настоящей работе рассматриваются необходимые условия оптимальности (НУО) для более широкого класса экстремальных задач, названного *выпукло-гладкой задачей ОМП*, для которой выпуклая и гладкая задачи ОМП являются частными случаями.

Определение 1. Функция $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ называется выпукло-гладкой (ВГ), если она представлена в виде: $f(x) = f_{\text{в}}(x) + f_{\text{д}}(x)$, $x \in M$, где $f_{\text{в}}(x)$ – выпуклая недифференцируемая функция, $f_{\text{д}}(x)$ – гладкая (дифференцируемая) функция.

Так как функция $f_{\text{в}} = 0$ – выпуклая и $f_{\text{д}} = 0$ – гладкая, то если f – выпуклая или f – гладкая, то она выпукло-гладкая.

Определение 2. Вектор $\hat{a} = a + \nabla f_{\text{д}}(x)$ называется квазиградиентом выпукло-гладкой функции, если $a \in \partial f_{\text{в}}(x)$, $\partial f_{\text{в}}(x)$ – субдифференциал функции $f_{\text{в}}(x)$, a – его субградиент, $\nabla f_{\text{д}}(x)$ – градиент функции $f_{\text{д}}(x)$.

Очевидно, что производная ВГ функции $f(x)$, $x \in \mathrm{R}^n$ в точке x_0 по направлению y $f'(x_{0,}y) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \frac{f(x_0+\alpha y) - f(x_0)}{\alpha}$ существует.

Определение 3. Задача 1 называется выпукло-гладкой, если в ней хотя бы одна из функций f и φ_i, $i = \overline{1,m}$, h_j, $j = \overline{1,l}$ – выпукло-гладкая, множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – либо выпукло, либо определяется системой ограничений, которые задаются выпукло-гладкими функциями.

Определение 4. Множество $J(x_0)$ называется множеством индексов активных ограничений задачи 1 в точке $x_0 \in G$, если $J(x_0) = \{i \in [1, m] : \varphi_i(x_0) = 0\}$. Ограничения $\varphi_i(x_0)$, $i \in J(x_0)$ называются активными ограничениями в точке $x_0 \in G$, а ограничения $\varphi_i(x_0)$, $i \notin J(x_0)$ – неактивными.

Термин «выпукло-гладкая задача ОМП» был введен в [5], но определение 3 ВГ задачи более общее, чем в [5], и поэтому приведем доказательство НУО. В настоящей работе рассматривается вариант ВГ задачи, в которой функции $h_j(x)$, $j = \overline{1,l}$ непрерывно дифференцируемы в окрестности некоторой точки $x_0 \in G$. При этих условиях все касательные конусы для множеств G будут выпуклыми.

Определение 5. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$– некоторое множество, и $x_0 \in \overline{G}$ (замыкание множества G). Касательным (контингентным) конусом ко множеству G в точке $x_0 \in \overline{G}$ называется множество $T(x_0, G) = \{\lambda z : \exists \{x_k\} \subset G,\ x_k \to x_0, \lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} = z,\ \lambda \geqslant 0\}$.

Если x_0 – изолированная точка, то $T(x_0) = 0 \equiv 0_n \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, $\|z\| = 1$.

Определение 6. Пусть в некоторой точке $x_0 \in G$ существует ненулевой конус $T(x_0, G)$, и для функции $f(x)$ на $\{x_k\} \subset G$ определена последовательность $\{f(x_k)\}, k \to \infty$. Производной функции $f(x)$, $x \in G$, по касательному направлению $z \in T(x_0, G)$ назовем величину $f'_T(x_0, z) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{\|x_k - x_0\|}$, если предел в правой части равенства существует.

2. Условия оптимальности для выпукло-гладких экстремальных задач

Сначала рассмотрим некоторые свойства конуса $T(x_0, G)$ и производной $f'_T(x_0, z)$.

Лемма 1.

1) *Конус* $T(x_0, G)$ *замкнут* (из [4]).

2) *Если* $G = \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) = 0, j = \overline{1,l}\}$, *функции* $h_j, j = \overline{1,l}$ *– непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $x_0 \in G$, $\nabla h_j(x_0), j = \overline{1,l}$ *линейно независимы, то* $T(x_0, z) = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla h_j^T(x_0) z = 0, j = \overline{1,l}\}$ (из [6]).

3) *Если* $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m};\ h_j(x) = 0, j = \overline{1,l}\}$, $x_0 \in G$; φ_i, $i = \overline{1,m}$ *– дифференцируемы в точке* x_0, h_j *– непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* x_0, $\nabla\varphi_i(x_0)$, $i \in J(x_0)$, $\nabla h_j(x_0)$, $j = \overline{1,l}$ *– линейно независимы, то* $T(x_0, G) = \{z \in \mathbb{R}^n : \nabla\varphi_i^T(x_0) z \leqslant 0,\ i \in J(x_0); \nabla h_j^T(x_0) z = 0,\ j = \overline{1,l}\}$ (из [6]).

4) *Пусть* $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$, *функции* φ_i, $i = \overline{1,m}$ *выпуклы на* $\mathbb{R}^n$, $intG \neq \emptyset$, *тогда* $T(x_0, G) = \{z \in \mathbb{R}^n : a_i^T z \leqslant 0,\ i \in J(x_0)\ \forall a_i \in \partial\varphi_i(x_0),\ i \in J(x_0)\}$ (из [5]).

