Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)"

На правах рукописи
УДК 519.174.7

Костина Ольга Андреевна

РАСКРАСКИ И РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ НА СФЕРАХ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
А.М. Райгородский

Москва, 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению ряда экстремальных задач, лежащих на стыке комбинаторной геометрии и теории графов.

Основные задачи комбинаторной геометрии связаны с изучением комбинаторных свойств геометрических объектов и их взаимных расположений. Истоками данного направления дискретной математики являются работы XIX века, в которых рассматривается возможность разбиения евклидова пространства (см. [1], [2]). Примером одной из наиболее известных проблем, связанных с разбиением множеств на части, служит гипотеза Борсука (см. [3]). Она была сформулирована польским математиком К. Борсуком в 1933 году в следующем виде:

верно ли, что всякое множество $A \subset \mathbb{R}^d$ конечного диаметра можно разбить на части $A_1, \ldots, A_{d+1}$ строго меньшего диаметра?

Под диаметром множества $A \subset \mathbb{R}^d$ здесь мы понимаем величину

$$\operatorname{diam} A = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in A} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$$

где $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ обозначает евклидово расстояние между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

История проблемы Борсука довольно драматична (см. обзоры и статьи [4]–[9]). Все, кто занимался данной проблемой, верили, что ответ на поставленный вопрос положителен. К этому подталкивали и многочисленные продвижения, в частности, справедливость гипотезы Борсука для $d \leqslant 3$ (см. [10]), а также для некоторых классов множеств в произвольном случае. Тем более неожиданным оказался результат Кана–Калаи (см. [11]), опровергнувший гипотезу для $d = 2015$. На самом деле Кан и Калаи показали нечто большее. А именно, для всякого $A \subset \mathbb{R}^d$ введем величину $f(A)$, показывающую, на какое наименьшее количество частей меньшего диаметра может быть разбито множество A:

$$f(A) = \min\{f\colon A = A_1 \cup \ldots \cup A_f, \operatorname{diam} A_i < \operatorname{diam} A\}.$$

Теперь рассмотрим величину $f(d)$, которая говорит о том, на какое минимальное количество частей меньшего диаметра может быть разбито всякое множество диаметра 1:

$$f(d) = \max_{A \subset \mathbb{R}^d, \operatorname{diam} A = 1} f(A).$$

В таких терминах гипотеза Борсука формулируется совсем просто: $f(d) = d+1$. Как было сказано выше, Кан и Калаи не только опровергли данную гипотезу, но и показали, что величина $f(d)$ растет субэкспоненциально при $d \to \infty$:

$$f(d) \geqslant (1.203\ldots + o(1))^{\sqrt{d}}.$$

В настоящий момент известно, что гипотеза Борсука неверна при $d \geqslant 64$ (см. [12]) и, как было указано выше, верна при $d \leqslant 3$ (точная граница, когда гипотеза перестает быть верной, до сих пор не найдена). Что же касается величины $f(d)$ при $d \to \infty$, то зазор между нижней и верхней оценками по-прежнему колоссален (см. [13], [14]):

$$(1.2255\ldots + o(1))^{\sqrt{d}} \leqslant f(d) \leqslant (1.224\ldots + o(1))^{d}.$$

Практически все контрпримеры к гипотезе Борсука строятся на основании множества, лежащего на сфере радиуса, близкого к $1/\sqrt{2}$. Поэтому довольно естественным обобщением гипотезы Борсука будет ее перенесение на сферу S_r^{d-1} произвольного радиуса r в пространстве $\mathbb{R}^d$. Иначе говоря,

верно ли, что всякое множество $A \subset S_r^{d-1}$ конечного диаметра можно разбить на части $A_1, \ldots, A_{d+1}$ строго меньшего диаметра?

По аналогии с величиной $f(d)$ мы можем ввести величину $f_r(d)$:

$$f_r(d) = \max_{A \subset S_r^{d-1}, \operatorname{diam} A = 1} f(A).$$

Впервые данная задача была рассмотрена в работе [15]. В этой работе было показано, что для сферы гипотеза Борсука также может быть опровергнута, и, более того, порядок роста величины $f_r(d)$ также субэкспоненциальный.

Другая исключительно популярная задача комбинаторной геометрии — проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера — фактически была сформулирована Нелсоном в 1950 году (см. [5], [8], [16], [17]). Она заключается в отыскании хроматического числа плоскости $\chi(\mathbb{R}^2)$ — минимального количества цветов, в которые можно так покрасить все точки плоскости, что любые две точки на расстоянии 1 покрашены в разные цвета. Несмотря на то, что данная формулировка будет понятна даже школьнику старших классов, работа над этой проблемой далека от завершения, несмотря на значительные усилия, приложенные специалистами в комбинаторной геометрии и теории графов. Более того, проблема оказалась настолько сложной, что на протяжении шестидесяти с лишним лет здесь не было никаких продвижений, а имевшиеся оценки были довольно тривиальными: $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$. Первое неравенство обосновывается при помощи явного примера, который называется Мозеровским веретеном и представляет собой *граф единичных расстояний*, то есть граф с вершинами в точках плоскости, которые соединены ребром в том и только том случае, если расстояние между ними равно 1 (см. [18]). Верхняя оценка доказывается примером замощения плоскости шестиугольниками с нужным диаметром. Тем более неожиданным стал прорыв в данном направлении: в 2018 году в работе [19] Обри де Грей показал, что хроматическое число плоскости не может быть меньше 5. Конструкция, представленная автором в работе для построения контрпримера к возможной раскраске плоскости в 4 цвета, представляет собой граф на 1567 вершинах, поэтому часть доказательства проверяется при помощи компьютера. Пример де Грея уже удалось упростить, и, возможно, в дальнейшем его получится обобщить для улучшения нижней оценки хроматического числа плоскости.

Понятно, что данная проблема легко обобщается на случай произвольной размерности. Речь идет о хроматическом числе пространства $\chi(\mathbb{R}^n)$, которое определяется ровно так же, как хроматическое число плокости, но вместо точек плоскости рассматриваются точки $\mathbb{R}^n$. И в случае произвольного n зазор становится только больше. Уже для $n = 3$ известно лишь, что $6 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15$ (см. [20], [21]). Случаю малых значений n посвящено значительное количество работ, среди которых мы хотели бы выделить [5], [8], [22]–[26]. Нас, как и в прошлой задаче, будет интересовать скорее асимптотический случай, когда $n \to \infty$. Отметим, что линейная по n оценка практически тривиальна: примером графа единичных расстояний служит n-мерный симплекс. Первое значительное продвижение в случае произвольного n было связано с работой [27] Лармана и Роджерса 1972 года, в которой было показано, что хроматическое число пространства растет нелинейно при $n \to \infty$. Однако настоящим прорывом стала работа [28] Франкла и Уилсона 1981 года. В этой работе в некотором смысле окончательно сформировался линейно-алгебраический метод в комбинаторике. В ней было показано, что хроматическое число пространства растет экспоненциально:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.207\ldots + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Наилучшая на настоящий момент нижняя оценка при $n \to \infty$ была получена в работе [8] и выглядит следующим образом:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n, n \to \infty.$$

При этом зазор между верхней и нижней оценкой довольно велик, поскольку известно лишь, что (см. [27])

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n, \ \ n \to \infty.$$

За многие годы у проблемы Нелсона–Эрдеша–Хадвигера появилось большое количество обобщений и переформулировок. Во-первых, вместо одного запрета можно рассмотреть набор из нескольких запрещенных расстояний, этой модификации исходной проблемы посвящены работы [8], [23], [29], [30], [31]. Чуть более сложным вариантом задачи является запрет определенных одноцветных конфигураций, например, одноцветных симплексов или треугольников с определенными параметрами (см. [32]–[37]). Во-вторых, данная задача имеет смысл для произвольных метрических пространств, и особенно интересным представляется случай пространства $\mathbb{R}^n$, снабженного различными метриками (см. [31], [38]). Наконец, вместо всего пространства $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать точки определенного подмножества $\mathbb{R}^n$. Именно последний вариант обобщения представляет наибольший интерес для нас, и мы сконцентрируемся на случае сферы (см. [39]–[41]).

Задачу об отыскании хроматического числа сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$ предложил П. Эрдеш в 1981 году (см. [42]). Данная проблема формулируется следующим образом. Пусть $r \geqslant 1/2$. Рассмотрим $(n-1)$-мерную сферу $S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r. Определим $\chi(S_r^{n-1})$ аналогично хроматическому числу пространства как минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить точки S_r^{n-1}, чтобы никакая пара точек на расстоянии 1 не имела одинаковый цвет. При $r = 1/2$ задача становится тривиальной: очевидно, что $\chi(S_{1/2}^{n-1}) = 2$. А вот если $r > 1/2$, как оказалось, $\chi(S_r^{n-1}) \to \infty$ при $n \to \infty$. Данный факт был доказан Ловасом в 1983 году (см. [43]), который указал линейную по n нижнюю оценку: $\chi(S_r^{n-1}) \geqslant n$. В той же работе была приведена неверная линейная по n оценка сверху. В 2010 году Райгородский установил (см. [39], [40]), что на самом деле хроматическое число сферы растет экспоненциально, доказав при помощи линейно-алгебраического метода, что при $1/2 < r < 1/\sqrt{2}$

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \left(2\left(\frac{1}{8r^2}\right)^{\frac{1}{8r^2}}\left(1-\frac{1}{8r^2}\right)^{1-\frac{1}{8r^2}} + o(1)\right)^n.$$

Кроме того, при $r \geqslant 1/\sqrt{2}$

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} + o(1)\right)^n.$$

Отметим также, что имеются всего лишь две содержательные верхние оценки. Одна из них уже фактически приведена выше, поскольку

$$\chi(S_r^{n-1}) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n, \ \ n \to \infty.$$

Другая оценка приведена в работе Роджерса [44] и превосходит указаную выше при всех $r < 1.5$:

$$\chi(S_r^{n-1}) \leqslant (2r + o(1))^n, \ \ n \to \infty.$$

Экспоненциальный зазор между верхними и нижними оценками мотивирует нас на поиск более точных нижних оценок.

Отдельный интерес представляет поиск хороших оценок хроматических чисел сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q. А именно, при $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное l_q-метрикой, в котором расстояние между произвольными векторами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ определяется следующим образом:

$$d_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Определим теперь $\chi(S_r^{n-1}; l_q)$ хроматическое число $(n-1)$-мерной сферы радиуса r в данном пространстве. Очевидно, при $q = 2$ задача сводится к случаю обычного евклидова пространства, а вот в пространстве с метрикой l_1, например, речь идет об оценке хроматического числа $(n-1)$-мерного ортоплекса. Данная задача обобщает предыдущий вариант проблемы Нелсона–Эрдеша–Хадвигера.

Цель работы и основные задачи

Цель настоящей работы состоит в получении новых нижних оценок величин $f_r(d)$ и хроматических чисел сфер, как в евклидовом пространстве, так и в пространстве $\mathbb{R}^n$, снабженном метрикой l_q с произвольным $q \in \mathbb{N}$.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность полученных результатов

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны для комбинаторной геометрии и теории графов.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы комбинаторной геометрии и линейно-алгебраический метод.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Получены новые нижние оценки хроматических чисел сфер в евклидовом пространстве.
2. Получены новые нижние оценки хроматических чисел сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q для произвольного $q \in \mathbb{N}$.
3. Получены новые нижние оценки величин $f_r(d)$, определяемых как минимальное число частей диаметра, меньшего 1, на которые можно разбить всякое подмнножество сферы S_r^{d-1} диаметра 1.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты работы строго доказаны.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных семинарах:

— Кафедральный научно-исследовательский семинар кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ под руководством профессора А. М. Райгородского

— Спецсеминар по комбинаторике и теории графов кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета под руководством профессора А. М. Райгородского

— Спецсеминар “Экстремальная комбинаторика и случайные структуры” кафедры теории вероятностей механико-математического факультета под руководством доцента Д. А. Шабанова

— Спецсеминар кафедры теории чисел механико-математического факультета под руководством профессора Н. Г. Мощевитина

— Семинар “Современные проблемы теории чисел” МИАН под руководством профессора С. В. Конягина и профессора И. Д. Шкредова

— Международная конференция “Осенние математические чтения в Адыгее”

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах, представленных в конце списка литературы. Все работы опубликованы в журналах из перечня ВАК и RSCI, 2 из них в журналах из списка Scopus. В указанных статьях автором диссертации были сформулированы и доказаны основные результаты, А. М. Райгородский оказывал помощь в редактировании текста.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему начуному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Райгородскому Андрею Михайловичу за постановку задач и неоценимую поддержку в работе.

Также автор благодарит за ценные советы и замечания профессора Михаэля Рассиаса.

Глава 1

Хроматические числа сфер в евклидовом пространстве

Данная глава посвящена оценкам хроматического числа сферы $\chi(S_r^{n-1})$, определяемого как минимальное число цветов, необходимое для покраски сферы S_r^{n-1} таким образом, что любые две точки на расстоянии 1 были покрашены в разные цвета. Основными результатами данной главы являются теоремы 3 и 4. Данные результаты были сформулированы и доказаны в работах [50]–[52].

1.1 Формулировка вспомогательных определений и утверждений

Напомним сперва некоторые определения из теории графов. *Дистанционными* называются графы, вершины которых — точки пространства $\mathbb{R}^n$ и ребра в которых проводятся, если точки находятся на фиксированном расстоянии d_0 друг от друга. *Числом независимости* произвольного графа G называется величина $\alpha(G)$, которая равна максимальному размеру *независимого множества*, то есть множества вершин, попарно не смежных между собой. *Хроматическим числом графа* $\chi(G)$ называется минимальное число цветов, необходимое для такой раскраски вершин графа, при которой любые две вершины, соединенные ребром, покрашены в разные цвета. Отметим следующее полезное неравенство, которое мы будем использовать далее:

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}. \tag{1.1}$$

Здесь $|V(G)|$ — мощность множества вершин графа G.

Кроме того, мы приведем полную формулировку результата, анонсированного во введении, относительно экспоненциального роста хроматических чисел сфер.

Теорема 1. *Если* $r \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \left(2\left(\frac{1}{8r^2}\right)^{\frac{1}{8r^2}}\left(1-\frac{1}{8r^2}\right)^{1-\frac{1}{8r^2}}+o(1)\right)^n.$$

Если $r \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}+o(1)\right)^n.$$

При этом, очевидно, $\chi(S_r^{n-1}) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3+o(1))^n$. Возникает два вопроса. Во-первых, можно ли улучшить оценку из теоремы 1 при $r \leqslant 1/\sqrt{2}$? Во-вторых, при $r \geqslant 1/\sqrt{2}$ оценка из теоремы 1 и вовсе не меняется. Можно ли сделать ее зависящей от r? Ответы на эти вопросы в следующем разделе.

Наконец, нам потребуется теорема, доказанная в работе [46] и улучшающая в ряде случаев классический результат Франкла и Уилсона.

Теорема 2. *Пусть*

$$G=(V,E), V=\{\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n): x_i\in\{0,1\}, x_1+\ldots+x_n=a\},$$
$$E=\{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2): \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in V, (\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=a-p\},$$

где p *— степень простого числа. Если при этом выполнено* $a-2p \geqslant 0$, *положим* $d=a-2p+1$ *и выберем* t *из системы неравенств*

$$(a-d+1)\left(2+\frac{d-1}{t+1}\right) \leqslant n < (a-d+1)\left(2+\frac{d-1}{t}\right).$$

Тогда

$$\alpha(G) \leqslant \frac{C_n^{d+2t}\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}{C_a^{d+t}C_{n-a}^t}. \tag{1.2}$$

1.2 Формулировки результатов

Одним из основных результатов данной главы является следующая теорема, которая будет доказана в параграфе 1.4.1.

Теорема 3. *Пусть* $r \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$. *Пусть* $c \in (0,\ \frac{1}{2}]$, $a=[cn]$. *Положим*

$$p_0 = p_0(r,c,n) = \frac{a(n-a)}{2nr^2}.$$

Пусть также $p = p(r, c, n)$ — минимальное простое число, строго большее, чем p_0. Имеют место два случая.

