

УДК 519.216.5

В. С. Спивак, А. Г. Тартаковский, Н. Р. Беренков

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Численное сравнение алгоритмов инициализации следов объектов

Алгоритмы обнаружения разладки могут быть использованы в большинстве задач инициализации следов объектов. Раньше, когда вычислительная сложность была проблемой, свою популярность завоевал алгоритм K/N благодаря вычислительной легкости. Существенно более эффективный алгоритм инициализации следов может быть построен на основе метода последовательного обнаружения разладки. В данной статье мы рассматриваем алгоритм движущегося среднего. Мы сравниваем характеристики алгоритмов K/N и движущегося среднего. Критерием оптимальности является максимизация вероятности правильного обнаружения в определенном временном интервале при заданном уровне риска ложной тревоги, измеряемом как локальная вероятность ложной тревоги. Для рассматриваемых рабочих характеристик мы получаем теоретическую оценку и оценку методом Монте-Карло. Результаты показывают, что предложенный алгоритм движущегося среднего демонстрирует рабочие характеристики значительно лучшие, чем алгоритм K/N .

Ключевые слова: последовательное обнаружение разладки, вероятность правильного обнаружения, локальная вероятность ложной тревоги, алгоритм K/N , алгоритм движущегося среднего.

V. S. Spivak, A. G. Tartakovsky, N. R. Berenkov

Moscow Institute of Physics and Technology

Numerical comparison of objects' tracks initiation algorithms

In many problems of the initialization of objects' tracks, changepoint detection algorithms can be used. In the past when computational complexity was an issue, the K/N algorithm gained its popularity due to computational simplicity. A substantially more efficient track initiation algorithm can be built based on the sequential change detection technique. In this paper, we consider the Finite Moving Average algorithm. We compare the performance of the K/N algorithm with the Finite Moving Average algorithm. The optimality criterion is to maximize a probability of correct detection in a certain time interval under the given false alarm risk measured as a local probability of a false alarm. For performance, we obtain a theoretical estimate and an estimate by Monte Carlo simulations. The results show that the Finite Moving Average algorithm performs significantly better than the K/N procedure.

Key words: sequential changepoint detection, probability of correct detection, local probability of false alarm, K/N algorithm, finite moving average algorithm.

1. Введение

Задача инициализации следов объектов с целью дальнейшего сопровождения может быть рассмотрена как задача последовательного обнаружения разладки, т. е. обнаружения изменения в наблюдаемом сигнале [1]: интересующий нас объект появляется в неизвестный момент времени, таким образом изменяя свойства наблюдаемого сигнала (процесса). В большинстве задач инициализации следов объектов цель — обнаружить след в определенном временном интервале после появления следа объекта. Таким образом, в качестве оптимального критерия мы выбрали максимизацию минимальной вероятности правильного обнаружения в определенном временном интервале (окне) при ограниченном уровне частоты ложных тревог (срабатываний).

Самым популярным алгоритмом инициализации следов объектов является так называемый алгоритм K/N [2], [3]. Этот алгоритм завоевал свою популярность благодаря своей вычислительной простоте. Во времена, когда вычислительная техника была плохо развита, более сложные алгоритмы не могли быть применимы на практике. Однако, благодаря техническому прогрессу в вычислительной технике, проблема поиска более эффективного алгоритма обнаружения для задачи инициализации следов объектов вновь актуальна и практически важна. К примерам подобных задач относятся инициализация треков спутников, подводных лодок, баллистических ракет и т. д.

В данной работе мы предлагаем в качестве эффективного алгоритма обнаружения алгоритм движущегося среднего (далее FMA — Finite Moving Average). В разделе 2 приведена постановка задачи в терминах последовательного обнаружения разладки. В разделе 3 рассматриваются алгоритмы инициализации следов. Здесь приводятся полученные формулы для теоретических оценок рабочих характеристик: в 3.1 для алгоритма K/N , в 3.2 для алгоритма FMA. В разделе 4 представлены результаты симуляций Монте-Карло. Результаты показывают, что алгоритм FMA демонстрирует значительно лучшие рабочие характеристики по сравнению с алгоритмом K/N . Это позволяет нам рекомендовать использовать процедуру FMA на практике для инициализации следов объектов. В разделе 5 представлены выводы по проделанной работе.