Теорема 1 (из [4]). *Пусть в задаче* 1: $\min f(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ *в точке* $x^* \in G$ *существует ненулевой касательный конус* $T(x^*, G)$ *и существует производная* $f'_T(x^*, z)\ \forall z \in T(x^*, G)$. *Тогда, если* x^* – *решение задачи* (1), *то*

$$f'_T(x^*, z) \geqslant 0\ \forall z \in T(x^*, G). \tag{2}$$

Если функция f *дифференцируема в* x^*, *то условие* (2) *имеет вид* $\nabla f(x^*)^T z \geqslant 0\ \forall z \in T(x^*, G)$.

Если f *выпукла на* $\mathbb{R}^n$, *то условие* (2) *имеет вид* $f'(x^*, z) \geqslant 0\ \forall z \in T(x^*, G)$, *где* $f'(x^*, z) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \frac{f(x^*+\alpha z) - f(x^*)}{\alpha}$. □

Лемма 2. *Пусть* $G_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, m}$ – *непустые множества, и* $\bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i = G \neq \emptyset$, *в точке* $x \in G$ *для всех множеств существуют касательные конусы, тогда* $T(x, G) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{m} T(x, G_i)$.

Доказательство. Очевидно, что $G \subset G_i$, $i = \overline{1, m}$ и $T(x, G) \subset T(x, G_i)$, $i = \overline{1, m}$, тогда и $T(x, G) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{m} T(x, G_i)$. Для сопряженных конусов справедливо обратное включение: $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{m} T(x, G_i)\right)^* \subset T(x, G)^*$. □

Лемма 3. *Пусть множество* $G = G_1 \bigcap G_2 \neq \emptyset$ *и замкнуто,* $intG_1 \neq \emptyset$, $intG_2 = \emptyset$, *и* $intG_1 \bigcap G_2 \neq \emptyset^*$; $x_0 \in \partial G_1 \bigcap G_2$, *где* ∂G_1 – *граница множества* G_1. *Пусть конусы* $T(x_0, G_1)$ *и* $T(x_0, G_2)$ *выпуклые. Тогда* $T(x_0, G) = T(x_0, G_1) \bigcap T(x_0, G_2)$. *Если же вместо условия* * – $intG_1 \bigcap G_2 = \emptyset$, *то существуют* $a_1 \in T(x_0, G_1)^*$ *и* $a_2 \in T(x_0, G_2)^*$, *не равные нулю такие, что* $a_1 + a_2 = 0$.

Доказательство. Так как по лемме 2 $T(x_0, G) \subset T(x_0, G_1) \bigcap T(x_0, G_2)$, рассмотрим $z \in T(x_0, G_1) \bigcap T(x_0, G_2)$. Вектор $z \in T(x_0, G_2)$, тогда в достаточно малой окрестности точки $x_0 : x_k = x_0 + \alpha_k z + o(\alpha_k) \in G_2$, $\lim\limits_{\alpha_k \to +0} \frac{o(\alpha_k)}{\alpha_k} = 0$, и т.к. $intG_1 \bigcap G_2 \neq \emptyset$, то $\overline{x_k} = x_0 + \alpha_k z \in intG_1$ и $x_k \in intG_1$, т.е. $x_k \in G$. Значит, $\alpha_k z \in T(x_0, G)$, $z \in T(x_0, G)$ и $T(x_0, G_1) \bigcap T(x_0, G_2) \subset T(x_0, G)$. Учитывая обратное включение (лемма 2), получим требуемый результат.

Если же предположить, что $intG_1 \bigcap G_2 = \emptyset$, то и $intT(x_0, G_1) \bigcap \mathrm{ri}T(x_0, G_2) = \emptyset$, т.к. в противном случае $intT(x_0, G_1) \bigcap \mathrm{ri}T(x_0, G_2) \neq \emptyset$, $intG_1 \bigcap G_2 \neq \emptyset$ – имеем первое утверждение леммы.

Известно, что если $\mathrm{ri}M_1 \bigcap \mathrm{ri}M_2 = \emptyset$, где M_1, M_2 – выпуклые конусы, то существуют $a_1 \in M_1^*$ и $a_1 \in M_2^*$ такие, что $a_1 + a_2 = 0$ [7]. Лемма доказана. □

Также легко доказывается следующая лемма:

Лемма 4. *Пусть* G_1, G_2– *замкнутые множества, множество* $G = G_1 \bigcap G_2$ *и* $x_0 \in \partial G_1 \bigcap \partial G_2$, $\mathrm{int}G_1 \bigcap \mathrm{int}G_2 \neq \emptyset$, *конусы* $T(x_0 G_1)$, $T(x_0, G_2)$ *выпуклые.*

Тогда $T(x_0, G) = T(x_0, G_1) \bigcap T(x_0, G_2)$. *Если же* $intG_1 \bigcap \mathrm{int}G_2 = \emptyset$, *то найдутся такие* $a_1 \in T(x_0, G_1)^*$ *и* $a_2 \in T(x_0, G_2)^*$, *что* $a_1 + a_2 = 0$.