1. *Если при данных r, c, n выполнено $a - 2p < 0$, то*

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^a}{\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}. \tag{1.3}$$

2. *Если же при данных r, c, n выполнено $a-2p \geqslant 0$, положим $d = a-2p+1$ и выберем t из системы неравенств*

$$(a-d+1)\left(2+\frac{d-1}{t+1}\right) \leqslant n < (a-d+1)\left(2+\frac{d-1}{t}\right).$$

   Тогда

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^a C_a^{d+t} C_{n-a}^t}{C_n^{d+2t} \sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}. \tag{1.4}$$

При помощи формулы Стирлинга и стандартных методов асимптотического анализа можно показать, что оценка из формулировки теоремы 3 имеет вид $(c_1(r)+o(1))^n \leqslant \chi(S_r^{n-1})$. Однако из формулировки теоремы практически невозможно понять, какова зависимость от r величины c_1. Поэтому в разделе 1.3 мы приведем таблицу численных результатов. Сформулируем теперь еще одно полученное утверждение, которое, как мы увидим опять-таки в разделе 1.3, зачастую дает дальнейшие улучшения как теоремы 1, так и теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть $r > 1/2$. Пусть b_1, b_{-1} таковы, что $b_1 + b_{-1} \in (0, \frac{1}{2}]$ и $b_{-1} < b_1$. Пусть $k_1 = [b_1 n]$, $k_{-1} = [b_{-1} n]$. Положим*

$$p_0 = p_0(r, b_1, b_{-1}, n) = \frac{(k_1 + k_{-1})\, n - (k_1 - k_{-1})^2}{2nr^2}.$$

Пусть $p = p(r, b_1, b_{-1}, n)$ — минимальное простое число, строго большее, чем p_0. Если при данных r, b_1, b_{-1}, n выполнено $k_1 + k_{-1} - 2p < -2k_{-1}$, то

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{A}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}}, \tag{1.5}$$

где

$$\mathcal{A} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_1 + m_2 \leqslant n, m_1 + 2m_2 \leqslant p-1\}.$$

Справедливость данного результата будет установлена в параграфе 1.4.2.

Отметим, что оценка хроматического числа сферы вытекает из применения оценки

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

к некоторым специфическим дистанционным графам. Для оценки чисел независимости данных графов мы будем использовать линейно-алгебраический метод (см. [40]).

1.3 Сопоставление оценок из теорем 1-3 и оптимальность параметров

1.3.1 Сопоставление

В формулировках теорем 1, 3 и 4 были даны три разные оценки. Введем обозначения $c_1^i(r)$ для величин $c_1(r)$, возникающих в оценках $\chi(S_r^{n-1}) \geqslant (c_1(r) + o(1))^n$ в результате применения теорем 1, 3 и 4 соответственно. Хотелось бы понять, как соотносятся эти оценки при разных радиусах, дают ли теоремы 3 и 4 на каких-то радиусах улучшения по сравнению с теоремой 1. Как было сказано выше,

$$c_1^1(r) = 2\left(\frac{1}{8r^2}\right)^{\frac{1}{8r^2}}\left(1-\frac{1}{8r^2}\right)^{1-\frac{1}{8r^2}}, \quad r \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$
$$c_1^1(r) = c_1^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = 1.139\ldots, \quad r \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим величину $c_1^3(r)$ и прокомментируем теорему 3. Сперва рассмотрим случай, когда $r \in (1/2,\ 1/\sqrt{2}]$, ведь это частный случай теоремы 3 и именно он изучен в теореме 1. Обратимся к величине $a-2p$. Используя обозначения теоремы 3, оценим

$$a - 2p \leqslant a - 2p_0 = a - \frac{a(n-a)}{nr^2} = \frac{an(r^2-1)+a^2}{nr^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{-\frac{an}{2}+a^2}{nr^2} = \frac{\frac{-cn^2}{2}+c^2n^2+O(n)}{nr^2} = \frac{cn}{r^2}\left(-\frac{1}{2}+c+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В данном случае $c \leqslant 1/2$. Если $c < 1/2$, то при больших n имеем $a - 2p < 0$. Если $c = 1/2$, то $a - 2p = O(1)$, т.е. $d = O(1)$. Понятно, что в этом случае оценка (1.4) отличается от оценки (1.3) лишь не более чем в полиномиальное по n число раз. Изучим вид оценки (1.3). Знаменатель оценим следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i \leqslant pC_n^{p-1},$$

что с точки зрения асимптотики логарифма совпадает с C_n^p. Напомним формулу Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad (0<\theta<1).$$

Применив ее и используя тот факт, что $p \sim p_0$ при $n \to \infty$ (см. [45]), а $a \sim cn$ при $n \to \infty$, получим следующие равенства:

$$C_n^a = \left(\frac{1}{c^c(1-c)^{1-c}} + o(1)\right)^n, \quad C_n^p = \left(\frac{1}{\left(\frac{c(1-c)}{2r^2}\right)^{\frac{c(1-c)}{2r^2}}(1-\frac{c(1-c)}{2r^2})^{1-\frac{c(1-c)}{2r^2}}} + o(1)\right)^n.$$

Зададим $f(c)$ следующим образом:

$$f(c) = \frac{\left(\frac{c(1-c)}{2r^2}\right)^{\frac{c(1-c)}{2r^2}}\left(1-\frac{c(1-c)}{2r^2}\right)^{1-\frac{c(1-c)}{2r^2}}}{c^c(1-c)^{1-c}} =$$

$$= c^{c\left(\frac{1-c}{2r^2}-1\right)}(1-c)^{(1-c)\left(\frac{c}{2r^2}-1\right)}\left(\frac{1}{2r^2}\right)^{\frac{c(1-c)}{2r^2}}\left(1-\frac{c(1-c)}{2r^2}\right)^{\left(1-\frac{c(1-c)}{2r^2}\right)}.$$

Тогда поиск значения c, на котором достигается максимум отношения чисел сочетаний, сводится к поиску нулей производной функции $f(c)$:

$$f'(c) = \frac{1}{4r^2}(1-c)^{-(1-c)}c^{-c}\left(\frac{(1-c)c}{r^2}\right)^{\frac{(1-c)c}{2r^2}}\left(\frac{c^2-c+2r^2}{r^2}\right)^{1-\frac{(1-c)c}{2r^2}} \times$$

$$\times \ln\left(2^{2c-1}\left(\frac{1-c}{c}\right)^{2r^2}\left(1-\frac{(1-c)c}{2r^2}\right)^{2c-1}\left(\frac{(1-c)c}{2r^2}\right)^{-(2c-1)}\right).$$

Очевидно, что в точке $c = 1/2$ функция f имеет локальный экстремум. Численные расчеты показали, что глобальный максимум тоже находится в этой точке, так что при $r \in (1/2,\ 1/\sqrt{2}]$ улучшения теоремы 1 за счет выбора параметра c достигнуть невозможно, и величина $c_1^3(r)$ тождественно совпадает с величиной $c_1^1(r)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $r \in \left(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt[4]{2}\right]$. Здесь уже в зависимости от значений r и c по существу работают оба неравенства (1.3) и (1.4). Численные расчеты показывают, что для каждого r оптимум в оценке из теоремы 3 достигается при таком c, что $a-2p \sim 0$ при $n \to \infty$, т.е. при $c = 1-r^2$. Величина $c_1^3(r)$ при указанных значениях r строго возрастает от константы $1.139\ldots$, на которой стабилизировалась к этому моменту величина $c_1^1(r)$, до константы $1.207\ldots = (1+\sqrt{2})/2$. На самом деле, при бо́льших r автоматически верно $c_1^3(r) = 1.207\ldots$, поскольку заведомо $S_r^{n-1} \subset S_{r'}^n$, коль скоро $r' > r$, откуда $\chi(S_{r'}^n) \geqslant \chi(S_r^{n-1})$.

Касательно величины $c_1^4(r)$ численные эксперименты показали, что в случае, когда $r \leqslant 1/\sqrt{3} = 0.577\ldots$, эта величина меньше единицы, т.е. теорема 4 совсем не работает. Зато уже при $r = 1/\sqrt{2} = 0.707\ldots$ имеем $c_1^4(r) = 2/\sqrt{3} = 1.154\ldots > 1.139\ldots$, и дальше теорема 4 также всегда сильнее теоремы 3. При этом величина $c_1^4(r)$ строго возрастает до $r = r_* = 0.79\ldots$ и $c_1^4(r_*) = 1.239\ldots$, после чего применимо рассуждение из предыдущего абзаца, т.е. при всех $r \geqslant r_*$ имеем $\chi(S_r^{n-1}) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n$.

Наконец, $c_1^4(r) > c_1^1(r)$ начиная с $r = 0.678\ldots$ В итоге получается, что теорема 3 везде покрывается теоремами 1 и 4. Поэтому величину c_1^3 мы не приводим в таблице.

Ясно, что $\chi(S_r^{n-1}) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n)$, а про последнюю величину известно, благодаря Ларману и Роджерсу (см. [27]), что она не больше, чем $(3+o(1))^n$. Наконец, из работы Роджерса [44] следует неравенство $\chi(S_r^{n-1}) \leqslant (2r + o(1))^n$, и это более сильная оценка при $r < 1.5$. Обозначим минимум из этих двух оценок $c_2(r)$ и приведем численные результаты ниже в таблице 1.1.

r	$c_1^1(r)$	$c_1^4(r)$	$c_2(r)$
0.50000	**1.00000**	0.99999	1.00000
0.51000	**1.00075**	0.99999	1.02000
0.52000	**1.00285**	0.99999	1.04000
0.53000	**1.00608**	0.99999	1.06000
0.54000	**1.01026**	0.99999	1.08000
0.55000	**1.01525**	0.99999	1.10000
0.56000	**1.02092**	0.99999	1.12000
0.57000	**1.02718**	0.99999	1.14000
0.58000	**1.03392**	1.00024	1.16000
0.59000	**1.04107**	1.00475	1.18000
0.60000	**1.04858**	1.01316	1.20000
0.61000	**1.05638**	1.02386	1.22000
0.62000	**1.06442**	1.03589	1.24000
0.63000	**1.07267**	1.04871	1.26000
0.64000	**1.08108**	1.06200	1.28000
0.65000	**1.08962**	1.07557	1.30000
0.66000	**1.09827**	1.08930	1.32000
0.67000	**1.10700**	1.10314	1.34000
0.67600	**1.11227**	1.11147	1.35200
0.67700	**1.11315**	1.11286	1.35400
0.67800	1.11403	**1.11425**	1.35600
0.67900	1.11491	**1.11564**	1.35800
0.68000	1.11579	**1.11703**	1.36000
0.69000	1.12461	**1.13093**	1.38000
0.70000	1.13346	**1.14483**	1.40000
0.71000	1.13975	**1.15870**	1.42000
0.72000	1.13975	**1.17234**	1.44000
0.73000	1.13975	**1.18561**	1.46000
0.74000	1.13975	**1.19841**	1.48000
0.75000	1.13975	**1.21053**	1.50000
0.76000	1.13975	**1.22165**	1.52000
0.77000	1.13975	**1.23101**	1.54000
0.78000	1.13975	**1.23719**	1.56000
0.79000	1.13975	**1.23945**	1.58000

Таблица 1.1: Сопоставление оценок теорем 1 и 4

1.3.2 Дальнейшие возможности улучшения полученных результатов

Мы видим, что теоремы 3 и 4 в некотором смысле похожи. Однако в теореме 3 рассмотрены два случая, тогда как в теореме 4 — только один. Можно было бы предположить, что и в теореме 4 имеет смысл ситуация, когда $k_1 + k_{-1} - 2p \geqslant -2k_{-1}$. А вдруг в этой ситуации возникнет улучшение?

Ответ на поставленный вопрос: и да, и нет. Да, ситуация, когда $k_1 + k_{-1} - 2p \geqslant -2k_{-1}$, имеет смысл. Но соответствующая формулировка очень громоздкая, и при этом численные эксперименты показывают, что никаких улучшений она не дает. Поэтому в теореме 4 она и не выписана. Тем не менее, само утверждение представляет несомненный интерес, и теперь как раз уместно его сформулировать. Заметим, что если второй случай теоремы 3 опирался на работы Пономаренко и Райгородского [46], [47], то для новой формулировки нужна работа [48] тех же авторов.

Теорема 5. *Пусть параметры $r, b_1, b_{-1}, k_1, k_{-1}, p_0, p$ выбраны так же, как в теореме 3, только теперь $k_1 + k_{-1} - 2p \geqslant -2k_{-1}$. Пусть*

$$V_n(k_{-1}, k_1) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \colon , x_i \in \{-1, 0, 1\},\\ |\{i \colon x_i = -1\}| = k_{-1},\ |\{i \colon x_i = 1\}| = k_1\}.$$

Положим $d = k_1 + k_{-1} - 2p + 1$. Пусть $\mathfrak{m} = (m_1, m_2, m_3)$,

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_{-1,1} & m_{0,1} & m_{1,1} \\ m_{-1,2} & m_{0,2} & m_{1,2} \\ m_{-1,3} & m_{0,3} & m_{1,3} \end{pmatrix},$$

причем все элементы вектора и матрицы — натуральные числа, удовлетворяющие равенствам

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$m_{-1,1} + m_{0,1} + m_{1,1} = m_1,\ \ m_{-1,2} + m_{0,2} + m_{1,2} = m_2,\\ m_{-1,3} + m_{0,3} + m_{1,3} = m_3,\ \ m_{-1,1} + m_{-1,2} + m_{-1,3} = k_{-1},\\ m_{0,1} + m_{0,2} + m_{0,3} = n - k_1 - k_{-1},\ \ m_{1,1} + m_{1,2} + m_{1,3} = k_1,$$

и выполнено еще одно условие, для формулировки которого нам потребуются дополнительные обозначения и термины. А именно, пусть множество $\{1, \ldots, n\}$ представлено в виде объединения трех непересекающихся *частей* M_1, M_2, M_3*, мощности которых равны* m_1, m_2, m_3 *соответственно. Скажем, что вектор* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in V_n(k_{-1}, k_1)$ *удовлетворяет разбиению* $T(M_1, M_2, M_3)$*, если*

$$\begin{aligned}
&|\{i \in M_1 \colon x_i = -1\}| = m_{-1,1}, \ \ |\{i \in M_1 \colon x_i = 0\}| = m_{0,1},\\
&|\{i \in M_1 \colon x_i = 1\}| = m_{1,1},\\
&|\{i \in M_2 \colon x_i = -1\}| = m_{-1,2}, \ \ |\{i \in M_2 \colon x_i = 0\}| = m_{0,2},\\
&|\{i \in M_2 \colon x_i = 1\}| = m_{1,2},\\
&|\{i \in M_3 \colon x_i = -1\}| = m_{-1,3}, \ \ |\{i \in M_3 \colon x_i = 0\}| = m_{0,3},\\
&|\{i \in M_3 \colon x_i = 1\}| = m_{1,3}.
\end{aligned}$$

Еще одно условие, которому подчиняются параметры $\mathfrak{m}, \mathfrak{M}$*, состоит в том, что у любых двух векторов* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$*, удовлетворяющих одному и тому же разбиению, скалярное произведение не меньше* d*. Положим*

$$\begin{aligned}
&m(n, k_{-1}, k_1) = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3!} \times\\
&\times \frac{m_{-1,1}! m_{-1,2}! m_{-1,3}!}{k_{-1}!} \cdot \frac{m_{0,1}! m_{0,2}! m_{0,3}!}{(n - k_1 - k_{-1})!} \cdot \frac{m_{1,1}! m_{1,2}! m_{1,3}!}{k_1!} \cdot \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j \right),
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i, j) \colon i + j \leqslant n, \, i + 2j \leqslant p - 1\}.$$

Тогда

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{m(n, k_{-1}, k_1)}.$$

Эта оценка следует из того факта, что

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

и оценки числа независимости, которая приведена в работе [48].

