УДК 519.174.7

Л. И. Боголюбский[1], *А. М. Райгородский*[1,2,3]

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[3]Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

Об измеримом хроматическом числе пространства растущей размерности

Работа посвящена классической проблеме Нелсона–Эрдёша–Хадвигера о раскраске евклидова пространства. Точнее, рассматривается задача об измеримом хроматическом числе пространства для случая растущей размерности. Изучена ситуация, сложившаяся с нижними оценками этой величины после публикации некоторых недавних исследований.

Ключевые слова: хроматическое число пространства, измеримое хроматическое число, проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера, дистанционный граф, число независимости.

L. I. Bogolubsky[1], *A. M. Raigorodskii*[1,2,3]

[1]Lomonosov Moscow State University
[2]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
[3]Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, Ulan-Ude

On the measurable chromatic number of a space of growing dimension

This paper is devoted to the classical Nelson–Erdős–Hadwiger problem of the Euclidean space coloring. Namely, we discuss the problem of finding the measurable chromatic number of the space in the case of growing dimension. We study the situation with the lower bounds of this value in the context of some recent researches.

Key words: chromatic number of a space, measurable chromatic number, Nelson–Erdős–Hadwiger problem, distance graph, independence number.

1. Введение

В 1950 году Нелсон (см. [1]) поставил задачу об отыскании так называемого *хроматического числа пространства*, т.е. величины

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \ \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_\chi \ \ \forall\, i \ \ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1\}.$$

Иными словами, хроматическое число пространства — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все точки в $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Сейчас задача о хроматическом числе — одна из центральных в комбинаторной геометрии (см. [2] – [6]). В то же время исключительно важную роль играет вариант задачи, в рамках которого рассматриваются только раскраски измеримыми по Лебегу цветами (множества $V_1, \ldots, V_\chi$ измеримы). В этом случае искомая величина обозначается $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ и называется *измеримым хроматическим числом пространства*. Неизвестно, верно ли, что $\chi(\mathbb{R}^n) \neq \chi_m(\mathbb{R}^n)$. Однако нижние оценки этих величин сильно разнятся. Например, мы знаем, что

$$(1.239\ldots + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n$$

(нижняя оценка получена в [7], а верхняя — в [8]), а недавно было показано (см. [9]), что

$$(1.268\ldots + o(1))^n \leqslant \chi_m(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n.$$

Но, возможно, это лишь временное явление?

В следующем разделе мы опишем методы получения обеих нижних оценок. В разделе 3 мы сперва напомним результат работы [10] о том, что в рамках метода, дающего оценку обычного хроматического числа, есть шанс получить неравенства

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.30\ldots + o(1))^n,$$

коль скоро будет доказана некоторая естественная гипотеза. Затем мы покажем, что с помощью метода, применяемого для оценки измеримого хроматического числа, при нынешнем арсенале знаний, включающем в себя и «естественную гипотезу», напротив, нельзя получить лучшей оценки, нежели

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.28\ldots + o(1))^n.$$

Таким образом, получится, что если упомянутая гипотеза верна, то у нас нет, на самом деле, никаких нетривиальных асимптотических оценок для измеримых хроматических чисел. Заметим, что в малых размерностях ситуация иная (см. [11]).

2. Методы получения нижних оценок хроматических чисел

Назовем граф $G = (V, E)$ *дистанционным*, если $V \subset \mathbb{R}^n$, а

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}$$

при некотором $a > 0$. Понятно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G)$ для любого дистанционного графа G. Здесь $\chi(G)$ — обычное *хроматическое число графа*, т.е. минимальное число цветов, в которые можно так покрасить вершины графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

Оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n$ получена следующим образом. Рассмотрим для каждого n некоторые неотрицательные целые числа k_{-1}, k_0, k_1, в сумме дающие n, и некоторое положительное вещественное число t. Пусть $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ — граф, вершины которого — это все возможные $(-1, 0, 1)$-векторы в $\mathbb{R}^n$, имеющие по k_{-1}, k_0 и k_1 отрицательных, нулевых и положительных координат соответственно, а ребра — пары вершин, отстоящих друг от друга на расстояние t. Разумеется, мы получаем неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \max_{k_{-1}, k_0, k_1, t} \chi(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)).$$