Доказательство. Доказывается аналогично лемме 3. □

Замечание 1. Очевидны обобщения (пусть $x_0 \in G$):

1) Если $G = \bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i; intG_i \neq \emptyset$, $i = \overline{1, m_1}; intG_i = \emptyset$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$ и $\left(int \bigcap\limits_{i=1}^{m_1} G_i\right) \bigcap \left(\bigcap\limits_{i=m_1+1}^{m} G_i\right) \neq \emptyset$, то $T(x_0, G) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} T(x_0, G_i)$; а также, если $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{m_1} intG_i\right) \bigcap \left(\bigcap\limits_{i=m_1+1}^{m} G_i\right) = \emptyset$, то существуют не все равные нулю $a_i \in T(x_0, G_i)^*$, $i = \overline{1, m}$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$.

2) Если $\bigcap_{i=1}^m intG_i \neq \emptyset$, то $T(x_0,G) = \bigcap\limits_{i=1}^m T(x_0,G_i)$; если же $\bigcap_{i=1}^m intG_i = \emptyset$, то существуют не все равные нулю $a_i \in T(x_0,G_i)^*$, такие, что $\sum_{i=1}^m a_i = \emptyset$. □

Функция Лагранжа выпукло-гладкой (ВГ) задачи ОМП имеет вид

$$L(x,\lambda,\mu) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i\varphi_i(x) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(x),\ \lambda_i \geqslant 0,\ i=\overline{0,m},\ x\in\Pi,$$

где $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое замкнутое множество.

Определение 7. Пусть дана экстремальная задача (ЭЗ): найти $\min f(x), x\in G\subset \mathrm{R}^n$, где $G=\bigcap_{i=1}^s G_i \neq \emptyset$; x^*- решение задачи. Множество G называется регулярным в точке $x_0\in G$, если $T(x_0,G)=\bigcap_{i=1}^s T(x_0,G_i)$. ЭЗ называется регулярной, если множество G в точке $x^*\in G$ регулярно.

Замечание 2. Если ЭЗ регулярна, то в функции Лагранжа множитель λ_0 можно взять равным 1(из [2]).

Обозначим:

а) $\nabla f(x)$ – градиент, если f – дифференцируемая функция и $a\in\partial f(x)$ – субградиент функции f, если f – выпуклая, $\hat a = a+\nabla f_{\text{д}}(x)$ – квазиградиент ВГ функции f.

б) $a_i=\nabla\varphi_i(x)$, $i\in[1,m]$, если φ_i – дифференцируемая функция, a_i – субградиент, $a_i\in\partial\varphi_i(x)$, если φ_i- выпуклая функция, $\hat a_i = a_i+\nabla\varphi_i(x)$ – квазиградиент ВГ функции φ_i.

в) $\nabla h_j(x)$ – градиент непрерывно дифференцируемой функции $h_j(x)$, $j=\overline{1,l}$.

Также введем обозначения:

$$G_i=\{x\in\mathbb{R}^n:\varphi_i(x)\leqslant 0\},\ i=\overline{1,m},$$

$$G_{\text{н}}=\{x\in\mathbb{R}^n:\varphi_i(x)\leqslant 0,\ i=\overline{1,m}\},$$

$$G_p=\{x\in\mathbb{R}^n:h_j(x)=0,\ j=\overline{1,l}\},$$

$$T(x_0,G_i)=\{z\in\mathbb{R}^n:a_i^Tz\leqslant 0,\ a_i\in\partial\varphi_i(x_0)\},\ i\in J(x_0),$$

$T(x_0,G_{\text{н}})=\{z\in\mathbb{R}^n:a_i^{\mathrm{T}}z\leqslant 0,\ a_i\in\partial\varphi_i(x_0),\ i\in J(x_0)\}$, если $intG_{\text{н}}\neq\emptyset$,

$T(x_0,G_{\text{н}})^*=\{a\in\mathbb{R}^n:a=\sum_i(-\lambda_i)a_i,\ \lambda_i\geqslant 0,\ a_i\in\partial\varphi_i(x_0),\ i\in J(x_0)\}$ (из [5]),

$T(x_0,\Pi)=\{z\in\mathrm{R}^n:a^{\mathrm{T}}z\geqslant 0\}$, где $a_\Pi\in T(x_0,\Pi)^*$,

$T(x_0,G_p) = \{z\in\mathbb{R}^n : \nabla h_j(x_0)^{\mathrm{T}}z=0,\ j=\overline{1,l}\}$, если $\nabla h_j(x_0)$, $j=\overline{1,l}$ линейно независимы,

$T(x_0,G_p)^*=\{a\in\mathbb{R}^n:a=\sum_{j=1}^l\mu_j\nabla h_j(x_0)\}$ (из [6]).

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(x)$ *– ВГ функция, множество* $G=\{x\in\mathbb{R}^n:\varphi(x)\leqslant 0\}$, $intG\neq\emptyset$, $\varphi(x_0)=0$.

Тогда $T(x_0,G)=\left\{z\in\mathbb{R}^n:\hat a^{\mathrm{T}}z\leqslant 0\right\}$, $\hat a=\nabla\varphi_\partial(x_0)+a,\ a\in\partial\varphi_в(x_0)$.