2. Постановка задачи

Пусть наблюдаемый процесс $\{X_n\}$ задается распределением P_∞ . Будем считать, что в неизвестный момент времени ν ($\nu = \{0, 1, 2, \dots\}$) появляется след от интересующего нас объекта. Тогда, после появления следа, наблюдаемый процесс $\{X_n\}$ задается распределением P_0 . Пусть $p_j(\mathbf{X}^n)$, $j = \infty, 0$ — плотность распределения P_j^n , где $\mathbf{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка размера n . Для фиксированного момента разладки ν вероятностное распределение P_ν с плотностью $p_\nu(\mathbf{X}^n) = p(\mathbf{X}^n|\nu)$ — является комбинацией до и после изменения плотностей:

$$\begin{aligned} p_\nu(\mathbf{X}^n) &= p_\infty(\mathbf{X}^\nu) \cdot p_0(\mathbf{X}_{\nu+1}^n|\mathbf{X}^\nu) = \\ &= \prod_{i=1}^{\nu} p_\infty(X_i|\mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=\nu+1}^n p_0(X_i|\mathbf{X}^{i-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{X}_m^n = (X_m, \dots, X_n)$ и $p_j(X_n|\mathbf{X}^{n-1})$ — условная плотность X_n , зависящая от \mathbf{X}^{n-1} . Мы считаем, что наблюдение является независимым и одинаково распределенным. Обозначим $f_\infty(x)$ — плотность в нормальном (до разладки) режиме, и $f_0(x)$ — плотность в режиме после разладки, т. е. в этом случае (1) записывается с $p_\infty(X_i|\mathbf{X}^{i-1}) = f_\infty(X_i)$ и $p_0(X_i|\mathbf{X}^{i-1}) = f_0(X_i)$.

В данной работе наиболее удачно подходит максиминная постановка, в которой момент разладки ν — неизвестное, но не обязательно случайное число.

Любая последовательная процедура обнаружения дает время остановки T для наблюдаемого процесса $\{X_n\}$.

Как предложено в [4], в максиминной постановке риск, связанный с ложной тревогой, разумно измерять как максимальную локальную вероятность ложной тревоги (LPFA) в определенном окне M , определенную как

$$\mathbf{LPFA}(T) = \sup_{\ell \geq 0} P_{\infty}(\ell < T \leq \ell + M), \quad (2)$$

а риск, связанный с обнаружением, — как минимальную вероятность правильного обнаружения (PD) в определенном окне N , определенную как

$$\mathbf{PD} = \inf_{\nu \geq 0} P_{\nu}(\nu < T \leq \nu + N). \quad (3)$$

Однако в задаче инициализации следов объектов разумно задать размеры обоих временных окон M и N одинаковыми $N = M$.

Для $0 < \beta < 1$, пусть $\mathbf{C}_{\beta} = \{T : \mathbf{LPFA}(T) \leq \beta\}$ — класс процедур обнаружения, для которого локальная вероятность ложной тревоги во временном интервале фиксированной длины $N \geq 1$ не превосходит заданного уровня β . В максиминной постановке цель — найти оптимальную процедуру, которая максимизирует в классе \mathbf{C}_{β} вероятность правильного обнаружения (3) во временном интервале фиксированной длины $N \geq 1$.

3. Процедуры обнаружения

Обозначим « $\mathbf{H}_k : \nu = k$ » и « $\mathbf{H}_{\infty} : \nu = \infty$ » — гипотезы, что разладка (появление следа от наблюдаемого объекта) происходит в момент времени $0 \leq k < \infty$, и что разладка не происходит никогда (т. е. объект не появляется никогда) соответственно. Тогда, используя (1), мы получаем отношение правдоподобия между этими гипотезами для выборки $\mathbf{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$

$$\begin{aligned} LR_{k,n} &= \frac{p_k(\mathbf{X}^n)}{p_{\infty}(\mathbf{X}^n)} = \frac{p_{\infty}(\mathbf{X}^k) \cdot p_0(\mathbf{X}_{k+1}^n | \mathbf{X}^k)}{p_{\infty}(\mathbf{X}^n)} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^k p_{\infty}(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=k+1}^n p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}{\prod_{i=1}^n p_{\infty}(X_i | \mathbf{X}^{i-1})} = \\ &= \prod_{i=k+1}^n \frac{p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}{p_{\infty}(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}, \quad k < n. \end{aligned}$$