1.4 Доказательства результатов

1.4.1 Доказательство теоремы 3

Начнем с обоснования оценки (1.3).

Рассмотрим дистанционный граф $G_1 = (V_1, E_1)$, где

$$V_1 = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{2p}} \right\}, x_1 + \ldots + x_n = \frac{a}{\sqrt{2p}} \right\},$$
$$E_1 = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\},$$

и точку $\left(a/(n\sqrt{2p}), \ldots, a/(n\sqrt{2p}) \right)$. Заметим, что векторы из множества V_1 удалены от этой точки на одно и то же расстояние, равное

$$r_1 = \sqrt{(n-a)\left(\frac{a}{n\sqrt{2p}}\right)^2 + a\left(\frac{1}{\sqrt{2p}} - \frac{a}{n\sqrt{2p}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a}{2p}\left(1 - \frac{a}{n}\right)}.$$

В то же время эти векторы принадлежат плоскости, которая задается уравнением $x_1 + \ldots + x_n = a/\sqrt{2p}$. Следовательно, множество V_1 лежит на сфере $S_{r_1}^{n-2}$ размерности $n-2$ радиуса r_1. Учитывая, что $p > p_0 = a(n-a)/(2nr^2)$,

$$r_1 = \sqrt{\frac{a}{2p}\left(1 - \frac{a}{n}\right)} < \sqrt{\frac{a}{2p_0}\left(1 - \frac{a}{n}\right)} = r,$$

т.е. $S_{r_1}^{n-2}$ является сечением исходной сферы. Значит, оценить хроматическое число исходной сферы S_r^{n-1} можно через неравенство

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \chi(G_1). \tag{1.6}$$

Рассмотрим граф $G_0 = (V_0, E_0)$, где

$$V_0 = \sqrt{2p} V_1, \quad E_0 = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}.$$

Очевидно, G_0 изоморфен G_1, т.е. $\chi(G_1) = \chi(G_0)$. Покажем, что для любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_0$ их скалярное произведение равно $a - p$:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2}.$$

С учетом явного вида векторов из V_0,

$$V_0 = \{\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}\}, x_1 + \ldots + x_n = a\},$$

получим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2a - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2} = a - p.$$

Докажем, что для любого независимого множества

$$W = \{\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\} \subset V_0 \colon \forall i \neq j \ \ (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq a - p\}$$

верно неравенство $s \leqslant \sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i$.

Каждому вектору $x \in V_0$ поставим в соответствие многочлен

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{\substack{i=0, \\ i \not\equiv a \pmod p}}^{p-1} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Следующей процедурой преобразуем многочлены $F_{\mathbf{x}}$ к $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$: раскрыв скобки в произведении, для каждого монома степени переменных, входящих в него, заменим единицами. Мы рассматриваем векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_0$, координаты которых — нули и единицы, а значит, для этих векторов $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \widetilde{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$.

Предположим, что многочлены $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}$, соответствующие векторам из множества W, линейно зависимы. Тогда существует такой нетривиальный набор $(c_1, \ldots, c_s)$, что для любого $y \in V_0$

$$c_1 \widetilde{F}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + c_s \widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p.$$

Заметим, что в случае $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$, где $i = 1, \ldots, s \quad (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = a \equiv a \pmod p$. Отсюда по построению многочлена $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod p$. Теперь рассмотрим $j \neq i$. Заметим, что $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \neq a$, так как векторы $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}$ различны. В то же время $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \neq a - p$ из принадлежности множеству W, а также $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) > a - 2p$, поскольку $a - 2p < 0$. Таким образом,

$$(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \not\equiv a \pmod p,$$

что обращает в 0 по модулю p выражение

$$c_1 \widetilde{F}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + c_{i-1} \widetilde{F}_{\mathbf{x}_{i-1}}(\mathbf{y}) + c_{i+1} \widetilde{F}_{\mathbf{x}_{i+1}}(\mathbf{y}) + \ldots + c_s \widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}).$$

Следовательно, $c_i \equiv 0 \pmod p$. С учетом произвольности выбора i, приходим к противоречию. Значит, мощность независимого множества W можно оценить сверху через размерность пространства полиномов $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$. Базисом данного пространства будет множество мономов вида $y_{i_1} \ldots y_{i_k}$, где $k \leqslant p - 1$ по построению исходного полинома $F_{\mathbf{x}}$. Число таких мономов, очевидно, $\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i$.

Получаем оценку числа независимости:

$$\alpha(G_0) \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i.$$

Вспомним о неравенстве (1.6), изоморфности графов G_0 и G_1 и соотношении $\chi(G) \geqslant |V(G)|/\alpha(G)$, о котором уже говорили выше:

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \chi(G_0) \geqslant \frac{C_n^a}{\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

Таким образом, первый пункт теоремы обоснован.

Оценка (1.4) опирается на теорему 2. Применяя это утверждение к графу G_0 и учитывая, что $\chi(G) \geqslant |V(G)|/\alpha(G)$, получим требуемое.

1.4.2 Доказательство теоремы 4

Рассмотрим граф $G_1 = (V_1, E_1)$, где множества вершин и ребер определены следующим образом:

$$V_1 = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2p}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2p}}\right\},\right.$$
$$\left.\left|\left\{i : x_i = -\frac{1}{\sqrt{2p}}\right\}\right| = k_{-1}, |\{i : x_i = 0\}| = k_0, \left|\left\{i : x_i = \frac{1}{\sqrt{2p}}\right\}\right| = k_1\right\},$$
$$E_1 = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\}.$$

Рассмотрим точку

$$\left(\frac{k_1 - k_{-1}}{n\sqrt{2p}}, \frac{k_1 - k_{-1}}{n\sqrt{2p}}, \ldots, \frac{k_1 - k_{-1}}{n\sqrt{2p}}\right).$$

Векторы из V_1 равноудалены от этой точки, и расстояние между ними и этой точкой равно

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{2p}\left(k_{-1}\left(-1 - \frac{k_1 - k_{-1}}{n}\right)^2 + k_1\left(1 - \frac{k_1 - k_{-1}}{n}\right)^2 + k_0\left(\frac{k_1 - k_{-1}}{n}\right)^2\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2p}\left(\left(\frac{k_1 - k_{-1}}{n}\right)^2 n + (k_{-1} + k_1) + 2k_{-1}\frac{k_1 - k_{-1}}{n} - 2k_1\frac{k_1 - k_{-1}}{n}\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2p}\frac{(k_1 + k_{-1})n - (k_1 - k_{-1})^2}{n}}.$$

При этом векторы из множества V_1 лежат на плоскости, которая задается уравнением

$$x_1 + \ldots + x_n = \frac{k_1 - k_{-1}}{\sqrt{2p}}.$$

Значит, аналогично доказательству предыдущей теоремы, множество V_1 лежит на сфере $S_{r_1}^{n-2}$ размерности $n-2$ радиуса r_1, которая является сечением исходной сферы, т.к.

$$\begin{aligned} r_1 &< \sqrt{\frac{1}{2p_0}\frac{(k_1+k_{-1})n-(k_1-k_{-1})^2}{n}} = \\ &= \sqrt{\frac{2nr^2}{2\left((k_1+k_{-1})n-(k_1-k_{-1})^2\right)}\frac{(k_1+k_{-1})n-(k_1-k_{-1})^2}{n}} = r. \end{aligned}$$

Отсюда получим неравенство

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \chi(S_{r_1}^{n-2}) \geqslant \chi(G_1). \tag{1.7}$$

Хроматическое число графа G_1 можно оценить при помощи графа $G_0 = (V_0, E_0)$, изоморфного данному, где

$$\begin{aligned} &V_0 = \sqrt{2p}V_1, \\ &E_0 = \{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} : \mathbf{x},\mathbf{y} \in V_1, |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}, \end{aligned}$$

используя равенство $\chi(G_1) = \chi(G_0)$. Заметим, что для всякого ребра $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0\} \in E_0$ выполнено, что $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| = \sqrt{2p}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|^2 &= (\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0) - 2(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) + (\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_0) = 2(k_1+k_{-1}) - 2(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0), \\ (\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) &= k_1 + k_{-1} - p. \end{aligned}$$

Для удобства обозначим максимальное скалярное произведение векторов из V_0

$$\bar{s} = \bar{s}(\{-1,0,1\}^n; k_{-1}, k_0, k_1) = k_{-1} + k_1$$

и аналогично минимальное скалярное произведение векторов этого множества

$$\underline{s} = \underline{s}(\{-1,0,1\}^n; k_{-1}, k_0, k_1).$$

Нетрудно заметить, что $\underline{s} \geqslant -2k_{-1}$.

Докажем, что для любого независимого множества

$$W = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\} \subset V_0 : \forall i \neq j \;\; (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq k_1 + k_{-1} - p$$

верно неравенство

$$s \leqslant \sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{A}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2},$$

где

$$\mathcal{A} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_1 + m_2 \leqslant n, m_1 + 2m_2 \leqslant p - 1\}.$$

Каждому вектору $\mathbf{x} \in V_0$ ставим в соответствие многочлен

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i=\bar{s}-p+1}^{\bar{s}-1} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Заметим, что для любой пары векторов из V_0 их скалярное произведение $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \bar{s} \pmod p$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \bar{s}$ или $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \bar{s} - p$. Действительно, с одной стороны, из определения $\bar{s}$ скалярное произведение не превосходит $\bar{s}$, а с другой стороны, из условия теоремы следует, что $\bar{s} - 2p < -2k_{-1} \leqslant \underline{s}$. Следовательно, для любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_0$

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv \bar{s} \pmod p.$$

Теперь преобразуем многочлены $F_{\mathbf{x}}$ к $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$ следующим образом: раскрываем скобки в произведении и в каждом мономе нечетные степени переменных заменяем единицами, а четные — двойками. Учитывая, что координаты векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_0$, которые мы рассматриваем, принимают значения $\{-1, 0, 1\}$, многочлены $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ и $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ равны на множестве этих векторов.

Покажем, что для векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s$, принадлежащих независимому множеству W, многочлены $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}$, которые им соответствуют, линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Пусть эта система многочленов линейно зависима. Это означает, что существует нетривиальная линейная комбинация

$$c_1 \widetilde{F}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + c_s \widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p.$$

Рассмотрим эту линейную комбинацию, выбрав в качестве аргумента любой из векторов $\mathbf{x}_i, i = 1, \ldots, s$ независимого множества W.

Очевидно, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \bar{s}$, а значит, $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \not\equiv 0 \pmod p$. Для любого $j \neq i$ верно, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq \bar{s} - p$, так как это элементы независимого множества, и $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq \bar{s}$, так как эти векторы разные. Следовательно, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \not\equiv \bar{s} \pmod p$, и

$$\widetilde{F}_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_i) \equiv 0 \pmod p.$$

Таким образом, $c_i \equiv 0 \pmod p$. Ввиду произвольности выбора i приходим к противоречию в существовании нетривиальной линейной комбинации.

Значит, размер независимого множества можем оценить через размерность пространства полиномов $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$. Базисом данного пространства является множество мономов вида

$$y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots y_{i_k}^{\alpha_{i_k}}, \alpha_{i_l} \in \{1, 2\}, \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} \leqslant p - 1,$$

поскольку $\deg(\widetilde{F}_{\mathbf{x}}) \leqslant \deg(F_{\mathbf{x}}) \leqslant p - 1$. При подсчете числа таких мономов сначала выберем m_1 переменных, которые войдут в моном первой степени, а потом из оставшихся $n - m_1$ переменных выбираем m_2, которые войдут во второй степени. Таким образом, $m_1 + m_2 \leqslant n$, и, в силу уже обозначенного ограничения на степень монома, $m_1 + 2m_2 \leqslant p - 1$. Получаем неравенство

$$s \leqslant \sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{A}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2},$$

где

$$\mathcal{A} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_1 + m_2 \leqslant n, m_1 + 2m_2 \leqslant p - 1\}.$$

Используя неравенство $\chi(G) \geqslant |V(G)|/\alpha(G)$, получим оценку из условия теоремы.

Глава 2

Хроматические числа сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q

Данная глава посвящена оценкам хроматического числа сферы $\chi(S_r^{n-1}; l_q)$, определяемого как минимальное число цветов, необходимое для покраски сферы S_r^{n-1} в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q таким образом, что любые две точки на расстоянии 1 были покрашены в разные цвета. Основными результатами данной главы являются теоремы 6 и 7. Данные результаты были сформулированы и доказаны в работе [53].

2.1 Формулировка полученных оценок и численные результаты

Наш основной результат базируется на применении линейно-алгебраического метода к определенным дистанционным графам. Первая из доказанных нами теорем касается случая, когда вершинами графа являются векторы с координатами, равными 0 или 1 (то есть векторы, лежащие на булевом кубе).

Теорема 6. *Пусть $r > 1/2$, $q \in \mathbb{N}$, $c \in [0,1]$ и $k_1 \leqslant n/2$ — натуральное число. Положим $k_0 = n - k_1$ и*

$$p_0 = p_0(r, k_1, n, q, c) = \frac{1}{2r^q}\bigg(k_1\,(1-c)^q + k_0 c^q\bigg).$$

Пусть $p = p(r, q, k_1, n, q, c)$ — минимальное простое число, строго большее, чем p_0. Если при этом $2p > k_1$, то

$$\chi(S_r^{n-1}; l_q) \geqslant \frac{C_n^{k_1}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_n^k}. \tag{2.1}$$

Данный результат мы докажем в параграфе 2.2.1.

Следующая теорема получена при помощи дистанционного графа, вершинами которого являются векторы с координатами из множества $\{-1, 0, 1\}$.

Теорема 7. *Пусть* $r > 1/2, q \in \mathbb{N}, \ c \in [0,1]$, *а* k_1, k_{-1}, k_0 — *такие целые неотрицательные числа, что* $k_1 + k_{-1} + k_0 = n$. *Положим*

$$p_0 = p_0(r, k_1, k_{-1}, n, q, c) = \frac{1}{2r^q}\bigg(k_1 (1-c)^q + k_{-1} (1+c)^q + k_0 c^q\bigg).$$

Пусть $p = p(r, k_1, k_{-1}, n, q, c)$ — *минимальное простое число, строго большее, чем* p_0. *Если при этом* $2p > 2^q k_{-1} + \min(k_1 - k_{-1}, k_0)$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}; l_q) \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} 2^k C_n^k}. \tag{2.2}$$

Данный результат мы докажем в параграфе 2.2.2, а пока обсудим численные результаты теорем 6 и 7. Для начала отметим, что в случае $q = 2$ имеются гораздо более сильные аналоги этих результатов — теоремы 3 и 4. Данные результаты основаны на запрете скалярного произведения, а не расстояния, это позволяет получать многочлены более низких степеней при использовании линейно-алгебраического метода. Поэтому в таблицах ниже мы будем приводить оценки этих теорем для случая $q = 2$.