Доказательство. Пусть $z\in T(x_0,G)$. Тогда $x=x_0+\alpha z+o(\alpha)\in G,\ \alpha>0,\ \alpha\to 0$. $0\geqslant\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\alpha}$ и $0\geqslant\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(x_0+\alpha z+o(\alpha))}{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(x_0)+\alpha\varphi'(x_0,z)+o(\alpha)}{\alpha}=$ $=\varphi'(x_0,z)=\nabla\varphi_{\text{д}}(x_0)^{\mathrm{T}}z+\varphi'_{\text{в}}(x_0,z)\geqslant\nabla\varphi_{\text{д}}(x_0)^{\mathrm{T}}z+a^{\mathrm{T}}z=\hat a^{\mathrm{T}}z\ \forall a\in\partial\varphi_{\text{в}}(x_0)$, т.к. $\varphi'_{\text{в}}(x_0,z)\geqslant a^{\mathrm{T}}z$ (из [2]).

Обозначим $\bar T(x_0,G)=\{z\in\mathbb{R}^n:\hat a^{\mathrm{T}}z\leqslant 0\}$. Очевидно, $\bar T(x_0,G)$ – выпуклый конус. Так как $intG\neq\emptyset$, то и $int\bar T(x_0,G)\neq\emptyset$. Пусть $z\in int\bar T(x_0,G)$, тогда и $x_k=(x_0+\alpha z)\in G$ при достаточно малом $\alpha>0$. Взяв $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{x_k-x_0}{\alpha}=z$, получим, что $z\in T(x_0,G)$ и $\mathrm{int}\bar T(x_0,G)\subset T(x_0,G)$, где $int\bar T(x_0,G)=\left\{z\in\mathbb{R}^n:\hat a^Tz<0\right\}$. Поэтому замыкание $\overline{\mathrm{int}\bar T(x_0,G)}=\bar T(x_0,G)$ и $T(x_0,G)=\bar T(x_0,G)=\left\{z\in\mathbb{R}^n:\hat a^Tz\leqslant 0\right\}$, $\hat a\in T(x_0,G)^*$.

Следствие 1. Если в лемме 5 положить, что $G=\{x\in\mathbb{R}^n:\varphi(x)\geqslant 0\}$, то очевидно, что $T(x_0,G)=\left\{z\in\mathbb{R}^n:\hat a^Tz\geqslant 0\right\}$.

Лемма 6. *Пусть в задаче* 1 $\Pi = \mathbb{R}^n$, *функции* f, φ_i, $i = \overline{1,m}$ – *выпукло-гладкие,* h_j, $j = \overline{1,l}$ – *непрерывно дифференцируемые,* $x_0 \in G$, $G \neq \emptyset$.

Тогда либо $T(x_0, G) = T(x_0, G_p) \bigcap (\bigcap\limits_i T(x_0, G_i))$, $i \in J(x_0)$, *либо существуют не все равные нулю* $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in J(x_0)$, μ_j, $j = \overline{1,l}$ *такие, что* $\overline{a} = \sum_i \lambda_i \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(x_0) = 0$, $i \in J(x_0)$, *где* $\hat{a}_i \in T(x_0, G_i)^*$.

Доказательство.

1) Предположим, что $\nabla h_j(x_0)$, $j = \overline{1,l}$ – линейно зависимы. Тогда существуют не все равные нулю μ_j, $j = \overline{1,l}$, такие что $a = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(x_0) = 0$. Взяв $\lambda_i = 0$, $i \in J(x_0)$, получим доказательство леммы для этого случая.

2) Предположим, что $\mathrm{int} G_i \neq \emptyset$, $i \in J(x_0)$, но $\bigcap\limits_i intG_i = \emptyset$, $i \in J(x_0)$. Тогда по лемме 4 существуют такие λ_i, $i = \overline{1,m}$, что $\sum_i \lambda_i \hat{a}_i = 0$, $i \in J(x_0)$. Взяв $\mu_j = 0$, $j = \overline{1,l}$, получим доказательство леммы для этого случая.

3) Предположим теперь, что $\bigcap\limits_i intG_i \neq \emptyset$, $i \in J(x_0)$ и $\sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(x_0) \neq 0$, где хотя бы для одного j $\mu_j \neq 0$. Если $int\,(\bigcap_i G_i) \bigcap G_p \neq \emptyset$, $i \in J(x_0)$, то по лемме 3 и замечанию к лемме 4 $T(x_0, G) = T(x_0, G_p) \bigcap \left(\bigcap\limits_i T(x_0, G_i) \right)$, $i \in J(x_0)$, т.е. получили доказательство леммы для этого случая.

4) Пусть теперь $int\,(\bigcap_i G_i) \bigcap G_p = \emptyset$, но $int\,(\bigcap_i G_i) \neq \emptyset$ и $\sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(x_0) \neq 0$, $i \in J(x_0)$, тогда по Лемме 3 и замечанию к Лемме 4 существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_i \lambda_i \hat{a}_i \neq 0$ такие, что $a = -\sum_i \lambda_i \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(x_0) = 0$, $i \in J(x_0)$.

Лемма доказана. □

Рассмотрим условия оптимальности регулярной ВГ задачи математического программирования (МП), когда множество $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$.