Так как наблюдения являются независимыми и одинаково распределенными, а $p_{\infty}(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) = f_{\infty}(X_i)$ и $p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) = f_0(X_i)$, тогда

$$LR_{k,n} = \prod_{i=k+1}^n \frac{f_0(X_i)}{f_{\infty}(X_i)}, \quad k < n.$$

Обозначим $\mathcal{L}_i = f_0(X_i)/f_{\infty}(X_i)$.

В качестве наблюдения рассматривается гауссовская модель:

$$X_i = \theta \mathbb{1}_{\{i > \nu\}} + \xi_i, \quad i \geq 1, \quad (4)$$

где $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ — нормальная (гауссовская) $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ независимая и одинаково распределенная последовательность, $\theta > 0$, т. е. мы имеем изменение в среднем независимой и одинаково распределенной гауссовской последовательности. Здесь и далее $\mathbb{1}_B$ — индикатор события B . В случае гауссовской модели наблюдений отношение правдоподобия

$$\mathcal{L}_i = \exp \left\{ \frac{\theta}{\sigma^2} X_i - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (5)$$

3.1. Алгоритм K/N

Мы рассматриваем алгоритм инициализации следов объектов K/N . На каждом последовательном скане принимается решение о наличии объекта. Для принятия решения на каждом скане мы сравниваем отношение правдоподобия \mathcal{L}_i из (5) с порогом. Если порог превышен, то ставится отметка о наличии объекта. Если на N последовательных сканах не менее K отметок (обнаружений) о наличии объекта, то след интересующего объекта инициализируется. В противном случае окно смещается последовательно на один скан, и процедура повторяется. Так как $\mathcal{L}_n(X_i)$ монотонно возрастает по X_i , мы можем принимать решение о наличии объекта, сравнивая наблюдение X_i из (4) с порогом h :

$$U_i = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i \geq h, \\ 0, & \text{если } X_i < h. \end{cases}$$

Тогда, время остановки алгоритма K/N :

$$T_{K/N} = \inf \left[n \geq N : \sum_{i=n-N+1}^n U_i \geq K \right]. \quad (6)$$

Чтобы подобрать оптимальный порог, мы можем рассматривать задачу инициализации следов объектов как схему испытаний Бернулли [5], в которой «успех» и «неудача» (обнаружение или не обнаружение на каждом последовательном скане соответственно) определяются вероятностями $g_{(j)}(1)$ и $g_{(j)}(0)$ соответственно:

$$g_{(j)}(0) = 1 - g_{(j)}(1) = \Phi \left(\frac{h - j\theta}{\sigma} \right), \quad j = 0, 1, \quad (7)$$

где $\Phi \left(\frac{h - j\theta}{\sigma} \right)$, $j = 0, 1$, является функцией распределения гауссовской случайной величины:

$$\Phi \left(\frac{h - j\theta}{\sigma} \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{h - j\theta}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right], \quad j = 0, 1.$$

Таким образом, получена зависимость вероятности обнаружения на каждом последовательном скане от порога и параметров наблюдаемого сигнала.

Вероятность ровно K успехов в N последовательных испытаниях Бернулли

$$P_N^K = C_N^K p^K (1 - p)^{N-K},$$

где C_N^K — биномиальный коэффициент, а p — вероятность «успеха» в каждом последовательном испытании Бернулли.