Далее, при помощи стандартных методов асимптотического анализа и формулы Стирлинга легко убедиться, что оценки теорем 3, 4, 6 и 7 имеют вид $\chi(S_r^{n-1}; l_q) \geqslant (c(q,r) + o(1))^n$ при $n \to \infty$. В таблицах 2.1 и 2.2 приведена величина данной константы $c(q,r)$ в основании экспоненты для разных радиусов $r \in [0.5, 1]$ и $q \in \{1, 2, 3, 5\}$. Первая таблица представляет собой численное выражение максимума из оценок теорем 1 и 6, вторая — максимума из оценок теоремы 4 и 7. Видно, что наилучшие оценки получаются при $q = 1$, где наблюдается плавный рост константы $c(1,r)$ вплоть до $r = 1$. При этом теорема 6 менее полезна, и $(-1,0,1)$-векторы оказываются более пригодными для получения хороших оценок. При $q = 2$, как было сказано выше, наилучший результат дают теоремы 1 и 4. При больших q оценки теоремы 7 имеют меньшую величину, здесь начинает по существу работать условие $2p > 2^q k_{-1} + \min((k_1 - k_{-1}), k_0)$. В то же время условие $2p > k_1$ теоремы 6 оказывается меньшим ограничением, так что при больших q использование $(0,1)$-векторов более оправданно. Отметим, что оптимальное значение

r	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=5$
0.50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.52	1.0110	1.0028	1.0060	1.0159
0.54	1.0217	1.0102	1.0215	1.0531
0.56	1.0320	1.0209	1.0429	1.1014
0.58	1.0421	1.0339	1.0681	1.1543
0.60	1.0520	1.0485	1.0958	1.1917
0.62	1.0616	1.0644	1.1248	1.2066
0.64	1.0709	1.0810	1.1540	1.2071
0.66	1.0800	1.0983	1.1776	1.2071
0.68	1.0889	1.1157	1.1945	1.2071
0.70	1.0976	1.1334	1.2042	1.2071
0.72	1.1061	1.1508	1.2071	1.2071
0.74	1.1144	1.1664	1.2071	1.2071
0.76	1.1225	1.1800	1.2071	1.2071
0.78	1.1304	1.1912	1.2071	1.2071
0.80	1.1381	1.1996	1.2071	1.2071
0.82	1.1457	1.2051	1.2071	1.2071
0.84	1.1531	1.2071	1.2071	1.2071
0.86	1.1603	1.2071	1.2071	1.2071
0.88	1.1674	1.2071	1.2071	1.2071
0.90	1.1744	1.2071	1.2071	1.2071
0.92	1.1812	1.2071	1.2071	1.2071
0.94	1.1879	1.2071	1.2071	1.2071
0.96	1.1944	1.2071	1.2071	1.2071
0.98	1.2008	1.2071	1.2071	1.2071
1.00	1.2071	1.2071	1.2071	1.2071

Таблица 2.1: Максимум из оценок теорем 1 и 6

параметра c при больших q практически всегда отличается от тривиального случая $c = 0$. Расчет численных результатов производился при помощи библиотеки SciPy языка Python.

Наконец, в качестве любопытного следствия можно получить оценки для хроматического числа евклидовой сферы $S_r^{n-1}(l_2)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q, $q \in \mathbb{N}$. Мы обозначим данную величину $\chi(S_r^{n-1}(l_2); l_q)$. Повторяя практически дословно доказательства теорем 6 и 7, можно установить, что справедливы следующие два утверждения.

Теорема 8. *Пусть $r > 1/2$, $q \in \mathbb{N}$, $c \in [0,1]$ и $k_1 \leqslant n/2$ — натуральное число. Положим $k_0 = n - k_1$ и*

$$p_0 = p_0(r, k_1, n, c) = \frac{1}{2r^2}\left(k_1\,(1-c)^2 + k_0 c^2\right).$$

r	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=5$
0.50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.52	1.0183	1.0000	1.0000	1.0000
0.54	1.0363	1.0000	1.0000	1.0000
0.56	1.0538	1.0000	1.0000	1.0000
0.58	1.0710	1.0002	1.0000	1.0000
0.60	1.0879	1.0131	1.0000	1.0413
0.62	1.1044	1.0358	1.0000	1.0842
0.64	1.1206	1.0620	1.0000	1.1068
0.66	1.1365	1.0893	1.0152	1.1123
0.68	1.1521	1.1170	1.0470	1.1100
0.70	1.1674	1.1448	1.0724	1.1123
0.72	1.1823	1.1723	1.0918	1.1123
0.74	1.1970	1.1984	1.1040	1.1123
0.76	1.2115	1.2216	1.1109	1.1123
0.78	1.2256	1.2371	1.1123	1.1123
0.80	1.2396	1.2394	1.1123	1.1123
0.82	1.2532	1.2394	1.1123	1.1123
0.84	1.2666	1.2394	1.1123	1.1123
0.86	1.2798	1.2394	1.1123	1.1123
0.88	1.2928	1.2394	1.1123	1.1123
0.90	1.3055	1.2394	1.1123	1.1123
0.92	1.3180	1.2394	1.1123	1.1123
0.94	1.3303	1.2394	1.1123	1.1123
0.96	1.3424	1.2394	1.1123	1.1123
0.98	1.3543	1.2394	1.1123	1.1123
1.00	1.3660	1.2394	1.1123	1.1123

Таблица 2.2: Максимум из оценок теорем 4 и 7

Пусть $p = p(r, q, k_1, n, c)$ *— минимальное простое число, строго большее, чем* p_0. *Если при этом* $2p > k_1$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}(l_2); l_q) \geqslant \frac{C_n^{k_1}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_n^k}.$$

Теорема 9. *Пусть* $r > 1/2, q \in \mathbb{N},\ c \in [0,1]$, *а* k_1, k_{-1}, k_0 *— такие целые неотрицательные числа, что* $k_1 + k_{-1} + k_0 = n$. *Положим*

$$p_0 = p_0(r, k_1, k_{-1}, n, c) = \frac{1}{2r^2}\bigg(k_1\,(1-c)^2 + k_{-1}\,(1+c)^2 + k_0 c^2\bigg).$$

Пусть $p = p(r, k_1, k_{-1}, n, c)$ *— минимальное простое число, строго большее,* *чем* p_0. *Если при этом* $2p > 2^q k_{-1} + \min((k_1 - k_{-1}), k_0)$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}(l_2); l_q) \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} 2^k C_n^k}.$$

Отметим, во-первых, что оценка теоремы 8 вообще не зависит от параметра q. Кроме того, очевидно, что при $q = 2$ данные утверждения попросту совпадают с теоремами 6 и 7, поэтому мы не будем рассматривать случай $q = 2$. Ниже представлена таблица 2.3, в которой приведен максимум из численных выражений оценок теорем 8 и 9. Оказывается, что теорема 8 сильнее почти всегда, исключая большие значения радиусов при $q = 1$. Также заметим, что при численных расчетах параметр c также был отличен от 0 практически при всех r и q.

2.2 Доказательства результатов

2.2.1 Доказательство теоремы 6

Идея доказательства заключается в том, чтобы построить дистанционный граф, вершины которого лежат на сфере, и оценить сверху число независимости такого графа. Это даст оценку снизу хроматического числа графа, а стало быть, и хроматического числа сферы.

Рассмотрим граф $G_1^q = (V_1^q, E_1^q)$, где

$$V_1^q = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \left\{0, \frac{1}{(2p)^{1/q}}\right\}, |\{i : x_i = 0\}| = k_0, \right.$$
$$\left. \left| \left\{ i : x_i = \frac{1}{(2p)^{1/q}} \right\} \right| = k_1 \right\},$$

$$E_1^q = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1^q, d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^q = 1 \right\}.$$

Заметим, что все векторы из множества V_1^q равноудалены от вектора $\mathbf{o} =$

r	$q = 1$	$q = 3$	$q = 5$
0.50	1.0000	1.0000	1.0000
0.52	1.0027	1.0027	1.0027
0.54	1.0101	1.0101	1.0101
0.56	1.0208	1.0208	1.0208
0.58	1.0338	1.0338	1.0338
0.60	1.0485	1.0485	1.0485
0.62	1.0643	1.0643	1.0643
0.64	1.0810	1.0810	1.0810
0.66	1.0982	1.0982	1.0982
0.68	1.1157	1.1157	1.1157
0.70	1.1334	1.1334	1.1334
0.72	1.1508	1.1508	1.1508
0.74	1.1664	1.1664	1.1664
0.76	1.1800	1.1800	1.1800
0.78	1.1912	1.1912	1.1912
0.80	1.1996	1.1996	1.1996
0.82	1.2051	1.2051	1.2051
0.84	1.2071	1.2071	1.2071
0.86	1.2071	1.2071	1.2071
0.88	1.2217	1.2071	1.2071
0.90	1.2464	1.2071	1.2071
0.92	1.2709	1.2071	1.2071
0.94	1.2951	1.2071	1.2071
0.96	1.3190	1.2071	1.2071
0.98	1.3427	1.2071	1.2071
1.00	1.3427	1.2071	1.2071

Таблица 2.3: Максимум из оценок теорем 8 и 9

$\left(\dfrac{c}{(2p)^{1/q}}, \ldots, \dfrac{c}{(2p)^{1/q}}\right)$. В самом деле, для любого вектора $\mathbf{x}$ из множества V_1^q

$$d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - o_i|^q = k_1 \left| \frac{1}{(2p)^{1/q}} - \frac{c}{(2p)^{1/q}} \right|^q + k_0 \left| \frac{c}{(2p)^{1/q}} \right|^q =$$
$$= \frac{1}{2p}\left(k_1 (1-c)^q + k_0 c^q\right).$$

Таким образом, все векторы из V_1^q лежат на сфере $S_{r_1}^{n-2}$, где

$$r_1 = \left(\frac{1}{2p}\left(k_1 (1-c)^q + k_0 c^q\right)\right)^{1/q} < \left(\frac{1}{2p_0}\left(k_1 (1-c)^q + k_0 c^q\right)\right)^{1/q} = r,$$

следовательно, сфера $S_{r_1}^{n-2}$ является сечением сферы S_r^{n-1}, и мы можем оценить хроматическое число сферы S_r^{n-1} следующим образом:

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \chi(S_{r_1}^{n-2}) \geqslant \chi(G_1^q). \tag{2.3}$$

Рассмотрим граф $G_0^q = (V_0^q, E_0^q)$, изоморфный графу G_1 :

$$V_0^q = \Big\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in \{0, 1\}\,, |\{i : x_i = 0\}| = k_0, |\{i : x_i = 1\}| = k_1\Big\},$$

$$E_0^q = \Big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}\colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_0^q,\ d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^q = 2p\Big\}.$$

Для любых двух несовпадающих векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_0^q$ расстояние между ними (в степени q) лежит в диапазоне от 2 до $\bar{d} = 2k_1$. Отметим, что $2 \cdot 2p > \bar{d}$ и тот факт, что $d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ принимает только четные значения.

Докажем, что для любого независимого множества

$$W = \big\{\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\} \subset V_0^q : \forall i \neq j \ \ d_q^q(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 2p\big\}$$

верно неравенство

$$s \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k.$$

Несложно проверить, что на множестве V_0^q значения $d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ совпадают со значениями многочлена

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

Каждому вектору $\mathbf{x} \in V_0^q$ ставим в соответствие многочлен

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{p-1} (2i - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \pmod{p}.$$

Далее сделаем следующее преобразование: в каждом многочлене $F_{\mathbf{x}}$ раскроем скобки и заменим все степени мономов на 1. Полученный таким образом многочлен будем обозначать $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$. Очевидно, что на векторах из V_0^q значения $F_{\mathbf{x}}$ и $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$ совпадают.

Покажем, что многочлены $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}$, соответствующие представителям множества W, линейно независимы. Пусть это неверно, тогда существует нетривиальный набор $(c_1, \ldots, c_s)$, с которым для всякого $\mathbf{y} \in V_0^q$

$$c_1 \widetilde{F}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + \widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Возьмем $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$. Поскольку $d_q(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 0$, то $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \not\equiv 0 \pmod p$. С другой стороны, при $i \neq j$ многочлен $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod p$ в силу определения многочлена $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}$ и множества W, а также того факта, что $2 \cdot 2p > \bar{d}$. Стало быть, коэффициент $c_i \equiv 0 \pmod p$, и в силу произвольности выбора индекса i приходим к противоречию.

Значит, для оценки размера независимого множества достаточно оценить размерность пространства многочленов $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$. Базис данного пространства представляют мономы вида $y_{i_1} \dots y_{i_k}$, где $k \leqslant p-1$. При фиксированном k число способов выбрать переменные $y_{i_1}, \dots, y_{i_k}$ для одного монома равно, очевидно, C_n^k. Это и дает требуемую оценку числа независимости графа G_0^q:

$$\alpha(G_0^q) \leqslant s \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k.$$

С учетом оценки (1.1), неравенства (2.3), а также изоморфности графов G_0^q и G_1^q окончательно имеем:

$$\chi(S_r^{n-1}; l_q) \geqslant \chi(S_{r_1}^{n-2}; l_q) \geqslant \chi(G_1^q) = \chi(G_0^q) \geqslant \frac{|V(G_0^q)|}{\alpha(G_0^q)} \geqslant \frac{C_n^{k_1}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_n^k}.$$

Данная цепочка неравенств завершает доказательство теоремы.

2.2.2 Доказательство теоремы 7

Доказательство этой теоремы будет в значительной мере напоминать доказательство теоремы 6, однако теперь в качестве вершин графа G_0^q будут рассматриваться $(-1, 0, 1)$-векторы. Поэтому некоторые места доказательства незначительно усложнятся.

Итак, подобно доказательству предыдущей теоремы рассмотрим граф $G_1^q = (V_1^q, E_1^q)$, где

$$\begin{aligned} V_1^q = \Bigg\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \colon x_i \in \left\{ \pm \frac{1}{(2p)^{1/q}}, 0 \right\}, \left| \left\{ i : x_i = -\frac{1}{(2p)^{1/q}} \right\} \right| = k_{-1}, \\ |\{i : x_i = 0\}| = k_0, \left| \left\{ i : x_i = \frac{1}{(2p)^{1/q}} \right\} \right| = k_1 \Bigg\}, \\ E_1^q = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1^q, d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^q = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что все векторы из множества V_1^q равноудалены от вектора $\mathbf{o} = \left(\dfrac{c}{(2p)^{1/q}}, \dots, \dfrac{c}{(2p)^{1/q}}\right)$. Действительно, для любого вектора $\mathbf{x}$ из множества V_1^q

$$
\begin{aligned}
d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{o}) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - o_i|^q = \\
&= k_1 \left|\frac{1}{(2p)^{1/q}} - \frac{c}{(2p)^{1/q}}\right|^q + k_{-1} \left|-\frac{1}{(2p)^{1/q}} - \frac{c}{(2p)^{1/q}}\right|^q + k_0 \left|\frac{c}{(2p)^{1/q}}\right|^q = \\
&= \frac{1}{2p}\Big(k_1\,(1-c)^q + k_{-1}\,(1+c)^q + k_0 c^q\Big)
\end{aligned}
$$

Таким образом, все векторы из V_1^q лежат на сфере $S_{r_1}^{n-2}$, где

$$
r_1 = \left(\frac{1}{2p}\Big(k_1\,(1-c)^q + k_{-1}\,(1+c)^q + k_0 c^q\Big)\right)^{1/q} < \\
< \left(\frac{1}{2p_0}\Big(k_1\,(1-c)^q + k_{-1}\,(1+c)^q + k_0 c^q\Big)\right)^{1/q} = r,
$$

следовательно, сфера $S_{r_1}^{n-2}$ является сечением сферы S_r^{n-1}, и мы можем оценить хроматическое число сферы S_r^{n-1} следующим образом:

$$
\chi(S_r^{n-1}; l_q) \geqslant \chi(S_{r_1}^{n-2}; l_q) \geqslant \chi(G_1^q). \tag{2.4}
$$

Рассмотрим граф $G_0^q = (V_0^q, E_0^q)$, изоморфный графу G_1^q:

$$
V_0^q = \Big\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \colon x_i \in \{-1, 0, 1\}, \\
|\{i : x_i = -1\}| = k_{-1}, |\{i : x_i = 0\}| = k_0, |\{i : x_i = 1\}| = k_1\Big\},
$$

$$
E_0^q = \Big\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_0^q,\ d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^q = 2p\Big\}.
$$

Для любых двух несовпадающих векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_0^q$ расстояние между ними (в степени q) лежит в диапазоне от 2 до $\bar{d} = 2^{q+1}k_{-1} + 2\min(k_1 - k_{-1}, k_0)$. Отметим, что $2 \cdot 2p > \bar{d}$ и тот факт, что $d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ принимает только четные значения.

Докажем, что для любого независимого множества

$$
W = \big\{\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset V_0^q : \forall i \neq j \ \ d_q^q(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 2p\big\}
$$

верно неравенство

$$s \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} 2^k C_n^k.$$

Несложно проверить, что на множестве V_0^q значения $d_q^q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ совпадают со значениями многочлена

$$f(x, y) = 2^{q-1}x^2y^2 - 2^{q-1}xy - 2x^2y^2 + x^2 + y^2.$$

Каждому вектору $\mathbf{x} \in V_0^q$ ставим в соответствие многочлен

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{p-1}(2i - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \pmod p.$$

Далее сделаем следующее преобразование: в каждом многочлене $F_{\mathbf{x}}$ раскроем скобки и заменим все четные степени мономов на 2, а все нечетные — на 1. Полученный таким образом многочлен будем обозначать $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$. Очевидно, что на векторах из V_0^q значения $F_{\mathbf{x}}$ и $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$ совпадают.