Пусть $f(x) = f_{\text{в}}(x) + f_{\text{д}}(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$.

Задача: найти

$$\min\left(f_{\text{в}}(x) + f_{\text{д}}(x)\right), \; x \in G \subset \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где $f_{\text{в}}(x)$ – выпуклая на $\mathbb{R}^n$, $f_{\text{д}}(x)$ – дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть точка* $x^* \in G$ – *решение регулярной задачи МП, тогда* $\exists\, \hat{a}$ *такой, что* $\hat{a} = a + \nabla f_{\text{д}}(x_0^*) \in T(x^*, G)^*$, *где* $T(x, G)$ *и* $T(x^*, G)^*$ – *касательный и сопряженный ему конусы,* $a \in \partial f_{\text{в}}(x)$.

Доказательство. По теореме 1, если $x^* \in G$ – решение задачи, то $f'(x^*, z) \geqslant 0$ $\forall z \in T(x^*, G)$.

Т.к. $f'_{\text{в}}(x, z) = a^{\mathrm{T}} z$, где $a \in \partial f_{\text{в}}(x)$ – некоторый субградиент, $f'_{\text{д}}(x, z) = \nabla f_{\text{д}}(x)^{\mathrm{T}} z$, то $(a + \nabla f_{\text{д}}(x^*))\, z \geqslant 0$ $\forall z \in T(x^*, M)$, т.е.

$$a + \nabla f_{\text{д}}(x^*) \in T(x^*, G)^*. \tag{4}$$

Следствие 2. *Пусть задача математического программирования (МП) регулярна,* $G = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m},\ h_j(x) = 0,\ j = \overline{1,l}\right\}$. *Тогда, если* x^* – *решение задачи* 3, *то существуют такие* μ_j^*, $\lambda_i^* \geqslant 0$, *что*

$$a_0 + \nabla f_{\text{д}}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \tag{5}$$

где

$$\lambda_i^* = 0,\ i \notin J(x_0^*),\ h_j(x^*) = 0,\ j = \overline{1,l},$$

$$\lambda_i^* \geqslant 0,\ \lambda_i\varphi_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1,m};\ h_j(x^*) = 0,\ j = \overline{1,l}.$$

Доказательство. По лемме 6

$$T(x,G) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \hat{a}_i z \leqslant 0,\ i \in J(x_0); \nabla h_j(x^*)^{\mathrm{T}} z = 0,\ j = \overline{1,l}\right\} \tag{6}$$

и $T(x,G)^* = \left\{d \in \mathrm{R}^n : d = -\sum_{i=1}^m \lambda_i \hat{a}_i + \sum_{j=1}^l \mu_j \nabla h_j(x),\ \mu_j \in \mathrm{R}^1,\ i = \overline{1,l}\right\}$.

Теперь из включения 4 и 6 получаем утверждение 5. □

Следствие 3. *Пусть задача безусловной минимизации (БМ) – выпукло-гладкая. Если точка $x^* \in \mathbb{R}^n$ – ее решение, то существует $a \in \partial f_в(x^*)$ такой, что $a + \nabla f_\partial(x^*) = 0$.* □

Утверждение следует из теоремы 2, т.к. в задаче безусловной минимизации (БМ) $T(x^*, \mathbb{R}^n)^* = 0$.

Лемма 7 (из [5]). *Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$– выпуклое множество. Тогда $\Pi = \Pi_1 \bigcap \Pi_2$, где $\Pi_1 = (\Pi + (LinP)^*)\,; \Pi_2 = Aff\Pi$; $int\,(\Pi + (LinP)^*) = ri\Pi + ri(LinP)^*$, где $Aff\Pi$ – аффинная оболочка множества $\Pi, Lin\Pi$ и $(Lin\Pi)^*$ – линейное подпространство, параллельное Π и сопряженное к нему (ортогональное дополнение) подпространство.* □

Геометрический смысл множества Π_1 : Π_1 – это цилиндр, сечением которого является множество Π, а образующими – подпространство $(Lin\Pi)^*$.

Рассмотрим теперь свойства конуса $T(x_0, G)$ для ВГ задачи ОМП (1).

Теорема 3. *Пусть задача ОМП 1 – выпукло-гладкая, $x_0 \in G,\ G \neq \emptyset,\ h_j,\ j = \overline{1,l}$ – непрерывно дифференцируемые функции, множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое и замкнутое. Тогда, либо $T(x_0, G) = T(x_0, \Pi) \bigcap T(x_0, G_p) \bigcap \left(\bigcap\limits_i T(x_0, G_i)\right), i \in J(x_0)$, либо существуют не все равные нулю a_Π, $\lambda_i \geqslant 0,\ i \in J(x_0),\ \mu_j,\ j = \overline{1,l}$ такие, что $\overline{a} = a_\Pi - \sum_i \lambda_i \hat{a}_i + \sum_{j=1}^l \mu_j \nabla h_j(x_0) = 0,\ i \in J(x_0),\ \hat{a}_i \in T(x_0, G_i)^*$.*

Доказательство. Если множество аффинное, то его всегда можно представить в виде $Ax = b,\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^s,\ A \in \mathbb{R}^{s \cdot n}$ (из [4]), т.е. $\Pi_2 = Aff\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ b \in \mathbb{R}^s\}$.

