КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.98

Гумеров Ренат Нельсонович

Групповые структуры и их приложения в анализе и топологической алгебре

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Казань – 2020

.

Моей первой Учительнице—Маме,
всем моим Учителям

Оглавление

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию свойств морфизмов и объектов категорий топологической алгебры и функционального анализа, в определениях которых участвуют групповые операции. Основные результаты, содержащиеся в ней, касаются конечнолистных накрывающих отображений на компактные связные группы, а также, тесно связанных с ними, многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций и предельных $*$-автоморфизмов полугрупповых C^*-алгебр. В работе доказывается аналог теоремы Понтрягина о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений на произвольные компактные связные группы. На основе этого результата изучаются свойства полиномиальных накрывающих отображений, определяемых многочленами Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами на компактных связных абелевых группах. Для двух важных классов объектов в категории компактных групп и в категории C^*-алгебр, называемых соответственно P-адическими соленоидами и редуцированными полугрупповыми C^*-алгебрами для полугрупп рациональных чисел, исследуются свойства их предельных эндоморфизмов.

Мотивацией к нашему исследованию послужили несколько источников.

Одним из них является теория многочленов над банаховыми алгебрами непрерывных функций. В работах В. Л. Хансена [80, 81, 85] такие многочлены называются *многочленами Вейерштрасса*. Это название связано со знаменитой подготовительной теоремой Вейерштрасса из теории аналитических функций многих переменных [33, 133]. Говоря неформально, эта теорема сводит изучение геометрии множества нулей аналитической функции от $n+1$ переменной к рассмотрению множества нулей унитарного многочлена относительно одной из переменных. Коэффициентами этого многочлена являются аналитические функции от оставшихся n переменных.

Исследованием свойств многочленов Вейерштрасса и алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами, заданными на различных топологических пространствах, занимался следующий ряд авторов.

Д. Деккард, К. Пирси [61, 62] и Р. С. Кантриман [57] в 60-х годах прошлого столетия изучали вопрос о характеризации компактов X, таких, что в банаховой алгебре $C(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на X всякое алгебраическое уравнение вида

$$z^n + f_1(x)z^{n-1} + f_2(x)z^{n-2} + \cdots + f_n(x) = 0,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C(X)$, имеет решение. В таком случае говорят, что $C(X)$ алгебраически замкнута. Интересно отметить, что этот вопрос возник у них при решении задач о матричных алгебрах. Они показали, что для алгебраически замкнутой банаховой алгебры $C(X)$ компакт X удовлетворяет довольно жестким топологическим условиям. К примеру, в нем нет подпространств, которые гомеоморфны окружности.

Изучение вопроса о характеризации алгебраической замкнутости алгебры непрерывных функций $C(X)$, начатое в работах [57, 61, 62], было продолжено в 1999–2009 годах в цикле статей Т. Миуры, К. Кавамуры, К. Ниидзимы, О. Хатори [88, 90, 99–101, 113] и их соавторов. В них получены различные необходимые и достаточные условия для выполнения этого свойства. В частности, показано, что для компакта X, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, алгебраическая замкнутость $C(X)$ эквивалентна возможности извлечения квадратного корня в этой алгебре. Отметим, что свойство замкнутости относительно извлечения квадратного корня появилось в 1966 г. в статье Е. М. Чирки [32] при исследовании подалгебр алгебры $C(X)$.

Т. Дж. Оливер и Дж. Ф. Файнштейн [72] охарактеризовали алгебраическую замкнутость $C(X)$ в терминах продолжений эндоморфизмов алгебр на их расширения Аренса — Гоффмана.

Систематическое изучение указанных выше уравнений с дополнительным требованием о сепарабельности многочленов, заключающегося в том, что при каждом фиксированном $x \in X$ соответствующее уравнение с числовыми коэффициентами не имеет кратных корней, было начато в 1969 г. в работах Е. А. Горина и В. Я. Лина [7, 8]. Одной из отправных точек их исследования послужило доказательство В. В. Жикова [15] теоремы Вальтера — Бора — Фландерса [45, 46, 132] о решениях алгебраических уравнений с почти периодическими коэффициентами на вещественной оси. Как хорошо известно, алгебру почти периодических функций можно реализовать как алгебру всех непрерывных функций на компактификации Бора, являющейся связной абелевой группой. В статье [8] получены различные условия на компакт X, гарантирующие полную разрешимость уравнений степени n, означающую наличие у уравнения n строго различных решений в алгебре $C(X)$. В частности, для связной компактной, не обязательно абелевой, группы G доказано, что полная разрешимость алгебраических уравнений степени n над банаховой алгеброй $C(G)$ следует из возможности деления на $n!$ в одномерной группе целочисленных спектральных когомологий $H^1(G, \mathbb{Z})$ [8, следствия 1.10–1.12]. Как утверждается в [8, с.580], нетрудно доказать хорошо известный факт о справедливости обратного утверждения, то есть, получается *критерий полной разрешимости.* Напомним, что, если G абелева, то группа $H^1(G, \mathbb{Z})$ изоморфна дискретной группе одномерных характеров $\widehat{G}$ группы G. Как следствие, в статье [8, с. 591] было получено обобщение теоремы Вальтера — Бора — Фландерса на связные компактные группы.