Покажем, что многочлены $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}$, соответствующие представителям множества W, линейно независимы. Пусть это неверно, тогда существует нетривиальный набор $(c_1, \ldots, c_s)$, с которым для всякого $\mathbf{y} \in V_0^q$

$$c_1\widetilde{F}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + \widetilde{F}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p.$$

Возьмем $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$. Поскольку $d_q(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 0$, то $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \not\equiv 0 \pmod p$. С другой стороны, при $i \neq j$ многочлен $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod p$ в силу определения многочлена $\widetilde{F}_{\mathbf{x}_i}$ и множества W, а также того факта, что $2 \cdot 2p > \bar{d}$. Стало быть, коэффициент $c_i \equiv 0 \pmod p$, и в силу произвольности выбора индекса i приходим к противоречию.

Значит, для оценки размера независимого множества достаточно оценить размерность пространства многочленов $\widetilde{F}_{\mathbf{x}}$. Базис данного пространства представляют мономы вида $y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots y_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$, где $k \leqslant p - 1$, а степени $\alpha_{i_j} \in \{1, 2\}$. При фиксированном k число способов выбрать переменные $y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}$ для одного монома равно, очевидно, C_n^k, и для каждой переменной y_{i_j} имеется ровно 2 варианта выбора степени α_{i_j}. Это и дает требуемую оценку числа независимости графа G_0^q:

$$\alpha(G_0^q) \leqslant s \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k 2^k.$$

С учетом оценки (1.1), неравенства (2.4), а также изоморфности графов G_0^q и G_1^q окончательно имеем:

$$\chi(S_r^{n-1}; l_q) \geqslant \chi(S_{r_1}^{n-2}) \geqslant \chi(G_1^q) = \chi(G_0^q) \geqslant \frac{|V(G_0^q)|}{\alpha(G_0^q)} \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_n^k 2^k}.$$

Данная цепочка неравенств завершает доказательство теоремы.

Глава 3

Контрпримеры к гипотезе Борсука на сфере

Данная глава посвящена контрпримерам к гипотезе Борсука на сфере и, в частности, оценкам величины $f_r(d)$, определяемой как минимальное число частей диаметра, меньшего 1, на которые можно разбить всякое поднмножество сферы S_r^{d-1} диаметра 1. Основными результатами данной главы являются теоремы 11 и 12. Данные результаты были сформулированы и доказаны в работе [54].

3.1 Формулировки вспомогательных результатов

Сперва напомним определения величин $f(A), f(d)$ и $f_r(d)$:

$$f(A) = \min\{f\colon A = A_1 \cup \ldots \cup A_f, \operatorname{diam} A_i < \operatorname{diam} A\};$$
$$f(d) = \max_{A \subset \mathbb{R}^d, \operatorname{diam} A = 1} f(A);$$
$$f_r(d) = \max_{A \subset \mathbb{S}_r^{d-1}, \operatorname{diam} A = 1} f(A).$$

Здесь под диаметром множества $A \subset \mathbb{R}^d$ здесь мы понимаем величину

$$\operatorname{diam} A = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Гипотеза Борсука в случае пространства $\mathbb{R}^n$ формулируется совсем просто: $f(d) = d + 1$. Аналогичная гипотеза может быть сформулирована в случае сферы: $f_r(d) = d + 1$. Данная гипотеза была опровергнута в работе [15].

Теорема 10. *Для всякого $r > 1/2$ существуют $k = k(r) \in \mathbb{N}$, $c = c(r) > 1$ и функция $\delta = \delta(d) = o(1)$ такие, что*

$$f_r(d) \geqslant (c + \delta)^{\sqrt[2k]{d}}. \tag{3.1}$$

Хотя данная теорема показывает, что величина $f_r(d)$ растет существенно быстрее, чем $d+1$, константа в основании оценки (3.1), по-видимому, далека от оптимального значения. В данной главе мы продолжим исследование гипотезы Борсука на сфере и нашей основной целью будет улучшение оценки теоремы 10. Однако, прежде чем переходить к формулировке полученных результатов, обсудим численное выражение оценки из данной теоремы.

Разумеется, наиболее важным параметром в приведенном выше результате является функция $k(r)$, поскольку именно она определяет порядок роста оценки (3.1). Довольно очевидно, что если $k_1(r) < k_2(r)$, то функция $(c_1+\delta)^{\sqrt[2k_1]{d}}$ растет быстрее функции $(c_2+\delta)^{\sqrt[2k_2]{d}}$ при $d \to \infty$ для любых значений констант c_1 и c_2. Функция $k(r)$ в доказательстве данной теоремы определяется следующим образом:

$$k = k(r) = \min\left\{k' \in \mathbb{N} \colon r^2 > \frac{2k'+1}{8k'}\right\}.$$

Теперь легко видеть, что при $\sqrt{3/8} < r$ данная функция будет равна 1, при $\sqrt{5/16} < r \leqslant \sqrt{3/8}$ мы получим $k(r) = 2$, и так далее. При этом константы в основании экспоненты в оценке корректно сравнивать только на одинаковых “участках” (то есть при одинаковых k), и, более того, довольно логичным кажется предположение, что вблизи “ступенек” вида $\sqrt{(2k'+1)/(8k')}$, где $k' \in \mathbb{N}$, мы получим падение константы c. Данное предположение легко проверяется численно, и ниже приведена таблица, в которой для $0.51 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2}$ указаны значения функции $k(r)$ и значения константы в основании экспоненты $c(r)$.

Для большей наглядности мы также приводим график фнукции $c(r)$, на котором отчетливо видно “ступеньки”, отвечающие за изменение функции $k(r)$.

В следующем разделе мы сформулируем новые результаты, полученные нами. В разделах 3.3 и 3.4 будет проведено доказательство данных результатов. Наконец, в разделе 3.5 мы обсудим численные выражения полученных оценок и выбор оптимальных параметров в представленных нами теоремах.

3.2 Формулировки результатов

Наиболее простая идея улучшения оценки Купавского–Райгородского состоит в следующем. В доказательстве теоремы 10 используются $(-1,1)$-векторы с равным количеством положительных и отрицательных координат, поэтому

r	$k(r)$	$c(r)$
0.510	13	1.0000005
0.520	7	1.0000140
0.530	5	1.0000766
0.535	4	1.0000598
0.536	4	1.0000868
0.537	4	1.0001184
0.538	4	1.0001544
0.539	4	1.0001944
0.540	4	1.0002384
0.542	3	1.0000124
0.544	3	1.0000499
0.546	3	1.0001110
0.548	3	1.0001941
0.550	3	1.0002980
0.552	3	1.0004211
0.554	3	1.0005622
0.556	3	1.0007203
0.558	3	1.0008941
0.560	2	1.0000043
0.570	2	1.0004968
0.580	2	1.0016989
0.590	2	1.0034858
0.600	2	1.0057660
0.610	2	1.0084779
0.620	1	1.0006819
0.630	1	1.0035464
0.640	1	1.0085262
0.650	1	1.0155692
0.660	1	1.0247235
0.670	1	1.0361867
0.680	1	1.0504288
0.690	1	1.0685623
0.700	1	1.0941122
$1/\sqrt{2}$	1	1.1397535

Таблица 3.1: Оценка теоремы 10

логичным представляется использовать произвольные доли единиц и минус единиц. Кроме того, при доказательстве теоремы 10 используется сфера с центром в начале координат, мы же попробуем рассмотреть более общую ситуацию.

Прежде чем сформулировать полученный нами результат, введем ряд необ-

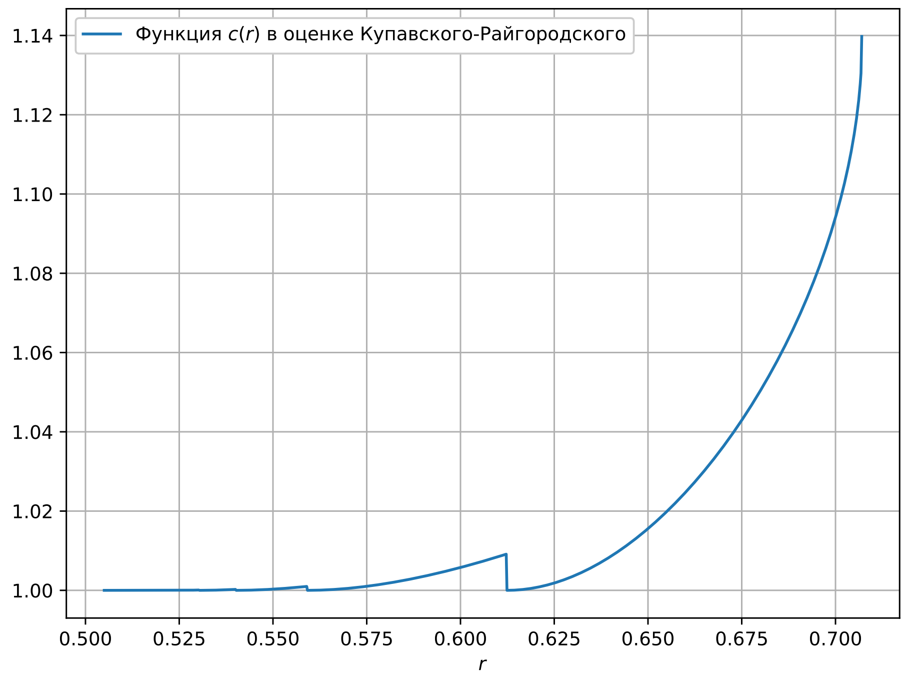

Рис. 3.1: График функции $c(r)$ из теоремы 10

ходимых обозначений. Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы. Зададим действительные числа $k'_1 \geqslant k'_{-1}$, удовлетворяющие соотношению $k'_1 + k'_{-1} = 1$, произвольное действительное число α, а также функцию $g'(k) = 1/2 - (k'_1 - k'_{-1})^{2k}/2$ (считая числа k'_1 и k'_{-1} фиксированными, мы опускаем зависимость от этих параметров). Определим натуральное число k из соотношения

$$k = \min\left\{k' \in \mathbb{N} \colon \frac{(\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k') + 2k'}{8k'} < r^2\right\}.$$

Данное определение является корректным, поскольку $r > 1/2$, а выражение, стоящее в левой части неравенства, стремится к $1/4$ при $k' \to \infty$. Зададим

$$n = \max\{m \colon m \equiv 0 \pmod 4,\ \sum_{i=0}^{2k} C_m^i < d\}$$

Обозначим $k_1 = [k'_1 n],\ k_{-1} = n - k_1$.

Далее, рассмотрим функцию $u(a)$:

$$u(a) = \frac{(\alpha+1)^2 g'(k) + (\alpha-1)^2(1-g'(k)) + 2ka^{2k-1}}{2 + 4ka^{2k-1} + (4k-2)a^{2k}}.$$

Заметим, что данная функция непрерывна на отрезке $[0,1]$, при этом в силу определения параметра k

$$u(1) = \frac{(\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k) + 2k}{8k} < r^2.$$

Заметим, что $u(0) = (\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k)$, и допустим, что $u(0) > r^2$. В таком случае уравнение

$$u(a) = r^2$$

имеет по меньшей мере одно решение. Обозначим $a_0 \in (0,1)$ минимальное решение данного уравнения. Наконец, пусть a минимальное натуральное число, большее $a_0 n$, при котором $p = \frac{a}{4} + \frac{n}{4}$ является простым числом. Заметим, что последнее ограничение не является существенным с точки зрения выбора a при $d \to \infty$. Действительно, известно, что между числами x и $x + O(x^{0.525})$ всегда найдется простое число (см. [49]), поэтому мы можем подобрать такое значение параметра d (и, соответственно, параметра n), что $p = \frac{a}{4} + \frac{n}{4}$ будет простым числом, при этом a асимптотически будет вести себя как $a_0 n$. Обозначим $p' = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{4}$. В таком случае ясно, что $p \sim p'n$.

Теперь мы можем перейти к формулировке теоремы.

Теорема 11. *Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы S_r^{d-1}, а величины k_1', k_{-1}', α, k и p' определены выше. При $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$ определим выражение $c_x^y = \frac{x^x}{y^y (x-y)^{x-y}}$ (здесь при необходимости формально $0^0 = 1$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k_1'}}{c_1^{p'}} + o(1) \right)^{\sqrt[2k]{d \cdot (2k)!}}.$$

Данную теорему мы докажем в разделе 3.3. Заметим, что от ε в формулировке теоремы 11 можно избавиться, но это требует значительно более громоздких формулировок, а на численных результатах не отразится. Поэтому в настоящей работе мы доказываем именно такой результат.

Следующая идея улучшения заключается в том, чтобы расширить класс векторов, на которых строится доказательство, и использовать $(-1,0,1)$-векторы. Мы уже видели в предыдущих главах, что данные векторы очень полезны, поэтому их использование в нашей задаче также выглядит логичным. Идея доказательства соответствующего результата близка к идее доказательства теоремы 11, но требует использования большего числа параметров.

Итак, зафиксируем неотрицательные действительные числа k'_1, k'_{-1}, k'_0, удовлетворяющие соотношениям $k'_1 + k'_{-1} + k'_0 = 1$ и $k'_1 \geqslant k'_{-1}$. Пусть

$$\begin{aligned} g'_0(k) &= 1 - (k'_1 + k'_{-1})^{2k}; \\ g'_+(k) &= \frac{(k'_1 + k'_{-1})^{2k} + (k'_1 - k'_{-1})^{2k}}{2}; \\ g'_-(k) &= \frac{(k'_1 + k'_{-1})^{2k} - (k'_1 - k'_{-1})^{2k}}{2}. \end{aligned}$$

Здесь для упрощения записи мы опускаем зависимость функций g'_0, g'_- и g'_+ от параметров k'_1, k'_{-1} и k'_0, которые предполагаем фиксированными. Пусть α — произвольное действительное число. Введем функцию $u_1(k')$:

$$u_1(k') = \frac{(\alpha+1)^2 g'_-(k') + (\alpha-1)^2 g'_+(k') + \alpha^2 g'_0(k') + 2k'(k'_{-1} + k'_1)}{2(k'_1 + k'_{-1})^{2k'} + 4k'(k'_1 + k'_{-1} + 1) - 2}.$$

Определим натуральное число k из соотношения

$$k = \min\left\{k' \in \mathbb{N} \colon u_1(k') < r^2\right\}.$$

Покажем, что данное определение корректно. В самом деле, если $k'_{-1} + k'_1 = 1$, то мы находимся в ситуации предыдущей теоремы, и корректность доказана. В противном случае легко установить пределы функций $g'_0(k'), g'_-(k')$ и $g'_+(k')$ при $k' \to \infty$:

$$\begin{gathered} \lim_{k' \to \infty} g'_0(k') = 1; \\ \lim_{k' \to \infty} g'_+(k') = \lim_{k' \to \infty} g'_-(k') = 0. \end{gathered}$$

Данные соотношения позволяют вычислить предел $\lim\limits_{k' \to \infty} u_1(k')$ при фиксированных параметрах k'_1, k'_{-1}, k'_0 и α:

$$\lim_{k' \to \infty} u_1(k') = \lim_{k' \to \infty} \frac{2k'(k'_1 + k'_{-1})}{4k'(1 + k'_1 + k'_{-1})} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1 + k'_1 + k'_{-1}}\right) < 1/4,$$

что доказывает корректность определения параметра k. Зададим

$$n = \max\{m \in \mathbb{N} \colon \sum_{i_1 + 2i_2 \leqslant 2k} C_m^{i_1} C_{m-i_1}^{i_2} < d\}$$

и обозначим $k_1 = [k'_1 n],\ k_{-1} = [k'_{-1} n],\ k_0 = n - k_1 - k_{-1}$.