В свою очередь, хроматическое число любого графа G не меньше, чем отношение числа его вершин к его *числу независимости*, которое обозначается $\alpha(G)$ и представляет собой максимальное количество вершин графа, попарно не соединенных ребрами, т.е. максимальный размер множества, которое можно покрасить в один цвет. Естественно, возникает оценка

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \max_{k_{-1}, k_0, k_1, t} \frac{|V(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t))|}{\alpha(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t))},$$

и никаких иных оценок в этом месте применять не научились.

Теперь нужно оценить число независимости *сверху*. В настоящее время это удается сделать отнюдь не для любых наборов параметров k_{-1}, k_0, k_1, t. А именно, предполагается, что $k_{-1} \leqslant k_1$, $k_{-1} + k_1 \leqslant \frac{n}{2}$ (это суть технические ограничения) и, главное, что расстояние t отвечает скалярному произведению s, которое отличается от скалярного квадрата $k_{-1} + k_1$ любого вектора из множества вершин $V(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t))$ на величину некоторого *простого* числа p (см. [12], [13], [14]). Итоговая оценка имеет некоторый вид

$$\alpha(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)) \leqslant g(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)),$$

где вид функции g (довольно громоздкой) для наших нынешних целей значения не имеет, но при этом важно, что оценка верна лишь для наборов (k_{-1}, k_0, k_1, t) из некоторого множества $\mathcal{A}(n)$. Таким образом,

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \max_{(k_{-1},k_0,k_1,t)\in\mathcal{A}(n)} \frac{|V(G(n,k_{-1},k_0,k_1,t))|}{g(G(n,k_{-1},k_0,k_1,t))},$$

и ничего лучшего не известно. Процедура максимизации подробно описана в книге [13], и она дает в аккурат оценку $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n$. Заметим, что оптимальные значения величин k_{-1}, k_1, s (s, напомним, — это скалярное произведение) асимптотически по $n \to \infty$ равны

$$k'_{-1}n, \quad k'_1 n, \quad \frac{k'_{-1} - k'_1}{2}n,$$

где $k'_{-1} = 0.06\ldots$, $k'_1 = 0.3\ldots$

Теперь скажем несколько слов об оценке $\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.268\ldots + o(1))^n$. Она основана на решении некоторой оптимизационной задачи, которая также связана с дистанционными графами и точную постановку которой можно найти в [9]. В той же статье [9] доказана следующая теорема, в которой, по сути, найдено одно из решений упомянутой только что оптимизационной задачи.

Теорема 1. *Пусть дана последовательность дистанционных графов $G_n = (V_n, E_n) \subset \mathbb{R}^n$, отнормированных так, чтобы длина каждого ребра в них была равна 1. Пусть для некоторого $b < \sqrt{2/e}$ выполнено*

$$\frac{\alpha(G_n)}{|V_n|} \leqslant (b + o(1))^n. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, вершины каждого графа G_n лежат на сфере радиуса $r \geqslant 1/2$ (радиус от n не зависит). Для каждого r положим

$$c(r) = \left(1 + \sqrt{1-r^2}\right) e^{-\sqrt{1-r^2}}, \quad f(r) = \sqrt{2c(r)/e}.$$

Тогда

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant \left(\frac{1}{f(r)} + o(1)\right)^n.$$