Тогда задачу 1 можно представить в виде:

найти $\min f(x),\ x \in G \subset \mathbb{R}^n$, где $G = \overline{G_p} \bigcap \overline{G}_н$,

$$\overline{G_p} = \Pi_2 \bigcap G_p = \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) = 0,\ j = \overline{1,l}; Ax = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{h_j}(x) = 0,\ j = \overline{1,l+s}\}, \tag{7}$$

$$\overline{G_н} = \Pi_1 \bigcap \left(\bigcap_i G_i\right),\ i \in J(x_0).$$

Таким образом, в этом случае задача ОМП 1 сведена к задаче МП, рассматриваемой в лемме 6, в которой вместо множества G_p надо поставить $\overline{G_p}$, а вместо множества $G_i,\ i \in J(x_0)$ – множества Π_1 и те же $G_i,\ i \in J(x_0)$, пересечение которых есть $\overline{G_н}$.

Теперь, применяя к задаче ОМП 1 Лемму 6, в регулярном случае получим

$$T(x_0, G) = T(x_0, \Pi_1) \bigcap T(x_0, \Pi_2) \bigcap \left(\bigcap_i T(x_0, G_i)\right),\ i \in J(x_0).$$

Так как Π_1, Π_2 и $\Pi = \Pi_1 \bigcap \Pi_2$ – выпуклые множества, $int\Pi_1 \bigcap ri\Pi_2 \neq \emptyset$, то ([5], стр. 105)

$$T(x_0, \Pi) = T(x_0, \Pi_1) \bigcap T(x_0, \Pi_2)$$

и

$$T(x_0, G) = T(x_0, \Pi) \bigcap T(x_0, G_p) \bigcap \left(\bigcap_i T(x_0, G_i)\right),\ i \in J(x_0). \tag{8}$$

В нерегулярном случае, учитывая в лемме 6 п. 4 конус $T(x_0, \Pi)$, для которого существует $a_\Pi \in T(x_0, \Pi)^*$, получим, что существуют не все равные нулю элементы сопряженных конусов, такие, что $\overline{a} = a_\Pi - \sum_i \lambda_i \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(x_0) = 0,\ i \in J(x_0),\ \hat{a}_i \in T(x_0, G_i)^*$. $\square$

Замечание 3.

Если ограничение $\varphi_i,\ i \notin J(x_0)$ неактивно, то $\varphi_i(x_0) < 0$ и x_0 – внутренняя точка множества $G_i,\ i \notin J(x_0)$. Следовательно, $T(x_0, G_i) = \mathbb{R}^n$ и $T(x_0, G_i)^* = 0,\ \lambda_i = 0,\ i \notin J(x_0)$. Тогда в теореме 2 вместо $\sum_i \lambda_i \hat{a}_i,\ i \in J(x_0)$, можно поставить $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \hat{a}_i$.

Теорема 4. *Пусть в ВГ задаче ОМП функции $h_j(x),\ j = \overline{1,l}$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^* \in G$, множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – выпукло и замкнуто. Тогда, если x^* – решение задачи 1, то существуют не все равные нулю числа $\lambda_i^* \geqslant 0,\ i = \overline{0,m}$, числа $\mu_j^*,\ j = \overline{1,l}$ и векторы $\hat{a}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{0,m}$ такие, что*

$$\left(\lambda_0^* \hat{a} + \sum_{i \in J(x^*)} \lambda_i^* \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla h_j(x^*)\right)^{\mathrm{T}} (x - x^*) \geqslant 0\ \forall x \in \Pi \subset \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

$$\lambda_i^* \geqslant 0,\ \lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Доказательство. По теореме 2 необходимое условие экстремума для задачи 1 имеет вид

$$\hat{a} = a + \nabla f_{\text{д}}(x^*) \in T(x^*, G).$$

Если задача регулярна, тогда, используя теорему 2, запишем при $\lambda_0^* = 1$ $\hat{a} = \lambda_0^* \hat{a} = a_\Pi - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla h(x^*)$, где $\lambda_i^* = 0,\ i \notin J(x^*)$.

Если задача нерегулярна, то $a_\Pi - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = \lambda_0^* \hat{a} = 0$ при $\lambda_0^* = 0$.

Представим

$$a_\Pi = \lambda_0^* \hat{a} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) \tag{10}$$

для регулярного и нерегулярного случая.

Для выпуклого множества $\Pi : a_\Pi^{\mathrm{T}}(x - x^*) \geqslant 0\ \forall x \in \Pi$ (из [4]).

Подставляя в неравенство значение a_Π, получим

$$\left(\lambda_0^* \hat{a} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla h_j(x^*)\right)^{\mathrm{T}} (x - x^*) \geqslant 0\ \forall x \in \Pi. \tag{11}$$

Так как числа $\mu_j,\ j = \overline{1,l}$, не ограничены по знаку, то числа μ_j^* в (10) равны $(-\mu_j^*)$ в (11), но для упрощения записи их обозначения оставлены без изменения.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 4. Выпукло-гладкая задача ОМП является наиболее общей задачей, рассматриваемой в настоящей работе.