Возможность деления в группе характеров $\widehat{G}$ имеет непосредственное отношение к вопросу о существовании средних на компактной связной абелевой группе G. Ответ на подобный вопрос является одной из основных задач теории средних [50]. Напомним, что n-средним, или обобщенным средним, на топологическом пространстве X называется непрерывное идемпотентное симметричное отображение из n-ой декартовой степени X в пространство X.

Изучение средних началось в 1930 г. со статьи А. Н. Колмогорова [103] и было продолжено рядом авторов в связи с аналитическими и арифметическими задачами. Г. Ауманн изучал свойства средних на произвольных топологических пространствах и, в частности, показал, что на единичной окружности вообще не существует никаких средних [43]. Б. Экманн, Е. Ганея и П. Хилтон [66, 67] рассматривали различные свойства обобщенных средних на группах. В 1972 г. Дж. Кислинг [102] доказал, что возможность деления на n в $\widehat{G}$ эквивалентна существованию n-среднего на G. Об исследованиях в теории средних и о любопытном применении обобщенных средних в топологических моделях социологии в качестве функций выбора читатель может познакомиться по обзорам [50, 68].

Е. А. Горин, В. Я. Лин и Ю. В. Зюзин продолжили изучение сепарабельных алгебраических уравнений, в том числе, с коэффициентами из некоторых других алгебр функций, в работах [10–12, 16–19]. В статье [17] предпринята попытка создания теории разрешимости в радикалах алгебраических уравнений с коэффициентами из коммутативных банаховых алгебр, которая аналогична классической теории Галуа. Результаты этих работ обсуждаются в обзоре В. Я. Лина [20].

К. Гроув и Г. К. Педерсен [76], развивая тематику, инициированную Р. В. Кэйдисоном [95, 96], применили результаты статьи [8] при решении задач о диагонализации матриц с функциональными коэффициентами.

В статьях [79–81] В. Л. Хансен начал исследование тесной связи, существующей между многочленами Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами и накрывающими отображениями. Дело в том, что с каждым сепарабельным многочленом Вейерштрасса с непрерывными комплекснозначными коэффициентами, определенными на связном топологическом пространстве X, ассоциируется конечнолистное полиномиальное накрывающее отображение. Это полиномиальное накрытие является проекцией на первую координату подпространства нулей многочлена Вейерштрасса в декартовом произведении $X \times \mathbb{C}$ на пространство X. Здесь, как обычно, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Точкой соприкосновения статьи [80] с работой Е. А. Горина и В. Я. Лина [8] является критерий тривиальности полиномиального накрывающего отображения, формулируемый в терминах решения задачи подъема некоторого естественно возникающего отображения из X относительно накрытия конфигурационного пространства [80, теорема 4.1]. Непосредственное отношение к диссертационной работе имеет следующий критерий [81, теорема 5.1]: конечнолистное накрывающее отображение на X эквивалентно полиномиальному накрытию тогда и только тогда, когда оно допускает вложение в тривиальное комплексное линейное расслоение. Полиномиальным накрывающим отображениям и их классификации была посвящена статья Дж. М. Моллера [114], содержавшая ответы на некоторые вопросы, сформулированные в [80, 81] . Сам В. Л. Хансен продолжил свое исследование в [82–84], итоги которого вошли в его монографию [85], изданную Лондонским математическим обществом в 1989 г. В работе [87] В. Л. Хансен и П. Петерсен развили теорию Галуа для расширений функциональных алгебр, связанных с многочленами Вейерштрасса и полиномиальными накрытиями.