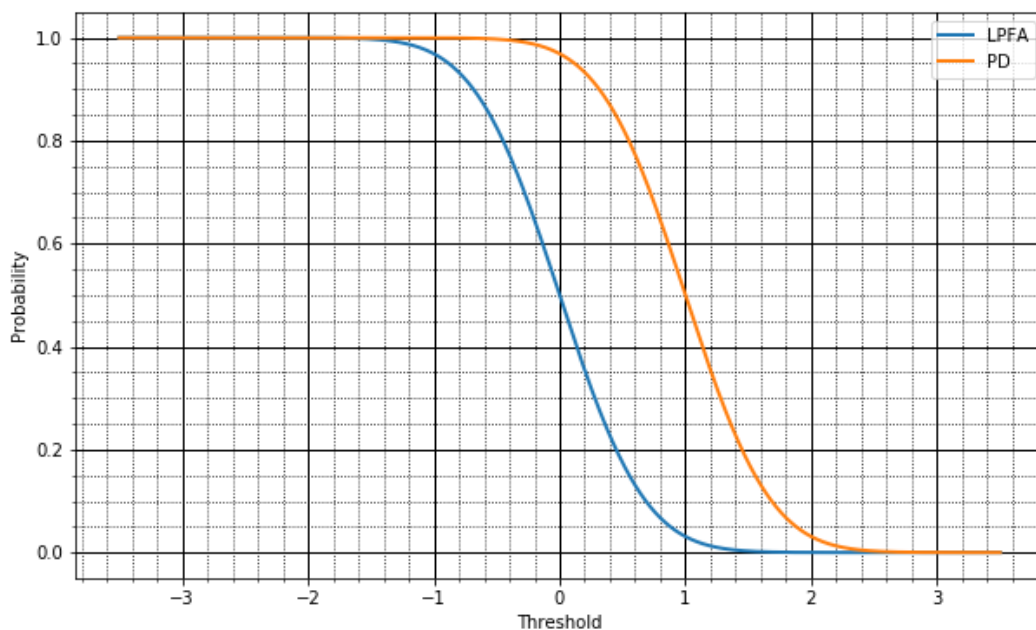
Тогда, используя (7), мы можем получить рабочие характеристики алгоритма K/N в окне $[1, N]$:

$$\mathbf{LPFA}_N^K = \sum_{z=K}^N C_N^z g_{(0)}^z(1) g_{(0)}^{N-z}(0), \quad (8)$$

и

$$\mathbf{PD}_N^K = \sum_{z=K}^N C_N^z g_{(1)}^z(1) g_{(1)}^{N-z}(0). \quad (9)$$

На рис. 1 представлен пример зависимости рабочих характеристик (LPFA и PD) алгоритма K/N от порога для $\theta = 1$.


 Рис. 1. Зависимость LPFA и PD от порога для алгоритма K/N

3.2. Алгоритм движущегося среднего

Для сравнения мы предлагаем алгоритм FMA, который основан на методе последовательного обнаружения разладки. В окне фиксированной длины N считается логарифмическое отношение правдоподобия и суммируется по N последовательным сканам и сравнивается с порогом A . Если порог превышен, то принимается решение об инициализации следа интересующего нас объекта. В противном случае окно смещается последовательно на один скан, и процедура повторяется. Таким образом, алгоритм FMA не что иное, как время остановки

$$T_{FMA}^N = \inf \left[n \geq N : \sum_{i=n-N+1}^n \log(\mathcal{L}_i) \geq A \right]. \quad (10)$$

Как и в разделе 3.1, мы можем получить теоретическую оценку рабочих характеристик алгоритма FMA в окне $[1, N]$.

В гауссовском случае сумма логарифмических отношений правдоподобия в окне $[1, N]$:

$$\lambda_{1,N} = \frac{\theta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N X_i - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} N. \quad (11)$$

Так как $Y(N) = \sum_{i=1}^N X_i$ — гауссовская случайная величина $\mathcal{N}(N \cdot \theta, N \cdot \sigma^2)$, то, используя данное свойство гауссовского распределения и (11), мы получаем теоретическую оценку рабочих характеристик алгоритма FMA в окне $[1, N]$:

$$\mathbf{LPFA}_{FMA}^N = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{-\frac{N\theta^2}{2\sigma^2} - A}{\sqrt{2N\sigma^2}} \right) \right], \quad (12)$$

и

$$\mathbf{PD}_{FMA}^N = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\frac{N\theta^2}{2\sigma^2} - A}{\sqrt{2N\sigma^2}} \right) \right]. \quad (13)$$