а) Если задача МП – выпукло-гладкая ($\Pi = \mathrm{R}^n$), то условие (9) будет иметь вид

$$\lambda_0^* \hat{a} + \sum_{i \in J(x^*)} \lambda_i^* \hat{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \tag{12}$$

$$\lambda_i^* \geqslant 0,\ \lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

б) Если задача (1) выпукло-гладкая ($\Pi = \mathrm{R}^n$), ограничения $\varphi_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m}$ отсутствуют, то условие (12) будет иметь вид

$$\lambda_0 \hat{a} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,\ \lambda_0 \geqslant 0. \tag{13}$$

Приведем примеры решения ВГ задач, используя НУО (13) и (12).

Задача 1. Найти $\min(|x|+|y|-x^2-2y^2)$, если $x^2+2y^2=4$.

Квазиградиент целевой функции:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha - 2x \\ \beta - 4y \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in [-1,1] : \alpha = 1$, если $x > 0$; $\alpha = -1$, если $x < 0$;
$\beta \in [-1,1] : \beta = 1$, если $y > 0$; $\beta = -1$, если $y < 0$.

Задачу будем считать регулярной, тогда условие (12):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha - 2x \\ \beta - 4y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы получим
$\frac{-2x+\alpha}{-4y+\beta} = \frac{x}{2y}$ и $2\alpha y = \beta x$; $|y| = \left|\frac{\beta}{2\alpha}\right| \cdot |x|$.

а) Пусть $|\alpha| = |\beta| = 1$. Тогда $|y| = \frac{|x|}{2}$, $x^2 = \frac{8}{3}$, $y^2 = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{2x-\alpha}{2x} = 1 - \frac{\alpha}{2x} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \simeq 0,694$.

Имеем 4 стационарных точки:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

В этих точках функция Лагранжа дважды дифференцируемая, и $f^* = -1,552$.

$$L''_{xy} = \begin{pmatrix} 2(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 4(\lambda - 1) \end{pmatrix}$$

и при $\lambda < 1$ матрица L''_{xy}– отрицательно определена. Значит, указанные 4 стационарных точки – это точки максимума.

б) Пусть теперь $x = 0$ и $|y| = \sqrt{2}$. Касательный конус в этих точках $T(0,\sqrt{2}) = \left\{z \in \mathrm{R}^2 : z_2 = 0\right\}$. Квазиградиент в этих точках:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - 4y \end{pmatrix}.$$

Применим теперь достаточное условие острого минимума.

Теорема 5 (из [5]). *Пусть f – функция, определенная на множестве G; существует ненулевой касательный конус в точке $x^* \in G$ и непрерывная по $z \in T(x^*,G)$, $\|z\| = 1$ производная по касательному направлению $f'_T(x^*,z)$. Тогда x^* – точка острого (строгого) локального минимума функции $f(x)$ в том и только в том случае, если $f'_T(x^*,z) > 0$.* □

Производная по направлению $f'(x,y,z) = \hat{a}^{\mathrm{T}}z$, $\hat{a}^{\mathrm{T}}z = \alpha z_1$, $|z_1| = 1$. Направлений два: $z_1 = -1$, $z_1 = 1$.

$\hat{a}^{\mathrm{T}}z = \alpha z_1 = 1 > 0$, т.к. при $z_1 = -1$ $\alpha = -1$; при $z_1 = 1$ $\alpha = 1$.

Т.к. $\hat{a}^{\mathrm{T}}z > 0$, то по теореме 5 точки $x = 0$, $y = \pm\sqrt{2}$ – точки локального острого минимума,

$$f^* = \sqrt{2} - 4 \simeq -2,586.$$

в) Пусть теперь $y = 0$, $|x| = 2$.

Касательный конус в этих точках $T(|x| = 2; 0) = \left\{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 = 0\right\}$.

Квазиградиент в этих точках $\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha - 2x \\ \beta \end{pmatrix}$ и $\hat{a}^{\mathrm{T}}z = \beta z_2$, $|z_2| = 1$. $\hat{a}^{\mathrm{T}}z = \beta z_2 = 1 > 0$, т.к. при $z_2 = -1$, $\beta = -1$; при $z_2 = 1$, $\beta = 1$; таким образом, точки $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$ – точки локального острого минимума. $f^* = 2 - 4 = -2$.

Задача 2. Найти $\min(x^2+2y^2)$, если $|x|+|y|-x^2-2y^2 \leqslant -4$.

Квазиградиент функции ограничения-неравенства $\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha - 2x \\ \beta - 4y \end{pmatrix}$, тот же, что и в задаче 1 для целевой функции.

Задачу будем считать регулярной; ограничение-неравенство активно, тогда условие (12):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha - 2x \\ \beta - 4y \end{pmatrix} = 0, \\ |x|+|y|-x^2-2y^2+4=0. \end{cases}$$

Из этого уравнения, как и в задаче 1, следует, что $\frac{\alpha-2x}{\beta-4y} = \frac{x}{2y}$ и $2\alpha y = \beta x$; $|y| = \left|\frac{\beta}{2\alpha}\right| \cdot |x|$.

а) Пусть $|\alpha| = |\beta| = 1$, $|y| = \frac{|x|}{2}$; $x^2 - |x| - \frac{8}{3} = 0 \to |x| = 2,208$, $|y| = 1,104$.