В работе [9] в качестве G_n взяты знакомые нам графы $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$, отнормированные согласно условию теоремы 1. Это неудивительно, ведь нужны графы, удовлетворяющие условию (1), а оно выполнено для многих наборов параметров из $\mathcal{A}(n)$, поскольку

$$\frac{1}{b} = \sqrt{\frac{e}{2}} = 1.165\ldots < 1.239\ldots$$

При этом мы по-прежнему, конечно, смотрим не на дробь $\alpha/|V|$, но лишь на доступную нам ее оценку $g/|V|$. В результате оказывается, что теперь оптимальны значения величин k_{-1}, k_1, s, асимптотически по $n \to \infty$ равные

$$k'_{-1}n, \quad k'_1 n, \quad \frac{k'_{-1} - k'_1}{2}n,$$

где $k'_{-1} = 0.2\ldots$, $k'_1 = 0.22\ldots$ С учетом несложной формулы

$$r = \sqrt{\frac{(k'_1 + k'_{-1}) - (k'_1 - k'_{-1})^2}{k'_1 + 3k'_{-1}}}$$

и теоремы 1 как раз и выходит, что $\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.268\ldots + o(1))^n$.

В следующем разделе мы поговорим о том, как изменятся оценки обычных и измеримых хроматических чисел, если мы продолжим применять описанные методы, но функцию g, служащую вынужденной верхней оценкой чисел независимости графов $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$, заменим на реальные значения этих чисел.

3. Старая гипотеза и новые оценки

В работе [10] было введено понятие *строгой d-частной конструкции.* А именно, пусть даны положительные целые числа $l_1, \ldots, l_d$, сумма которых равна n, и тройки чисел $l_{i,-1}, l_{i,0}, l_{i,1}$ с суммой l_i, $i = 1, \ldots, d$. Совокупность $\mathcal{F}$, состоящая из $(-1, 0, 1)$-векторов, является строгой d-частной конструкцией, если существует такое разбиение множества всех координатных позиций на части размеров $l_1, \ldots, l_d$, что каждый из векторов совокупности $\mathcal{F}$ имеет ровно $l_{i,\nu}$ координат величины $\nu = -1, 0, 1$ в части с номером i, $i = 1, \ldots, d$. Разумеется, если, как и в разделе 2, каждый вектор из $\mathcal{F}$ имеет k_{-1} отрицательных и k_1 положительных координат, то

$$\sum_{i=1}^{d} l_{i,-1} = k_{-1}, \quad \sum_{i=1}^{d} l_{i,1} = k_1.$$

Пусть теперь, как и в оптимальных ситуациях, описанных в разделе 2,

$$k_{-1} \sim k'_{-1}n, \quad k_1 \sim k'_1 n, \quad s \sim s'n, \quad 0 < k'_{-1} \leqslant k'_1, \quad k'_{-1} + k'_1 \leqslant \frac{1}{2}, \quad s' \in \left[-2k'_{-1}, \frac{k'_1 - k'_{-1}}{2}\right]. \tag{2}$$

В работе [10] сформулирована и мотивирована следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Пусть последовательность графов $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ подчиняется условиям* (2) (*здесь t — расстояние, отвечающее скалярному произведению s*). *Тогда*

$$\alpha(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)) = (c(k'_{-1}, k'_1, s') + o(1))^n, \quad c(k'_{-1}, k'_1, s') > 1,$$

причем существует такая d-частная конструкция $\mathcal{F}$, что в ней всегда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > s$ и

$$|\mathcal{F}| = (c(k'_{-1}, k'_1, s') + o(1))^n.$$

В той же работе [10] доказано, что если гипотеза верна, то $d \leqslant 3$. Это позволяет проводить оптимизацию как при отыскании нижней оценки обычного хроматического числа, так и при отыскании аналогичной оценки измеримого хроматического числа. В первом случае оптимизация проведена в работе [10], и там показано, что при

$$k'_{-1} = 0.145\ldots, \quad k'_1 = 0.355\ldots, \quad s' = \frac{k'_1 - k'_{-1}}{2}$$

выполнено

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)) \geqslant (1.30\ldots + o(1))^n.$$

Нам удалось провести оптимизацию во втором случае. А именно, мы заменили в неравенстве (1) оценку числа независимости функцией g (см. раздел 2) на значение числа независимости, вычисляемое за счет гипотезы 1 и теоремы о том, что в этой гипотезе достаточно брать $d \leqslant 3$. В итоге нами установлен следующий факт.