В статьях В. Л. Хансена [81,86], В. Г. Бардакова и А. Ю. Веснина [3] исследуются многочлены Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами на единичной окружности $\mathbb{S}^1$. В них доказывается, что всякое конечнолистное накрытие $\mathbb{S}^1$ эквивалентно полиномиальному накрытию [81, теорема 8.3], [86, теорема 2.1], и строится алгоритм [3], позволяющий описать все конечнолистные накрывающие отображения на $\mathbb{S}^1$ с точностью до эквивалентности. Отметим, что большую роль в работах [3, 8, 85, 86] играют группы кос Артина.

Одно из центральных мест в настоящей работе занимают конечнолистные накрывающие отображения из топологических пространств на компактные связные группы. Накрывающие пространства этих отображений являются компактными. При изучении таких накрытий естественно возникает вопрос о существовании структуры группы на накрывающем пространстве, согласованной с исходной топологией, и относительно которой заданное накрывающее отображение становится гомоморфизмом топологических групп. В этом случае мы будем также говорить о *задаче подъема структуры группы* на накрывающее пространство. Этот вопрос послужил другим источником мотивации нашей работы. Положительный ответ на него для связных и локально линейно связных пространств был дан Л. С. Понтрягиным в следующей теореме [26, теорема 79].

Теорема (Л. С. Понтрягин). *Пусть $p : X \longrightarrow G$ — накрывающее отображение из линейно связного топологического пространства X на связную локально линейно связную топологическую группу G с единичным элементом e. Тогда для каждой точки $x_0 \in p^{-1}(e)$ существует единственная структура топологической группы на пространстве X, такая, что точка x_0 является ее единичным элементом, а $p : X \longrightarrow G$ становится гомоморфизмом топологических групп. Более того, если группа G абелева, то отображение $p : X \longrightarrow G$ является гомоморфизмом абелевых групп.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что накрывающее отображение из связного пространства на группу Ли становится гомоморфизмом топологических групп после введения на накрывающем пространстве указанной структуры. В ходе дальнейшего нашего изложения всякое утверждение такого рода для того или иного класса накрывающих отображений мы будем называть *теоремой о накрывающей группе.*

Отметим, что при доказательстве теоремы Понтрягина, ввиду подходящего строения отображения, используются результаты классической теории накрывающих пространств и фундаментальной группы Пуанкаре.

Теорема Понтрягина о накрывающей группе стоит у истоков нашего исследования. В связи с ней несомненно мотивирована постановка вопроса о том, для каких накрывающих отображений на топологические группы справедлива теорема о накрывающей группе.

Как сообщается во введении работы В. Матиевич и К. Эды [71], задача о подъеме групповой структуры на накрывающее пространство произвольной компактной связной группы решалась недавно несколькими авторами. Первым шагом в этом направлении в 2000 г. была статья С. А. Григоряна, А. В. Казанцева и автора диссертации [145]. В ней теорема о накрывающей группе была доказана для конечнолистных накрытий компактных соленоидальных групп. Для построения требуемой групповой структуры использовалось естественно возникающее действие вещественных чисел на накрывающем пространстве топологической группы. Напомним, что группы называются соленоидальными, если в них плотно содержатся их однопараметрические подгруппы. Компактная абелева группа соленоидальна тогда и только тогда, когда группа ее характеров изоморфна подгруппе дискретной группы всех вещественных чисел [31, (25.18) (iii)]. Теорема о накрывающей группе для накрытий соленоидальных групп позволяет доказать классическую теорему Вальтера — Бора — Фландерса о почти периодических решениях алгебраических уравнений.

В 2002 г. А. Кларк [52] доказал теорему о накрывающей группе для расслоения над тором с нульмерным слоем, предположив при этом, что расслоенное пространство является континуумом со свойством однородности. В своем доказательстве он использовал действие группы конечномерного вещественного пространства на расслоенном пространстве.

В 2002 г. С. А. Григорян и автор диссертации [146] анонсировали доказательство теоремы о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на произвольные компактные связные группы. Этот результат (теорема 1.3.1)[1] формулируется следующим образом: *пусть* $p : X \to G$ — *конечнолистное накрывающее отображение из связного пространства* X *на компактную группу* G *с единицей* e*; тогда для любой точки* $\widetilde{e}$ *из множества* $p^{-1}(e)$ *на пространстве* X *существует единственная структура топологической группы, такая, что элемент* $\widetilde{e}$ *является ее единицей, а* p — *гомоморфизмом компактных групп; более того, если группа* G *абелева, то отображение* p — *гомоморфизм абелевых групп.*

Детальное изложение доказательства этой теоремы содержится в препринте [171], размещенном в arxiv.org в 2004 г., и в статье [149], опубликованной в 2006 г. Таким образом результат статьи [145] для компактных соленоидальных групп был обобщен на произвольные компактные связные группы.