В этих точках функция $|x|+|y|-x^2-2y^2+4$ дифференцируемая, $\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha - 2x \\ \beta - 4y \end{pmatrix}$, где $\alpha = \pm 1$ и $\beta = \pm 1$.

$$L''_{xy} = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 4(1-\lambda) \end{pmatrix};\ \lambda = \frac{2x}{2x-\alpha} = 1,293 > 0.$$

Так как $L'' < 0$ и $\lambda > 0$, то точки $\begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$ не могут быть точками максимума или минимума. В этих точках значение целевой функции $f = 7,31$.

б) Пусть $x = 0$. Тогда $|y| - 2y^2 + 4 = 0$ и $|y| = 1,686$, $\lambda = \frac{4y}{4y-\beta} > 0$. В этих точках касательный конус $T = \{z : \hat{a}^{\mathrm{T}} z \leqslant 0\}$, где $\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha - 2x \\ \beta - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - 4y \end{pmatrix}$. Пусть $y = 1,686$, $\beta = 1$, $\hat{a} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ -5,744 \end{Bmatrix}$, $\alpha \in [-1,1]$ и $\hat{a}^{\mathrm{T}} z = \alpha z_1 - 5,744 z_2 \leqslant 0$.

Значит, $T = \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 - 5,744 z_2 \leqslant 0;\ z_1 + 5,744 z_2 \geqslant 0\}$ – выпуклый конус.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6,744 \end{pmatrix};\ |z| = 1,\ z^1 = \begin{pmatrix} 0,172 \\ 0,985 \end{pmatrix},\ z^2 = \begin{pmatrix} 0,172 \\ -0,985 \end{pmatrix},$$

где z^1 и z^2 – граничные лучи конуса (угла).

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4y \end{pmatrix};\ f'(0,y,z) = 6,744 z_1 = 6,744 \cdot 0,985 \equiv 6,64 > 0.$$

По теореме 5 $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1,686 \end{pmatrix}$ – точки острого локального минимума.

$$f^* = 2y^2 = 5,685$$

в) Пусть $|y| = 0$, тогда $|x| - x^2 + 4 = 0$ и $|x| = 2,562$, $\lambda = \frac{2x}{2x-\alpha} = 1,242 > 0$.

Касательный конус $T = \{z : \hat{a} z \leqslant 0\}$, где $\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha - 2x \\ \beta - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 4,124 \\ \beta \end{pmatrix}$ и $\hat{a}^{\mathrm{T}} z = -4,124 z_1 + \beta z_2 \leqslant 0$.

Для значений $\beta = \pm 1$ $T = \{z : -4,124 z_1 + z_2 \leqslant 0;\ 4,124 z_1 + z_2 \geqslant 0\}$ – выпуклый конус.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,124 \\ 0 \end{pmatrix};\ \nabla f(x,y)^{\mathrm{T}} z = 2x \cdot z_1 = 5,124 z_1;$$

$$\|z\| = 1,\ z^1 = \begin{pmatrix} 0,235 \\ 0,972 \end{pmatrix},\ z^2 = \begin{pmatrix} 0,235 \\ -0,972 \end{pmatrix},\ \nabla f(x,y)^{\mathrm{T}} z = 5,124 \cdot 0,235 = 1,204 > 0.$$

Таким образом, $\begin{pmatrix} |x| \\ 0 \end{pmatrix}$ – точки острого локального минимума, $f^* = 2,562^2 \simeq 6,56$.

Заключение

Отметим основные результаты, полученные в статье:

– Предложено определение выпукло-гладких функций, которые представляют собой сумму выпуклой недифференцируемой функции и гладкой (дифференцируемой) функции.

– Предложено определение выпукло-гладких (ВГ) задач математического программирования, в которых функции f, φ_i, $i = \overline{1,m}$, $h_j, j = \overline{1,l}$ – выпукло-гладкие. Выпуклые и гладкие задачи ОМП являются частными случаями предложенного класса ЭЗ.

– Используя свойства выпуклых касательных конусов и производных функций по касательному направлению, доказано необходимое условие оптимальности (9) для ВГ задачи ОМП.

Литература

1. *Галяев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Издательство МГУ, 1989.
2. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2008.
3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
4. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть 1. М: МФТИ, 2014.
5. *Бирюков А.Г.* Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах. М.: МФТИ, 2010.
6. *Измаилов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2003.
7. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

References

1. *Galyaev E.M., Tikhomirov V.M.* Course in the theory of extremal problems. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1989. (in Russian).
2. *Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V.* Course of optimization methods. Moscow: Fizmatlit, 2008. (in Russian).
3. *Polyak B.T.* Introduction to optimization. Moscow: Nauka, 1983. (in Russian).
4. *Zhadan V.G.* Optimization methods. Part 1. Moscow: MIPT, 2014. (in Russian).
5. *Biryukov A.G.* Optimization methods. Optimality conditions for extremal problems. Moscow: MIPT, 2010. (in Russian).
6. *Izmailov A.F., Soldatov M.V.* Numerical optimization methods. Moscow: Fizmatlit, 2003. (in Russian).
7. *Pshenichny B.N.* Convex analysis and extremal problems. Moscow: Nauka, 1980. (in Russian).

Поступила в редакцию 13.06.2018