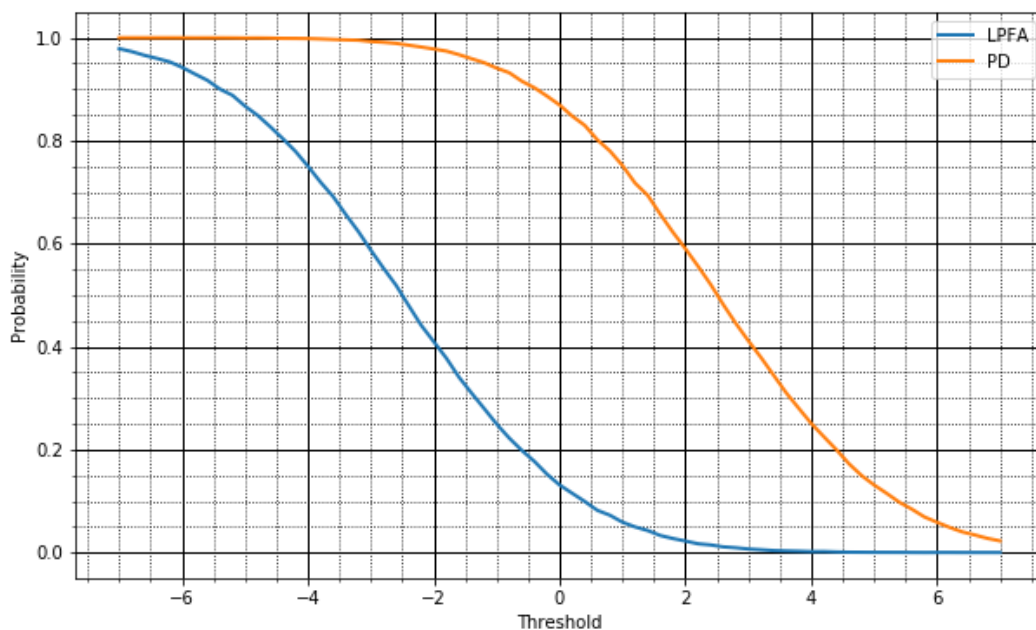


Рис. 2. Зависимость LPFA и PD от порога для алгоритма FMA

Таким образом, и для алгоритма FMA получена зависимость характеристик обнаружения в зависимости от порога и параметров наблюдаемого сигнала.

На рис. 2 представлен пример подобной зависимости рабочих характеристик (LPFA и PD) алгоритма FMA от порога для $\theta = 1$.

4. Численное сравнение алгоритма K/N и алгоритма движущегося среднего

В этом разделе сравним рабочие характеристики (**LPFA** and **PD**) алгоритмов K/N и FMA, используя метод Монте-Карло. Минимум в (3) достигается при $\nu = 0$. Максимум в (2) достигается при $\ell = N - 1$. Однако мы заинтересованы в первую очередь в том, чтобы **LPFA** не превышала заданный уровень β , и $\mathbf{LPFA}_{K/N} \approx \mathbf{LPFA}_{FMA}$. Поэтому, для простоты, мы будем считать **LPFA** в окне $[1, N]$.

4.1. Параметры симуляций

1. Мы заинтересованы в низком отношении сигнал-шум ($I = \theta^2/2\sigma^2$). Поэтому мы задаем, $\theta = 1$; $\sigma^2 = 1$, и в этом случае отношение сигнал-шум $I = 0.5$.

2. Заданный уровень LPFA $\beta = 0.2; 0.15; 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.001$.

3. Результаты симуляций Монте-Карло очень близки к теоретическим оценкам. Поэтому, чтобы получить характеристики, мы подбираем пороги, используя (8), (9), (12), (13).

4. Длина окна N варьируется с 5 до 15.

5. Число прогонов Монте-Карло $M = 10^6$, что более чем достаточно, чтобы получить очень точные оценки.

4.2. Моделирование

Моделируем стохастическую модель X_n , используя генератор случайных чисел в (4). Чтобы посчитать **LPFA**, в каждом прогоне Монте-Карло в наблюдении $X_n^{(i)}$, $n \geq 1$ ($i = 1, \dots, M$, M – число прогонов Монте-Карло) мы принимаем, что в (4) $\nu = \infty$. В каждом прогоне Монте-Карло считаем время остановки $T_{N/K}^{(i)}$ и $T_{FMA}^{(i)}$, используя (6), (10). Тогда экспериментальная оценка локальной вероятности ложной тревоги сравниваемых алгоритмов:

$$\mathbf{LPFA}_N^K = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{T_{K/N}^{(i)} \leq N\}},$$

$$\mathbf{LPFA}_{FMA} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{T_{FMA}^{(i)} \leq N\}}.$$