Аналогично предыдущей теореме рассмотрим функцию $u(a)$:

$$u(a) = \frac{(\alpha+1)^2 g'_-(k) + (\alpha-1)^2 g'_+(k) + \alpha^2 g'_0(k) + 2ka^{2k-1}(k'_1 + k'_{-1})}{2(k'_1 + k'_{-1})^{2k} + 4ka^{2k-1}(k'_1 + k'_{-1}) + (4k-2)a^{2k}}.$$

Данная функция непрерывна на отрезке $[0,1]$ и при этом, согласно определению параметра k,

$$u(1) = u_1(k) < r^2.$$

Несложно видеть, что

$$u(0) = \frac{(\alpha+1)^2 g'_-(k) + (\alpha-1)^2 g'_+(k) + \alpha^2 g'_0(k)}{2(k'_1 + k'_{-1})^{2k}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $u(0) > r^2$. Тогда уравнение $u(a) = r^2$ имеет по крайней мере одно решение на интервале $(0,1)$. Обозначим a_0 минимальное решение данного уравнения и пусть a минимальное натуральное число, превосходящее $[a_0 n]$, при котором $p = a + k_1 + k_{-1}$ является простым числом. Обозначим также $p' = a_0 + k'_1 + k'_{-1}$, тогда ясно, что $p \sim p'n$. Теперь мы готовы дать итоговую формулировку теоремы.

Теорема 12. *Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы S_r^{d-1}, а величины k'_1, k'_{-1}, k и p' определены выше. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k'_1} c_{1-k'_1}^{k'_{-1}}}{\max\limits_{(m'_1, m'_2) \in \mathcal{B}'} c_1^{m'_1} c_{1-m'_1}^{m'_2}} + o(1) \right)^{\sqrt[2k]{d \cdot (2k)!}},$$

где

$$\mathcal{B}' = \{(m_1, m_2)\colon m_1 + m_2 \leqslant 1,\ m_1 + 2m_2 \leqslant p'\}.$$

Справедливость данного результата будет установлена в разделе 3.4.

3.3 Доказательство теоремы 11

3.3.1 Начало доказательства теоремы 11

Рассмотрим множество векторов

$$\Sigma = \Big\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in \{-1, 1\}, x_1 = 1, \\ |i\colon x_i = 1| = k_1,\ |i\colon x_i = -1| = k_{-1} \Big\}.$$

Обозначим $n' = n^{2k}$ и $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_{n'}\}$ множество всех слов длины $2k$ над алфавитом $\{1, \ldots, n\}$. Пусть $a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,2k})$. Зафиксируем теперь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$. Рассмотрим

$$\mathbf{x}^* = \left(x_{a_{1,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{1,2k}}, \ldots, x_{a_{n',1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{n',2k}}, \sqrt{2ka^{2k-1}} x_1, \ldots, \sqrt{2ka^{2k-1}} x_n \right).$$

Введем
$$\Omega' = \{\mathbf{x}^* \colon x \in \Sigma\}\,.$$
Несложно понять, что каждый вектор $\mathbf{x}^* \in \Omega'$ состоит из $n' + n$ координат. При этом для любого i имеем $x_i^2 = 1$ и для любой перестановки сомножителей имеем одно и то же произведение. Поэтому $\Omega' \subset \mathbb{R}^{d'}$, где $d' = \sum\limits_{i=0}^{2k} C_n^i < d$.

Посчитаем количество отрицательных координат среди координат вида $x_{a_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{j,2k}}$. Очевидно, что данное произведение будет отрицательным, если среди координат $x_{a_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{j,2k}}$ будет нечетное количество отрицательных. Пусть $1 \leqslant i \leqslant 2k-1$ — нечетное число. Тогда существует ровно $C_{2k}^i k_{-1}^i k_1^{2k-i}$ способов выбрать i отрицательных и $2k-i$ положительных координат $x_{a_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{j,2k}}$ (напомним, что мы рассматриваем выбор с повторением, при этом порядок расположения отрицательных координат важен). Если теперь взять сумму по всем возможным i, мы получим количество отрицательных координат среди первых n' координат вида $x_{a_{j,1}}, \ldots, x_{a_{j,2k}}$:

$$g_-(k_1, k_{-1}, k) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2k-1,\\ i \equiv 1 \pmod 2}} C_{2k}^i k_{-1}^i k_1^{2k-i} = \frac{(k_1 + k_{-1})^{2k} - (k_1 - k_{-1})^{2k}}{2} =$$
$$= \frac{n^{2k} - (k_1 - k_{-1})^{2k}}{2}.$$

Разумеется, количество положительных координат равно

$$g_+(k_1, k_{-1}, k) = n^{2k} - g_-(k_1, k_{-1}, k) = \frac{n^{2k} + (k_1 - k_{-1})^{2k}}{2}.$$

Нашей целью будет построение множества Ω диаметра 1, лежащего на подходящей сфере S_r^{d-1}, при помощи множества Ω'. Как нетрудно заметить, в силу симметрии относительно перестановки координат векторы из Ω' лежат на сфере $S_\rho^{d'-1}$ с центром $(\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n'}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$. Вычислим радиус данной сферы в зависимости от параметра α:

$$\rho^2 = (\alpha+1)^2 g_-(k_1, k_{-1}, k) + (\alpha - 1)^2 g_+(k_1, k_{-1}, k) + 2ka^{2k-1}n.$$

С другой стороны, скалярное произведение векторов $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \Omega'$ можно выразить в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &= \sum_{i=1}^{n'} x_{a_{i,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{i,n'}} y_{a_{i,1}} \cdot \ldots \cdot y_{a_{i,n'}} + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_{2k}=1}^{n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{2k}} \cdot y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_{2k}} + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1} y_{i_1} \right) \ldots \left(\sum_{i_{2k}=1}^{n} x_{i_{2k}} y_{i_{2k}} \right) + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\
&= (\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2k} + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что минимальное скалярное произведение $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ достигается в том и только том случае, когда скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a$. Наличие таких векторов гарантируется тем, что $a \sim a_0 n$, где $a_0 < 1$, в то время как $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > k_1 - 3k_{-1} \geqslant -n$. Таким образом, минимально возможное значение скалярного произведения $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ равно $a^{2k} - 2ka^{2k}$.

Стало быть,

$$
\operatorname{diam}^2 \Omega' = 2(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) - 2(a^{2k} - 2ka^{2k}) = 2n^{2k} + 4ka^{2k-1}n + (4k-2)a^{2k}.
$$

Умножим все векторы из Ω' на константу $1/\operatorname{diam}^2 \Omega'$. В результате мы получим некоторое новое множество векторов Ω диаметра 1, которое лежит на сфере радиуса

$$
(r')^2 = \frac{(\alpha+1)^2 g_-(k_1, k_{-1}, k) + (\alpha-1)^2 g_+(k_1, k_{-1}, k) + 2ka^{2k-1}}{2n^{2k} + 4ka^{2k-1}n + (4k-2)a^{2k}}. \qquad (3.2)
$$

Ясно, что $r' \sim r$ при $n \to \infty$. Значит, при достаточно больших n выполнено неравенство $r' < r + \varepsilon$. Тогда $\Omega \subset S_{r'}^{d'-1} \subset S_{r+\varepsilon}^{d-1}$. Таким образом, данное множество векторов является искомым.

Теперь покажем, что множество Ω не может быть разбито на $f \leqslant \frac{C_n^{k_1}}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i}$ частей меньшего диаметра. Однако множества Ω' и Ω отличаются лишь умножением на константу, поэтому достаточно показать, что множество Ω' невозможно разбить на f частей меньшего диаметра. Допустим, что это неверно, и Ω' допускает представление

$$
\Omega' = \Omega'_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega'_f,
$$

где $\operatorname{diam}\Omega'_i < \operatorname{diam}\Omega'$. Как нетрудно понять, по вектору $\mathbf{x}^* \in \Omega'$ легко восстановить его прообраз $\mathbf{x} \in \Sigma$, стало быть, между множествами Ω' и Σ существует взаимно однозначное соответствие, и разбиение множества Ω' индуцирует разбиение множества Σ:

$$\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \Sigma_f.$$

Согласно принципу Дирихле, существует Σ_i, для которого

$$|\Sigma_i| > \frac{|\Sigma|}{f} = \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i.$$

Нам понадобится следующая лемма, дающая с помощью линейно-алгебраического метода (см. [23], [28]) оценку для размера совокупности векторов с запрещенным скалярным произведением.

Лемма 1. *Пусть $Q \subset \Sigma$ обладает свойством, что $|Q| > \sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i$. Тогда существуют такие векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a$.*

Данная лемма будет доказана в параграфе 3.3.2. Ее результат означает, что в множестве Σ_i найдутся два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, скалярное произведение которых равно $-a$. Однако из этого следует, что

$$\operatorname{diam}^2 \Omega'_i = |\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*| = \operatorname{diam}^2 \Omega'.$$

Данное равенство приводит нас к противоречию, поэтому множество Ω не может быть разбито на f частей меньшего диаметра. Таким образом

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \frac{C_n^{k_1}}{\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

При помощи формулы Стирлинга и стандартных методов асимптотического анализа легко показать, что

$$C_n^{k_1} = (c_1^{k'_1} + o(1))^n, \quad \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i = (c_1^{p'} + o(1))^n.$$

Ясно, что

$$\sum_{i=0}^{2k} C_n^i \sim \frac{n^{2k}}{(2k)!}.$$

Поэтому из определения параметра n сразу следует, что

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k_1}}{c_1^{p'}} + o(1)\right)^n = \left(\frac{c_1^{k_1}}{c_1^{p'}} + o(1)\right)^{\sqrt[2k]{d\cdot(2k)!}}.$$

Данная цепочка неравенств завершает доказательство теоремы.

3.3.2 Доказательство леммы 1

Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ и для любой пары различных векторов $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ верно, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq -a$. Наша задача — продемонстрировать, что

$$s < \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i.$$

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из совокупности Σ. Сопоставим этому вектору многочлен

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\not\equiv n \pmod p}}^{p-1} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \text{ где } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, что условие

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p$$

эквивалентно условию

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv n \pmod p.$$

Раскрыв скобки в определении многочлена, приведем его к следующему виду:

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m \\ \alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}}} c_{i_1,\ldots,i_m} y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots y_{i_m}^{\alpha_{i_m}}.$$

Заменим в полученном выражении все нечетные степени единицами, а все четные — нулями. В результате каждому многочлену $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ мы сопоставим новый многочлен $\tilde{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, значения которого совпадают со значениями $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ на множестве $(-1,1)$-векторов, а значит, и на множестве Σ. Покажем теперь, что полиномы

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}$$

линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Допустим, что это неверно и найдутся такие отличные от нуля константы $c_1, \ldots, c_s$, что для всякого $\mathbf{y} \in \Sigma$

$$c_1 \tilde{P}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + c_s \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Возьмем $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда, с одной стороны, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = n$, и, согласно утверждению выше, $\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Покажем, что с другой стороны, $\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку $n \equiv 0 \pmod{4}$, скалярное произведение $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{4}$. Согласно определению множества Q, для любой пары различных векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$ их скалярное произведение $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq -a$. Наконец, $a > 0$, поэтому $n - 8p < -n$. Поэтому для различных векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$ из множества Q

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \notin \{n-8p, n-7p, n-6p, n-5p, n-4p, n-3p, n-2p, n-p\},$$

и это приводит к требуемому утверждению:

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Отсюда мы получаем, что $c_i \equiv 0 \pmod{p}$. Произвольность выбора i гарантирует, что полиномы $\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы.

Стало быть, s не может превышать размерность пространства данных многочленов. Базис в данном пространстве образуют мономы вида $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$, где $m \leqslant p-1$. Но число способов выбрать такой моном в точности равно $\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i$. Поэтому окончательно

$$s < \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i,$$

и лемма доказана.

3.4 Доказательство теоремы 12

3.4.1 Начало доказательства теоремы 12

Построим совокупность Ω примерно тем же способом, что и в теореме 11. Рассмотрим множество $(-1,0,1)$-векторов с фиксированным количеством положительных, отрицательных и нулевых координат:

$$\Sigma = \Big\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \{-1,0,1\},\ x_1 = 1, \\ |i \colon x_i = 1| = k_1,\ |i \colon x_i = 0| = k_0,\ |i \colon x_i = -1| = k_{-1} \Big\}.$$

Пусть $n' = n^{2k}$ и $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_{n'}\}$ — совокупность всех слов длины $2k$ над алфавитом $\{1, \dots, n\}$, где $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,2k})$. Зафиксируем теперь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$. Рассмотрим, как и ранее,

$$x^* = \left(x_{a_{1,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{1,2k}}, \dots, x_{a_{n',1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{n',2k}}, \sqrt{2ka^{2k-1}}x_1, \dots, \sqrt{2ka^{2k-1}}x_n\right).$$

И, наконец, введем

$$\Omega' = \{x^* \colon x \in \Sigma\}.$$

Подобно соображениям из доказательства теоремы 11 можно установить, что $\Omega' \subset \mathbb{R}^{d'}$, где $d' = \sum\limits_{i_1+2i_2\leqslant 2k} C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} < d$.

Очевидно, количество ненулевых координат среди координат вида $x_{a_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{j,2k}}$ равно $(k_1 + k_{-1})^{2k}$. Таким образом, количество нулевых координат выражается как

$$g_0(k) = n^{2k} - (k_1 + k_{-1})^{2k}.$$

Здесь, как и в случае соответствующих функций g', мы опускаем зависимость функций g_0, g_- и g_+ от параметров k_1, k_{-1} и k_0. Количество единиц и минус единиц среди координат вида $x_{a_{j,1}}, \dots, x_{a_{j,2k}}$ вычисляется аналогично доказательству предыдущей теоремы:

$$g_-(k) = \frac{(k_1 + k_{-1})^{2k} - (k_1 - k_{-1})^{2k}}{2}; \quad g_+(k) = \frac{(k_1 + k_{-1})^{2k} + (k_1 - k_{-1})^{2k}}{2}.$$

Построим теперь совокупность Ω диаметра 1. Вспомним, что векторы из Ω' лежат на сфере $S_\rho^{d'-1}$ с центром $(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{n'}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n})$, и вычислим радиус данной сферы в зависимости от параметра α:

$$\rho^2 = (\alpha + 1)^2 g_-(k) + (\alpha - 1)^2 g_+(k) + \alpha^2 g_0(k) + 2ka^{2k-1}(k_{-1} + k_1).$$

С другой стороны, как мы знаем из доказательства предыдущей теоремы, скалярное произведение векторов $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \Omega'$ можно выразить в следующем виде:

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2k} + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

и минимальное скалярное произведение $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ по-прежнему достигается в том и только том случае, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a$. Наличие таких векторов гарантируется тем, что $a \sim a_0 n$, где $a_0 < 1$, в то время как $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > -n$. Следовательно, минимально возможное значение скалярного произведения $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ равно $a^{2k} - 2ka^{2k}$.

Диаметр множества Ω' вычисляется подобно доказательству предыдущего результата, однако скалярный квадрат $\mathbf{x}^*$ теперь зависит от параметров k_1 и k_{-1}:

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}^2 \Omega' &= 2(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) - 2(a^{2k} - 2ka^{2k}) = \\ &= 2(k_1 + k_{-1})^{2k} + 4ka^{2k-1}(k_1 + k_{-1}) + (4k-2)a^{2k}.\end{aligned}$$

Путем умножения векторов из Ω' на константу $1/\operatorname{diam}\Omega'$ мы получаем множество векторов Ω диаметра 1, которое лежит на сфере радиуса

$$(r')^2 = \frac{(\alpha+1)^2 g_-(k) + (\alpha-1)^2 g_+(k) + \alpha^2 g_0(k) + 2ka^{2k-1}(k_{-1}+k_1)}{2(k_1+k_{-1})^{2k} + 4ka^{2k-1}(k_1+k_{-1}) + (4k-2)a^{2k}}.$$

Ясно, что $r' \sim r$ при $n \to \infty$. Значит, при достаточно больших n выполнено неравенство $r' < r+\varepsilon$. Тогда $\Omega \subset S_{r'}^{d'-1} \subset S_{r+\varepsilon}^{d-1}$, и текущий шаг доказательства завершен.