Независимое доказательство аналогичной теоремы о накрывающей группе в 2006 г. было опубликовано в статье В. Матиевич и К. Эды [69].

В работах [69, 146, 149, 171] для доказательства теоремы о накрывающей группе используется идея, восходящая к работе П. С. Александрова [38], об аппроксимации сложных топологических объектов более простыми и попытке переноса некоторых свойств вторых объектов на первые. Со временем эта идея оформилась в понятия обратного спектра пространств и его предела.

Эти понятия, а также двойственные к ним — понятия прямого спектра и его предела, занимают исключительно важные места в современной математике, и особенно, в алгебре, анализе и топологии. Они носят общекатегорный характер и позволяют строить новые объекты и использовать развитую технику теории категорий и функторов.

Важной вехой в истории применения обратных спектров, имеющей непосредственное отношение к кругу идей данной диссертации, стало глубокое исследование Л. С. Понтрягиным и А. Вейлем структуры топологических групп с использованием аппроксимации их группами Ли. В статье [1, с. 220] отмечается, что Л. С. Понтрягин первым применил несчетные обратные спектры в виде так называемых рядов Ли $\{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$, то есть, вполне упорядоченных спектров, состоящих из групп Ли, и показал, что компактная группа G является пределом ряда Ли.

В работах [146, 149, 171] по ряду Ли $\{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ для базы G заданного

[1]В скобках указываются номера, под которыми утверждения появляются в основном тексте диссертации.

связного конечнолистного накрытия $p : X \longrightarrow G$ строится семейство конечнолистных накрытий $\{p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda\}$, заиндексированное направленным подмножеством множества Λ. Это семейство аппроксимирует накрытие p. При этом к каждому из накрытий p_λ применима теорема Понтрягина о накрывающей группе. Все это позволяет наделить накрывающее пространство X требуемой структурой топологической группы (см. также [144]).

В статье В. Матиевич и К. Эды [69] для доказательства теоремы о накрывающей группе использовалась аппроксимационная конструкция из статьи 2001 года С. Мардешича и В. Матиевич [110] по теории оверлеев (об этой теории будет сказано дальше) и теорема Понтрягина.

В работах [146,149,171] даются приложения теоремы о накрывающей группе к вопросу о структуре накрытий компактной связной абелевой группы G, к теории многочленов Вейерштрасса над банаховой алгеброй $C(G)$, к вопросу о существовании обобщенных средних на G. Об этих приложениях речь пойдет ниже. Подчеркнем, что в них группа G абелева.

Напомним, накрытие называется связным, если оно действует между связными пространствами. Из теоремы о накрывающей группе следует, что в группе характеров $\widehat{G}$ возможно деление на конечную кратность связного накрытия p группы G только в том случае, когда кратность накрытия p равняется единице, то есть, p является гомеоморфизмом [149, теорема 2]. Из этого результата вытекает, что возможность деления на $n!$ в группе характеров $\widehat{G}$ достаточна для тривиальности всех n-листных накрытий группы G [149, теорема 3]. В статьях Хансена приведены условия тривиальности полиномиальных накрытий, формулируемые в алгебраических и топологических терминах [80, теорема 4.1], [81, теорема 4.3]. Нетрудно показать, что полная разрешимость сепарабельного многочлена Вейерштрасса над алгеброй $C(G)$ эквивалентна тривиальности полиномиального накрытия группы G, определяемого им. Поэтому из критерия полной разрешимости, сформулированного на с. 7, следует критерий тривиальности всех n-листных полиномиальных накрытий группы G. Таким образом, видно, что теорема о накрывающей группе позволяет доказать, что для тривиальности всех n-листных накрытий группы G необходимо и достаточно $n!$-делимости группы $\widehat{G}$. Заметим, что доказательство необходимости условия из этого критерия содержится в статье автора диссертации [140, теорема 3]. В этой работе изучаются свойства корней многочленов Вейерштрасса с привлечением теоремы ван Кампена [98] о факторизации обратимых элементов алгебры, состоящей из непрерывных функций на компактной связной группе.