Чтобы вычислить **PD**, в каждом прогоне Монте-Карло в наблюдении $X_n^{(i)}$, $n \geq 1$ мы принимаем, что в (4) $\nu = 0$. В каждом прогоне Монте-Карло считаем время остановки $T_{N/K}^{(i)}$ и $T_{FMA}^{(i)}$, используя (6), (10). Тогда экспериментальная оценка вероятности правильного обнаружения сравниваемых алгоритмов:

$$\mathbf{PD}_N^K = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{T_{K/N}^{(i)} \leq N\}}, \quad \mathbf{PD}_{FMA} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{T_{FMA}^{(i)} \leq N\}}.$$

Зависимость вероятности правильного обнаружения от локальной вероятности ложной тревоги алгоритмов K/N и FMA представлена на рис. 3.

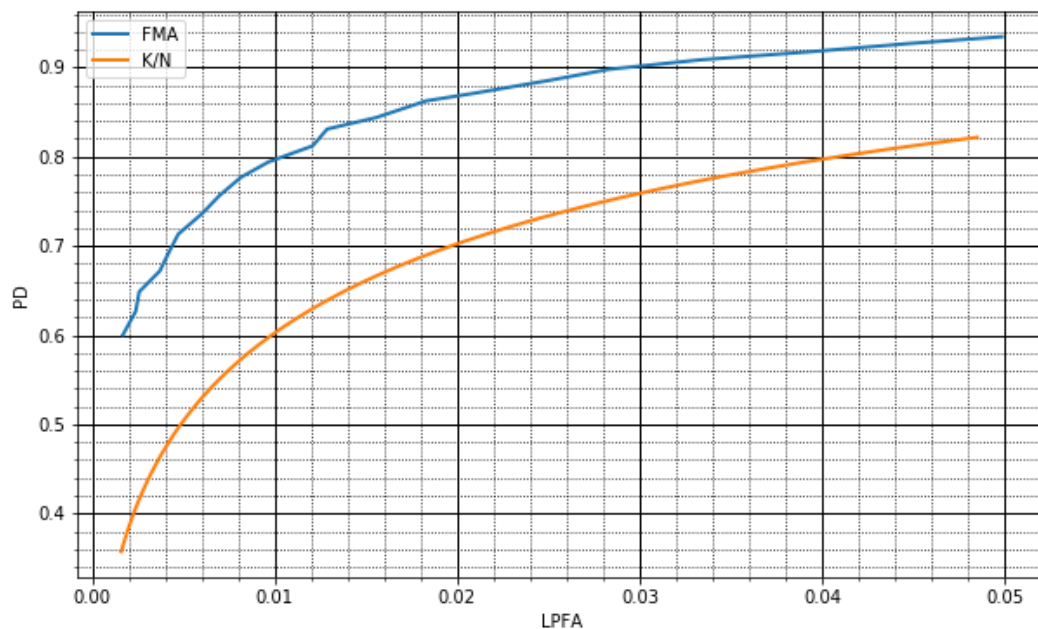


Рис. 3. Рабочие характеристики (PD vs. LPFA) алгоритмов инициализации следов объектов: K/N и FMA

Таблица 1 показывает результаты сравнения алгоритмов инициализации следов объектов: алгоритм K/N и алгоритм FMA. Видно, что рабочие характеристики алгоритма K/N заметно хуже, чем характеристики алгоритма FMA. Разница тем больше, чем меньше **LPFA**.