Покажем, что множество Ω' не может быть разбито на

$$f \leqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}}$$

частей меньшего диаметра, где $\mathcal{B} = \{(m_1, m_2)\colon m_1 + m_2 \leqslant n, m_1 + 2m_2 \leqslant p-1\}$. Допустим, что это неверно и Ω' допускает представление

$$\Omega' = \Omega'_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega'_f,$$

где $\operatorname{diam}\Omega'_i < \operatorname{diam}\Omega'$. Как было показано ранее, между множествами Ω' и Σ существует взаимно однозначное соответствие, и разбиение множества Ω' индуцирует разбиение множества Σ:

$$\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \Sigma_f.$$

Согласно принципу Дирихле, существует Σ_i, для которого

$$|\Sigma_i| > \frac{|\Sigma|}{f} = \sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}.$$

Следующая лемма использует линейно-алгебраический метод для $(-1,0,1)$-векторов и показывает, что размер совокупности векторов $Q \subset \Sigma$, в которой встречается скалярное произведение $-a$, не может превышать определенной величины. Данную лемму мы докажем в параграфе 3.4.2.

Лемма 2. *Пусть $Q \subset \Sigma$ обладает свойством, что $|Q| > \sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_n^{m_2}$. Тогда существуют такие векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a$.*

Поскольку $-a$ является минимально возможным скалярыным произведением векторов из Σ, из результата леммы напрямую следует, что

$$\operatorname{diam}^2 \Omega_i' = |\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*| = \operatorname{diam}^2 \Omega'.$$

Полученное противоречие означает, что Ω не может быть разбито на f частей меньшего диаметра, следовательно,

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant f = \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}}.$$

При помощи формулы Стирлинга и стандартных методов асимптотического анализа легко показать, что

$$C_n^{k_1} = \left(c_1^{k_1'} + o(1)\right)^n, \quad C_{n-k_1}^{k_{-1}} = \left(c_{1-k_1'}^{k_{-1}'} + o(1)\right)^n,$$
$$\sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} = \max_{(m_1',m_2')\in\mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'}.$$

Принимая во внимание рассуждения из доказательства прошлой теоремы и замечая, что $\sum\limits_{i_1+2i_2\leqslant 2k} C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} \sim \dfrac{n^{2k}}{(2k)!}$,

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k_1'} c_{1-k_1'}^{k_{-1}'}}{\max\limits_{(m_1',m_2')\in\mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'}} + o(1) \right)^n =$$
$$= \left(\frac{c_1^{k_1'} c_{1-k_1'}^{k_{-1}'}}{\max\limits_{(m_1',m_2')\in\mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'}} + o(1) \right)^{\sqrt[2k]{d\cdot(2k)!}}.$$

Данная цепочка неравенств завершает доказательство теоремы.

3.4.2 Доказательство леммы 2

Доказательство данного результата во многом близко к доказательству леммы 1, однако есть и довольно важные отличия. Пусть, как и прежде, $Q =$

$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ — множество векторов, попарные скалярные произведения которых отличны от $-a$. Покажем, что

$$s < \sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}.$$

Каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma$ сопоставим многочлен

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \not\equiv k_1 + k_{-1} \pmod p}}^{p-1} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \text{ где } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Стандартным способом преобразуем многочлен в выражение вида

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_m \\ \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}}} c_{i_1, \ldots, i_m} y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots y_{i_m}^{\alpha_{i_m}}$$

и заменим в нем все нечетные степени единицами, а все четные — двойками. В результате мы получим некоторый новый многочлен $\tilde{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, значения которого совпадают со значениями $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ на всем множестве $(-1, 0, 1)$-векторов.

Условия леммы гарантируют, что попарное скалярное произведение двух векторов из Q не принимает значение $-a = k_1 + k_{-1} - p$. Проверим, что $k_1 + k_{-1} - 2p$ меньше минимально возможного скалярного произведения $\underline{s}$ векторов из Σ. Оценим $\underline{s}$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, тогда скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ будет минимальным в том случае, когда максимальное количество слагаемых $x_i y_i$ принимает отрицательное значение, а из оставшихся минимальное число слагаемых принимает положительное значение. Слагаемых, равных -1, не больше, чем $2k_{-1}$, и они дают общий вклад в сумму не менее $-2k_1$. Количество слагаемых, равных 1, не меньше, чем $\max(0, k_1 - k_{-1} - k_0)$, и их "положительный" вклад в сумму оценивается этим количеством. В итоге,

$$\underline{s} \geqslant -2k_{-1} + \max(0, k_1 - k_{-1} - k_0).$$

Нетрудно проверить с помощью явного примера, что данная оценка является точной, то есть $\underline{s} = -2k_{-1} + \max(0, k_1 - k_{-1} - k_0)$. Но

$$k_1 + k_{-1} - 2p = -k_1 - k_{-1} - 2a < -2k_{-1} - 2a < \underline{s}.$$

Полученное неравенство означает, что для различных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ следующие условия эквивалентны:

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p \Longleftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq -a.$$

Далее, покажем, что полиномы $\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Пусть это неверно, и найдутся такие нетривиальные константы $c_1, \ldots, c_s$, что следующая линейная комбинация обращается в ноль при всяком $\mathbf{y} \in \Sigma$:

$$c_1\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + c_s\tilde{P}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p.$$

Заметим, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = k_1 + k_{-1}$, следовательно,

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \not\equiv 0 \pmod p.$$

При этом в силу определения множества Q при всяком $j \neq i$

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod p,$$

то есть $c_i \equiv 0 \pmod p$, и, в силу произвольности выбора i, полиномы $\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы.

Вычислим размерность пространства, образуемого данными полиномами. Базис в нем образуют мономы вида $y_{i_1}^{\beta_{i_1}} \cdot \ldots \cdot y_{i_m}^{\beta_{i_m}}$, где $m \leqslant n$, а $\beta_i \in \{1, 2\}$. Оценим число таких мономов. Существует $C_n^{m_1}$ способов выбрать m_1 переменных, отвечающих первым степеням, и $C_{n-m_1}^{m_2}$ способов выбрать в оставшемся наборе m_2 переменных, отвечающих квадратам. Вспомним, что степень исследуемых полиномов не превосходит $p-1$, и получим окончательно:

$$s < \sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}.$$

Доказательство леммы завершено.

3.5 Численные результаты и обсуждение

В результате численной оптимизации мы выяснили, что в оценке теоремы 11 оптимальными параметрами являются $\alpha = 0$ и $k_1' = k_{-1}'$, что в точности соответствует случаю теоремы 10. При этом, однако, нам удалось улучшить данный результат за счет более точного подсчета размерности сферы, на которой лежит совокупность Ω. Что же касается теоремы 12, то в случае, когда оценка отлична от тривильной (то есть $(1 + o(1))^n$), численная оптимизация показала, что наилучшая оценка достигается в довольно простом случае $\alpha = 0$ и $k_1' = k_{-1}' \leqslant 1/4$. Отметим, что при $\alpha = 0$ функции u, фигурирующие в формулировках теорем 11 и 12, монотонны (данный факт мы докажем в параграфе 3.5.1). Монотонность функции u позволяет в явном виде гарантировать, что в доказательстве данных теорем конструкция Ω лежит на сфере радиуса $r' < r$, поэтому мы можем избавиться от ε в формулировках. Кроме того, логично дать более простую версию теоремы 12 при $\alpha = 0$ и $k'_1 = k'_{-1}$.

Теорема 13. *Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы S_r^{d-1}, параметр $\kappa \in [0, 1/2]$ (данный параметр соответствует сумме $k'_1 + k'_{-1} = 2k'_1$). Определим натуральные числа n и k из соотношений*

$$n = \max\{m\colon m \equiv 0 \pmod 4,\ \sum_{i_1+2i_2 \leqslant 2k} C_m^{i_1} C_{m-i_1}^{i_2} < d\},$$

$$k = \min\left\{k' \in \mathbb{N}\colon \frac{\kappa^{2k'} + 2k'\kappa}{2\kappa^{2k'} + 4k\kappa + (4k-2)} < r^2\right\} \tag{3.3}$$

и введем функцию

$$u(a) = \frac{\kappa^{2k} + 2k\kappa a^{2k-1}}{2\kappa^{2k} + 4k\kappa a^{2k-1} + (4k-2)a^{2k}}.$$

Повторяя соображения, предваряющие формулировку теоремы 12, получаем, что уравнение

$$u(a) = r^2$$

имеет по меньшей мере один корень на отрезке $[0, 1]$ (отметим, что в данном случае условие $u(0) > r^2$ выполняется автоматически). Обозначим минимальный среди таких корней a_0. Определим a как минимальное число, большее $a_0 n$, при котором $p = a + \kappa n$ является простым числом, и обозначим $p' = p/n$.

Тогда

$$f_r(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{\kappa/2} c_{1-\kappa/2}^{\kappa/2}}{\max\limits_{(m'_1, m'_2) \in \mathcal{B}'} c_1^{m'_1} c_{1-m'_1}^{m'_2}} + o(1) \right)^{\sqrt[2k]{d \cdot (2k)!}}, \tag{3.4}$$

где

$$\mathcal{B}' = \{(m_1, m_2)\colon m_1 + m_2 \leqslant 1,\ m_1 + 2m_2 \leqslant p'\}.$$

В таблице ниже приведено сравнение констант в основании экспоненты из оценок теоремы Купавского–Райгородского и новых теорем 11 и 13. Строки таблицы отвечают значениям радиуса r в пределах от 0.51 до $1/\sqrt{2}$, причем область больших радиусов детализирована. Отметим, что значения функции $k(r)$ в формулировках данных теорем совпадают при оптимальном выборе параметров, поэтому мы указываем ее значение лишь в одном столбце. В последнем столбце мы также указываем значение оптимального параметра κ из теоремы 13. Жирным шрифтом выделена наилучшая для данного значения r оценка. Из этой таблицы видно, что теорема 11, использующая $(-1,1)$-векторы, всегда превосходит оценку Купавского–Райгородского возведением в степень $\sqrt[2k]{(2k)!}$. При этом вблизи $r = 1/\sqrt{2}$ оказывается становится выгоднее использовать $(-1,0,1)$-векторы, и теорема 13 оказывается сильнее теоремы 11.

r	$k(r)$	Теорема 10	Теорема 11	Теорема 13	Оптимальное κ
0.510	13	1.0000005	**1.0000052**	1.0000000	—
0.520	7	1.0000140	**1.0000845**	1.0000000	—
0.530	5	1.0000766	**1.0003468**	1.0000000	—
0.540	4	1.0002384	**1.0008978**	1.0000000	—
0.550	3	1.0002980	**1.0008924**	1.0000000	—
0.560	2	1.0000043	**1.0000094**	1.0000000	—
0.570	2	1.0004968	**1.0010999**	1.0000000	—
0.580	2	1.0016989	**1.0037642**	1.0000000	—
0.590	2	1.0034858	**1.0077317**	1.0000000	—
0.600	2	1.0057660	**1.0128070**	1.0000000	—
0.610	2	1.0084779	**1.0188611**	1.0000000	—
0.620	1	1.0006819	**1.0009645**	1.0000000	—
0.630	1	1.0035464	**1.0050190**	1.0000000	—
0.640	1	1.0085262	**1.0120792**	1.0000000	—
0.650	1	1.0155692	**1.0220889**	1.0000000	—
0.660	1	1.0247235	**1.0351425**	1.0000000	—
0.670	1	1.0361867	**1.0515566**	1.0000000	—
0.675	1	1.0429135	**1.0612237**	1.0051568	0.49
0.680	1	1.0504288	**1.0720547**	1.0211042	0.49
0.685	1	1.0588895	**1.0842866**	1.0391555	0.49
0.690	1	1.0685623	**1.0983206**	1.0603233	0.47
0.695	1	1.0799356	**1.1148892**	1.0861596	0.49
0.700	1	1.0941122	**1.1356430**	1.1189050	0.43
0.701	1	1.0975025	**1.1406228**	1.1267955	0.43
0.702	1	1.1011791	**1.1460302**	1.1353528	0.43
0.703	1	1.1052291	**1.1519956**	1.1447820	0.43
0.704	1	1.1097975	**1.1587355**	1.1554241	0.43
0.705	1	1.1151616	1.1666639	**1.1679301**	0.43
0.706	1	1.1220065	1.1768039	**1.1839439**	0.42
0.707	1	1.1397535	1.2032138	**1.2127397**	0.42
$1/\sqrt{2}$	1	1.1397535	1.2032138	**1.2255790**	0.42

Таблица 3.2: Сравнение оценок теорем 10, 11 и 13

Для наглядности мы также приводим график с тремя оценками при $0.7 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2}$. На нем четко видно, что теорема 13 начинает улучшать теорему

11 только вблизи $r_0 = 0.705$, и при $r > r_0$ разница с теоремой 11 только возрастает.

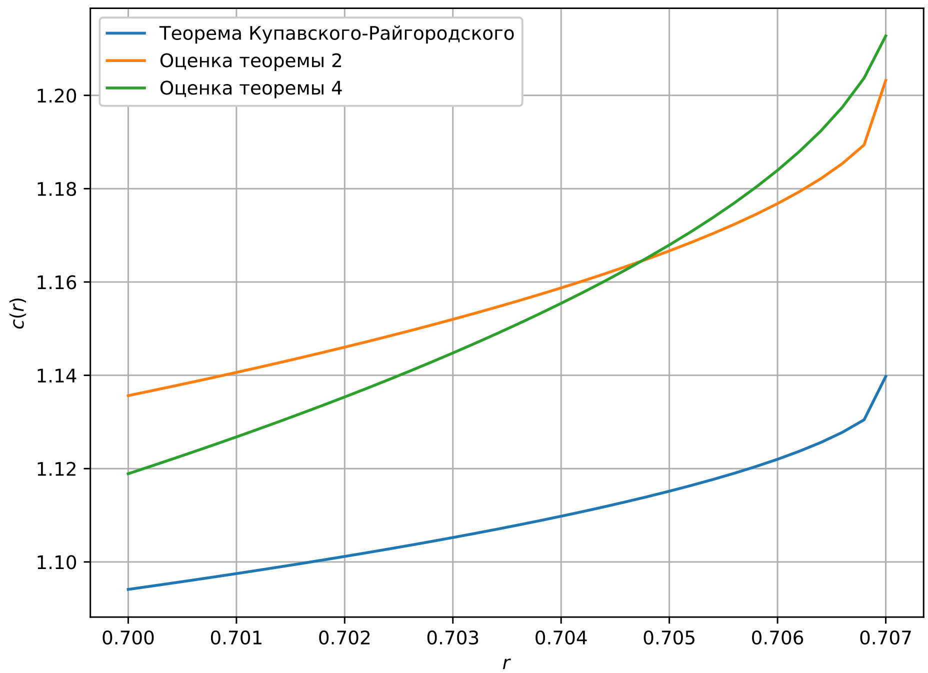

Рис. 3.2: Сравнение оценок теорем 10, 11 и 13 при $0.7 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2}$

При взгляде на таблицу 3.2 может возникнуть закономерный вопрос: может ли в принципе теорема 13 давать нетривиальную оценку при небольших значениях радиусов? Следующие рассуждения показывают, что как минимум при $0.525\ldots = \sqrt{5/18} < r < 2/3$ это невозможно.