Утверждение 1. *Если верна гипотеза* 1 *и мы применяем технику из теоремы* 1, *то*

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.28\ldots + o(1))^n.$$

Константа $1.28\ldots$ получена при

$$k'_{-1} = 0.25\ldots, \quad k'_1 = 0.25\ldots, \quad s' = -0.05585\ldots$$

Иными словами, получается, что тривиальная оценка $\chi_m \geqslant \chi$ окажется сильнее оценки из теоремы 1, коль скоро верна гипотеза 1. Мы предполагаем, что это связано не с тем, что, на самом деле, гипотеза ошибочна, а с тем, что, по-видимому, метод из теоремы 1 подлежит усилению.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 15-01-03530 и гранта НШ-2964.2014.1 поддержки ведущих научных школ.

Литература

1. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.
2. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. 2001. Т. 56, вып. 1. С. 107-146.
3. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer. 2013. P. 429–460.
4. *Raigorodskii A.M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. 2014. AMS. Contemporary Mathematics. 625. P. 93–109.
5. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. Springer, 2005.
6. *Székely L.A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // J. Bolyai Math. Soc. 2002. 11. P. 649–666.
7. *Райгородский А.М.* О хроматическом числе пространства // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55, № 2. С. 147–148.
8. *Larman D.G., Rogers C.A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. 19. P. 1–24.
9. *Bachoc Ch., Passuello A., Thiery A.* The density of sets avoiding distance 1 in Euclidean space // arXiv:1401.6140.
10. *Райгородский А.М., Харламова А.А.* О совокупностях (–1, 0, 1)-векторов с запретами на величины попарных скалярных произведений // Труды по векторному и тензорному анализу. 2013. Т. 29, С. 130–146.
11. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Об измеримом хроматическом числе пространства размерности $n \leqslant 24$ // Доклады РАН. 2015.
12. *Frankl P., Wilson R.M.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. 1. P. 357–368.
13. *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО. 2-е изд., 2015.
14. *Пономаренко Е.И., Райгородский А.М.* Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов // Матем. заметки. 2014. 96, № 1. С. 138–147.

References

1. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.
2. *Raigorodskii A.M.* Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces. Russian Mathematical Surveys. 2001. V. 56, I. 1. P. 103–139.
3. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters. Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer. 2013. P. 429–460.
4. *Raigorodskii A.M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters. Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. 2014. AMS. Contemporary Mathematics. 625. P. 93–109.
5. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. Springer, 2005.
6. *Székely L.A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems. J. Bolyai Math. Soc. 2002. 11. P. 649–666.
7. *Raigorodskii A.M.* On the chromatic number of a space.Russian Mathematical Surveys. 2000. V. 55, N 2. P. 351–352.

8. *Larman D.G., Rogers C.A.* The realization of distances within sets in Euclidean space. Mathematika. 1972. 19. P. 1–24.

9. *Bachoc Ch., Passuello A., Thiery A.* The density of sets avoiding distance 1 in Euclidean space. arXiv:1401.6140.

10. *Raigorodskii A.M., Kharlamova A.A.* On the families of (–1, 0, 1)-vectors with banned pairwise scalar products. Proceedings on the vector and tensor analysis. 2013. V. 29, P. 130–146.

11. *Bogolubsky L.I., Raigorodskii A.M.* On the measurable chromatic number of the space of dimension $n \leqslant 24$. Doklady Math. 2015.

12. *Frankl P., Wilson R.M.* Intersection theorems with geometric consequences. Combinatorica. 1981. 1. P. 357–368.

13. *Raigorodskii A.M.* Linear algebraic method in combinatorics. M.: Moscow Center of Continuous Mathematical Education, second ed., 2015.

14. *Ponomarenko E.I., Raigorodskii A.M.* New upper bounds for the independence numbers of graphs with vertices in $\{-1, 0, 1\}^n$ and their applications to problems of the chromatic numbers of distance graphs. Mathematical Notes. 2014. V. 96, N 1–2. P. 140–148.

Поступила в редакцию 31.07.2015.