Т а б л и ц а 1

Рабочие характеристики алгоритмов инициализации следов объектов:
 K/N и FMA

	Уровень β , ограничивающий LPFA						
$N = 5$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.848	0.800	0.731	0.589	0.418	0.326	0.109
PD_{FMA}	0.921	0.886	0.837	0.719	0.571	0.464	0.197
$N = 6$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.878	0.833	0.772	0.651	0.493	0.389	0.151
PD_{FMA}	0.944	0.917	0.882	0.793	0.658	0.549	0.270
$N = 7$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.908	0.876	0.814	0.708	0.543	0.439	0.179
PD_{FMA}	0.962	0.948	0.913	0.846	0.727	0.633	0.339
$N = 8$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.926	0.901	0.850	0.748	0.600	0.499	0.221
PD_{FMA}	0.976	0.964	0.940	0.885	0.782	0.690	0.402
$N = 9$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.940	0.917	0.875	0.786	0.659	0.557	0.270
PD_{FMA}	0.984	0.975	0.958	0.909	0.825	0.748	0.460
$N = 10$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.956	0.937	0.904	0.828	0.704	0.600	0.310
PD_{FMA}	0.990	0.983	0.969	0.935	0.866	0.795	0.538
$N = 11$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.966	0.949	0.919	0.855	0.737	0.643	0.351
PD_{FMA}	0.993	0.989	0.979	0.951	0.897	0.840	0.595
$N = 12$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.974	0.963	0.938	0.880	0.783	0.692	0.398
PD_{FMA}	0.995	0.992	0.985	0.963	0.917	0.876	0.646
$N = 13$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.980	0.970	0.947	0.899	0.809	0.730	0.443
PD_{FMA}	0.997	0.995	0.990	0.976	0.940	0.899	0.701
$N = 14$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.985	0.977	0.958	0.914	0.835	0.759	0.479
PD_{FMA}	0.998	0.997	0.993	0.981	0.954	0.922	0.748
$N = 15$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.989	0.980	0.965	0.930	0.859	0.787	0.520
PD_{FMA}	0.999	0.998	0.995	0.988	0.965	0.939	0.773

5. Заключение

Результаты показывают, что предложенная процедура инициализации следов объектов движущегося среднего демонстрирует рабочие характеристики значительно лучшие, чем процедура K/N . Кроме того, симуляции Монте-Карло демонстрируют, что формулы для теоретических оценок рабочих характеристик очень точны. Это позволяет существенно упростить процесс выбора порога для алгоритмов обнаружения. Поэтому мы рекомендуем использовать алгоритм движущегося среднего на практике. Полученные результаты имеют очень важное практическое значение.

Литература

1. *Tartakovsky A.G., Nikiforov I.V., Basseville M.* Sequential Analysis Hypothesis Testing and Change-point Detection/ ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
2. *Blackman S.S.* Multiple-Target Tracking with Radar Applications, ser. Artech House Radar Library. Dedham, UK : Artech House, 1986.
3. *Tartakovsky A.G., Brown J.* Adaptive Spatial-Temporal Filtering Methods for Clutter Removal and Target Tracking // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Oct. 2008. V. 44, N 4. P. 1522–1537.
4. *Tartakovsky A.G.* Sequential Change Detection and Hypothesis Testing: General Non-i.i.d. Stochastic Models and Asymptotically Optimal Rules, ser. Monographs on Statistics and Applied Probability 165. Boca Raton, London, New York : Chapman & Hall/CRC Press, 2020.
5. *Tartakovsky A. G., Veeravalli V.V.* Change-Point Detection in Multichannel and Distributed Systems, ser. Statistics: a Series of Textbooks and Monographs. New York, USA, 2004. V. 173. P. 339–370.

References

1. *Tartakovsky A.G., Nikiforov I.V., Basseville M.* Sequential Analysis Hypothesis Testing and Change-point Detection/ ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
2. *Blackman S.S.* Multiple-Target Tracking with Radar Applications, ser. Artech House Radar Library. Dedham, UK : Artech House, 1986.
3. *Tartakovsky A.G., Brown J.* Adaptive Spatial-Temporal Filtering Methods for Clutter Removal and Target Tracking. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Oct. 2008. V. 44, N 4. P. 1522–1537.
4. *Tartakovsky A.G.* Sequential Change Detection and Hypothesis Testing: General Non-i.i.d. Stochastic Models and Asymptotically Optimal Rules, ser. Monographs on Statistics and Applied Probability 165. Boca Raton, London, New York : Chapman & Hall/CRC Press, 2020.
5. *Tartakovsky A. G., Veeravalli V.V.* Change-Point Detection in Multichannel and Distributed Systems, ser. Statistics: a Series of Textbooks and Monographs. New York, USA, 2004. V. 173. P. 339–370.

Поступила в редакцию 18.01.2021