Сперва проверим, что при $r > \sqrt{5/18}$ параметр k, определяемый из соотношения (3.3), равен 1. В самом деле, достаточно установить, что при $k = 1$ и $r > \sqrt{5/18}$ выполняется неравенство $u(1) < r^2$. Как нетрудно видеть,

$$u(1) = \frac{\kappa^{2k} + 2k\kappa}{2\kappa^{2k} + 4k\kappa + 4k - 2} = \frac{1}{2} - \frac{2k-1}{2\kappa^{2k} + 4k\kappa + 4k - 2}.$$

Подставляя в данное выражение $k = 1$, получим

$$u(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\kappa^2 + 4\kappa + 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\kappa+1)^2}.$$

Очевидно, функция в правой части достигает своего максимального значения $5/18$ при $\kappa = 1/2$ (напомним, что $\kappa \leqslant 1/2$). Значит, при радиусе сферы

$r > \sqrt{5/18}$

$$u(1) < r^2,$$

и уравнение $u(a) = r^2$ имеет решение на отрезке $[0, 1]$. Поскольку в качестве k выбирается минимальное натуральное число, которое обеспечивает выполнение данного свойства, то $k = 1$ при $r > \sqrt{5/18}$.

При $k = 1$ уравнение $u(a) = r^2$ становится квадратным:

$$\frac{\kappa^2 + 2\kappa a}{2\kappa^2 + 4\kappa a + 2a^2} = r^2.$$

Несложно проверить, что данное уравнение имеет единственное решение $a_0 \in [0, 1]$:

$$a_0 = \kappa \frac{1 - 2r^2 + \sqrt{1 - 2r^2}}{2r^2}.$$

Покажем, что при $\sqrt{5/18} < r < 2/3$ параметр p, определяющий область максимизации $\mathcal{B}'$, оказывается настолько большим, что числитель оценки (3.4) не больше знаменателя. Путем элементарных преобразований можно проверить, что при $\sqrt{5/18} < r < 2/3$

$$\frac{1 - 2r^2 + \sqrt{1 - 2r^2}}{2r^2} > 1/2,$$

то есть $a_0 > \kappa/2$. Вспомним, что $p' = p/n \geqslant a_0 + \kappa$, то есть в рассматриваемом случае

$$p' > \frac{3}{2}\kappa.$$

Тогда в области максимизации $\mathcal{B}'$ есть точка $(m_1, m_2) = (\kappa/2, \kappa/2)$, которая гарантирует, что знаменатель оценки можно ограничить снизу числителем:

$$\max_{(m_1', m_2') \in \mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'} \geqslant c_1^{\kappa/2} c_{1-\kappa/2}^{\kappa/2},$$

поэтому итоговая оценка теоремы 13 не может быть лучше $(1 + o(1))^{2\sqrt{d}}$ при всех $\kappa \in [0, 1/2]$ и $\sqrt{5/18} < r < 2/3$, что согласуется с полученными нами численными результатам.

3.5.1 Монотонность функции $u(a)$ из теорем 11 и 12

Покажем сперва, что функция $u(a)$, фигурирующая в формулировке теоремы 12, является монотонной при выполнении одного из двух условий: $\alpha = 0$ или

$k_1' = k_{-1}'$. Напомним вид данной функции:

$$u(a) = \frac{(\alpha+1)^2 g_-'(k) + (\alpha-1)^2 g_+'(k) + \alpha^2 g_0'(k) + 2ka^{2k-1}(k_{-1}' + k_1')}{2(k_1' + k_{-1}')^{2k} + 4ka^{2k-1}(k_1' + k_{-1}') + (4k-2)a^{2k}},$$

где

$$\begin{aligned} g_0'(k) &= 1 - (k_1' + k_{-1}')^{2k}; \\ g_+'(k) &= \frac{(k_1' + k_{-1}')^{2k} + (k_1' - k_{-1}')^{2k}}{2}; \\ g_-'(k) &= \frac{(k_1' + k_{-1}')^{2k} - (k_1' - k_{-1}')^{2k}}{2}. \end{aligned}$$

Обозначим дополнительно

$$\kappa = k_1' + k_{-1}';$$
$$C(\alpha) = (\alpha+1)^2 g_-'(k) + (\alpha-1)^2 g_+'(k) + \alpha^2 g_0'(k).$$

В таких обозначениях функция u принимает более простой вид:

$$u(a) = \frac{C(\alpha) + 2ka^{2k-1}\kappa}{2\kappa^{2k} + 4k\kappa a^{2k-1} + (4k-2)a^{2k}}.$$

Путем элементарных вычислений можно найти производную данной функции:

$$u'(a) = -\frac{k(2k-1)a^{2k}(\kappa(C(\alpha) - \kappa^{2k}) + \kappa a^{2k} + C(\alpha)a}{2k\kappa a^{2k} + a\kappa^{2k} + (2k-1)a^{2k+1}}.$$

Для того, чтобы проверить, что функция монотонно убывает, достаточно показать, что

$$\kappa(C(\alpha) - \kappa^{2k}) + \kappa a^{2k} + C(\alpha)a \geqslant 0,$$

а это в свою очередь будет следствием неравенства $C(\alpha) - \kappa^{2k} \geqslant 0$. Как нетрудно видеть, при $\alpha = 0$

$$C(\alpha) = g_-'(k) + g_+'(k) = (k_1' + k_{-1}')^2 k,$$

и утверждение доказано.

Пусть теперь $k_1' = k_{-1}'$. Найдем минимум $C(\alpha)$ по α. Данную функцию можно переписать в виде

$$C(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha(g_+(k) - g_-(k)) + g_+(k) - g_-(k).$$

Очевидно, при $\alpha = g_+(k) - g_-(k)$ данная функция достигает своего минимального значения

$$C_{min} = g_-(k)+g_+(k)-(g_+(k)-g_-(k))^2 = (k'_1+k'_{-1})^{2k}-(k'_1-k'_{-1})^{4k} = (k'_1+k'_{-1})^{2k} = \kappa^{2k}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $k_1 = k_{-1}$. Таким образом, при выполнении любого из условий $\alpha = 0$ или $k'_1 = k'_{-1}$ справедливо неравенство

$$C(\alpha) - \kappa^{2k} \geqslant 0,$$

которое показывает, что функция $u(a)$ монотонно убывает на отрезке $[0, 1]$.

Что же касается функции u в формулировке теоремы 11, то ее монотонность доказывается полностью аналогично рассмотренному случаю, поэтому соответствующие рассуждения мы не приводим.

Заключение

В настоящей работе изучена серия задач комбинаторной геометрии и теории графов. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- Получены новые нижние оценки хроматических чисел сфер в евклидовом пространстве.
- Получены новые нижние оценки хроматических чисел сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q для произвольного $q \in \mathbb{N}$.
- Получены новые нижние оценки величин $f_r(d)$.

Результаты данной работы можно развивать в нескольких направлениях. Первое из них касается оценок хроматического числа в евклидовом случае. Можно пытаться улучшить данные оценки при помощи получения более сильных оценок чисел независимости дистанционных графов, использованных в доказательстве теорем 3 и 4. Особенно интересным в данном контексте представляется набор параметров, при котором используются оценки из работ [46]–[48]. Кроме того, можно продолжить изучать доказательства оптимальности параметров, получаемых в результате численных расчетов.

Что же касается случая пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q для произвольного $q \in \mathbb{N}$, то в данном случае наилучшим направлением развития представляется улучшение линейно-алгебраического метода, примененного при доказательстве теорем 6 и 7.

Наконец, в изучении величин $f_r(d)$ большую роль играет вид конструкции Ω, которая использована при доказательстве теорем 10, 11 и 12. Как было показано, более точный подсчет размерности пространства, в котором лежит данная конструкция, значительно улучшает итоговую оценку. Не исключено, что впоследствии удастся понизить эту размерность еще больше за счет использования какой-либо другой концепции при построении Ω. Кроме того, поскольку оптимальные параметры, представленные в теоремах 11 и 12, выглядят достаточно просто, можно пытаться теоретически доказать, что именно такой выбор параметров всегда дает наилучший результат. Наконец, отдельный вопрос представляет собой поиск хороших оценок величин $f_r(d)$.

Список условных обозначений

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$|A|$ — мощность конечного множества A;

$[a], \lfloor a \rfloor$ — (нижняя) целая часть числа a;

$\lceil a \rceil$ — верхняя целая часть числа a;

$\mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$ — кольцо многочленов от переменных $y_1, \ldots, y_n$ над полем $\mathbb{R}$;

C_n^k — число сочетаний из n элементов по k;

$f(N) = o(g(N))$ — для любого числа $c > 0$ существует такое число N_0, что для любого $N > N_0$ выполнено неравенство $|f(N)| \leq c|g(N)|$;

$f(x) \sim g(x)$ — функции асимптотически равны при $x \to \infty$, то есть $f(x) = g(x) \cdot (1 + o(1))$;

$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — евклидово скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$;

$|\mathbf{x}|$ — норма вектора $\mathbf{x}$ в евклидовом пространстве;

$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ — евклидово расстояние между точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$;

$V(G)$ — множество вершин графа G;

$E(G)$ — множество ребер графа G;

$\alpha(G)$ — число независимости графа G;

$\chi(G)$ — хроматическое число графа G;

$a \equiv b \pmod{k}$ — a сравнимо с b по модулю k, то есть a и b дают одинаковые остатки при делении на k.

Список литературы

[1] *Вороной Г.Ф.* Собрание сочинений. Т. 1-3. // Киев: Изд-во АН УССР, 1952–1953.

[2] *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. // М.: Мир, 1990.

[3] *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. // Fundamenta Math. — 1933. — V. 20. — P. 177 - 190.

[4] *Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S.*, Excursions into combinatorial geometry. — Berlin: Springer, Universitext. — 1997.

[5] *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry // Berlin: Springer, 2005.

[6] *Grünbaum B.*, Borsuk's problem and related questions // Proc. Sympos. Pure Math. — 1963. — V. 7. — C. 271–284.

[7] *Raigorodskii A. M.*, Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. — 2007. — T. 347. — C. 202–248.

[8] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107–146.

[9] *Райгородский А. М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика". — 2007. — Т. 23. — С. 147–164.

[10] *Perkal J.*, Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur // Colloq. Math. — 1947. — V. 1. — № 1. — C. 45.

[11] *Kahn J., Kalai G.*, A counterexample to Borsuk's conjecture // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1993. — V. 29. — № 1. — C. 60–62.

[12] *Jenrich T., Brouwer A. E.*, A 64-dimensional counterexample to Borsuk's conjecture // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2014. — V. 21. — №. 4. — С. 4–29.

[13] *Райгородский А. М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи матем. наук. — 1999. — Т. 54. — № 2. — С. 185–186.

[14] *Schramm O.*, Illuminating sets of constant width // Mathematika. — 1988. — V. 35. — № 2. — С. 180–189.

[15] *Kupavskii A. B., Raigorodskii A. M.*, Counterexamples to Borsuk's conjecture on spheres of small radii // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2012. —V. 2. — № 4. — С. 27–48.

[16] *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. — 1944. — V. 4. — P. 140–144.

[17] *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book // Springer, 2009.

[18] *Moser L., Moser W.* Solution to problem 10 // Canad. Math. Bull. — 1961. — V. 4. — P. 187–189.

[19] *de Grey A. D. N. J.* The chromatic number of the plane is at least 5 // arXiv preprint arXiv:1804.02385. — 2018.

[20] *Nechushtan O.* On the space chromatic number // Discrete mathematics. — 2002. — V. 256., N. 1–2. — С. 499-507.

[21] *Coulson D. A.* 15-colouring of 3-space omitting distance one // Discrete mathematics. — 2002. — V. 256, N. 1-2. — С. 83–90.

[22] *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // J. Bolyai Math. Soc. — 2002. — V. 11. — P. 649–666.

[23] *Raigorodskii A. M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer. — 2013. — P. 429–460.

[24] *Канель-Белов А. Я., Воронов В. А., Черкашин Д. Д.* О хроматическом числе плоскости // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 68–89.

[25] *Черкашин Д. Д., Райгородский А. М.* О хроматических числах пространств малой размерности // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 472, № 1. — С. 11-12.

[26] *Cherkashin D., Kulikov A., Raigorodskii A.* On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces // Discrete Applied Mathematics. — 2018. — V. 243. — P. 125–131.

[27] *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — V. 19. — P. 1–24.

[28] *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. — 1981. — V. 1. — P. 357–368.

[29] *Бердников А. В., Райгородский А. М.* О хроматическом числе евклидова пространства с двумя запрещенными расстояниями // Математические заметки. — Т. 96, № 5. — 2014. — С. 790–793.

[30] *Бердников А. В.* Оценка хроматического числа евклидова пространства с несколькими запрещенными расстояниями // Математические заметки. — Т. 99, № 5. — 2016. — С. 783–787.

[31] *Berdnikov A. V.* Chromatic number with several forbidden distances in the space with the l_q-metric // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — V. 227, N. 4. — P. 395–401.

[32] *Звонарев А. Е., Райгородский А. М., Самиров Д. В., Харламова А. А.* О хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником // Матем. сборник. — 2014. — Т. 205, № 9. — С. 97–120.

[33] *Звонарев А. Е., Райгородский А. М.* Улучшения теоремы Франкла-Рёдля о числе ребер гиперграфа с запрещенным пересечением и их следствия в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2015. — Т. 288. — С. 109–119.

[34] *Самиров Д. В., Райгородский А. М.* Хроматические числа пространств с запрещенными одноцветными треугольниками // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 1. — С. 134–143.

[35] *Самиров Д. В., Райгородский А. М.* Новые нижние оценки хроматического числа пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками // Итоги науки и техники, Современная математика и ее приложения. — 2013. — Т. 125. — С. 252–268.

[36] *Самиров Д. В., Райгородский А. М.* Новые оценки в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками // Доклады РАН. — 2014. — Т. 456, № 3. — С. 280–283.

[37] *Самиров Д. В., Райгородский А. М.* Об одной задаче, связанной с оптимальной раскраской пространства без одноцветных равнобедренных треугольников // Труды МФТИ. —2015. —Т. 7, № 2. — С. 39–50.

[38] *Benda M., Perles M.* Colorings of metric spaces // Geombinatorics. — 2000. — V. 9. — P. 113–126.

[39] *Райгородский А. М.* О хроматических числах сфер в евклидовом пространстве // Доклады РАН. — 2010. — Т. 432, № 2. — С. 174–177.

[40] *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinatorica. — 2012. — Т. 32, № 1. — С. 111–123.

[41] *Купавский А. Б.* О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сборник. — 2011. — Т. 202, № 6. — С. 83–110.

[42] *Erdos P., Graham R. L.* Problem proposed at the 6th Hungarian combinatorial conference // Eger, July. — 1981.

[43] *Lovàsz L.* Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere // Acta Scientiarum Mathematicarum. — 1983. — Т. 45, № 1-4. — С. 317–323.

[44] *Rogers C. A.* Covering a sphere with spheres //Mathematika. — 1963. — Т. 10, № 2. — С. 157–164.

[45] *Baker R. C., Harman G., Pintz J.* The difference between consecutive primes, II // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2001. — V. 83. — № 3. — С. 532–562.

[46] *Пономаренко Е. И., Райгородский А. М.* Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения // Проблемы передачи информации. — 2013. — Т. 49, № 4. — С. 98–104.

[47] *Пономаренко Е. И., Райгородский А. М.* Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения // Доклады РАН. — 2014. — Т. 454, № 3. — С. 268–269.

[48] *Пономаренко Е. И., Райгородский А. М.* Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов // Математические заметки. — 2014. — Т. 96, № 1. — С. 138–147.

[49] *Baker R. C., Harman G., Pintz J.* The difference between consecutive primes, II // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2001. — V. 83. — № 3. — С. 532–562.

[50] *Костина О. А., Райгородский А. М.* О нижних оценках хроматического числа сферы // Доклады РАН. — 2015. — Т. 463, № 6. — С. 639–641.

[51] *Костина О. А., Райгородский А. М.* О новых нижних оценках хроматического числа сферы // Труды МФТИ. — 2015. — Т. 7, № 2. — С. 20–26.

[52] *Костина О. А.* О нижних оценках хроматического числа сферы // Математические заметки. — 2019. — Т. 105, № 1. — С. 18–31.

[53] *Костина О. А.* О сферах в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q // Труды МФТИ. — 2019. — Т. 11, № 3. — С. 70–81.

[54] *Костина О. А.* О контрпримерах к гипотезе Борсука на сфере // Труды МФТИ. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 3–21.