Другим приложением теоремы о накрывающей группе является следующее утверждение (теорема 2.2.1): *любое конечнолистное накрывающее отображение на* G *эквивалентно полиномиальному накрытию* [149, теорема 5]. При доказательстве этой теоремы накрывающее пространство заданного накрытия группы G сначала вкладывается в тривиальное комплексное линейное расслоение. Сделать это нам позволяет теорема о накрывающей группе и факты из теории характеров компактных абелевых групп. Для того, чтобы завершить доказательство теоремы остается воспользоваться приведенным выше критерием Хансена [81, теорема 5.1]. В диссертации, для независимости и полноты изложения, на следующем этапе доказательства мы строим многочлен Вейерштрасса, определяющий искомое полиномиальное накрытие. Отметим также, что эта теорема может быть использована для доказательства обсуждавшегося в предыдущем абзаце критерия тривиальности всех n-листных накрытий группы G.

Исследованию связи между накрытиями компактных связных абелевых групп и многочленами Вейерштрасса посвящена статья автора диссертации [139]. В ней доказывается, что *каждое связное конечнолистное накрывающее отображение на группу* G *эквивалентно отображению проектирования на первую координату непрерывного многообразия Вейерштрасса, определяемого двучленами* $x^{n_j} - \chi_j$, *где* χ_j *— характер группы* G, $j = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$ (теорема 2.3.1). Под непрерывным многообразием Вейерштрасса мы понимаем подпространство в декартовом произведении G и нескольких экземпляров поля комплексных чисел, которое задается нулями многочленов Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами. Для установления этого результата мы можем, благодаря теореме о накрывающей группе, рассматривать заданное накрытие в качестве морфизма в категории компактных групп. Это позволяет нам использовать в ходе доказательства факты теории двойственности Понтрягина — ван Кампена. Из этого результата следует, что, если кратность накрытия равняется простому числу, то многообразие Вейерштрасса совпадает с множеством нулей всего лишь одного двучлена вида $x^{n_j} - \chi_j$.

Теорию оверлеев создал в 1972 г. Р. Фокс [74, 75] с целью переноса фактов классической теории накрывающих пространств на накрытия произвольных связных метрических пространств. При этом он использовал идеи теории шейпов. В работе С. Мардешича и В. Матиевич [110] теория оверлеев была распространена на все связные пространства. Каждый оверлей, по определению, является накрытием. Обратное утверждение не всегда верно [75]. Однако оно имеет место в некоторых важных случаях, например, когда база накрывающего отображения локально связна или когда накрытие конечнолистно [75, 115] (см. также [110, 111]). В качестве примера приложения своей теории Фокс [74, 75] рассмотрел связные оверлеи над P-адическими соленоидами. Напомним, что через $P = (p_1, p_2, \ldots)$ обозначается произвольная последовательность простых чисел. P-адический соленоид Σ_P является пределом обратной последовательности, все объекты которой совпадают с окружностью $\mathbb{S}^1$, а каждый связующий гомоморфизм представляет собой операцию возведения в степень. При этом показателями степеней служат члены последовательности P. Соленоид Σ_P — метризуемая компактная связная абелева группа. В статье М. Маккорда [112], в частности, доказано, что соленоид не является локально связным. Фокс [74, пример 2] показал, что если для натурального числа n каждое простое число, встречающееся бесконечно много раз в последовательности P, не является делителем n, то существует только один связный n-листный оверлей у P-адического соленоида и, более того, так получаются все его связные оверлеи. Это утверждение о конечнолистных накрытиях P-адического соленоида, поскольку каждое из них является оверлеем.

В работах автора диссертации и его соавтора [171], [149] сформулирована гипотеза С. А. Богатого о справедливости теоремы о накрывающей группе для оверлеев над связными топологическими группами. В. Матиевич, К. Эда в 2013 г. и 2017 г. в статьях [70, 71] , а также Я. Дыдак [65] в 2016 г. доказали и развили эту гипотезу. Кроме того, в статье [70] была показана существенность условия конечнолистности накрытия для решения задачи подъема групповой структуры на накрывающее пространство компактной связной группы. Точнее говоря, было построено бесконечнолистное накрывающее отображение из связного пространства на соленоид Σ_P, такое, что на накрывающем пространстве требуемая структура топологической группы не существует.

P-адические соленоиды Σ_P образуют чрезвычайно интересный класс топологических групп. Они имеют почти вековую историю. Впервые они появились в работах Л. Вьеториса [131], Б. Л. ван дер Вардена и Д. ван Данцига [58, 59] в конце 20-х г. XX века. Эти объекты можно определить различными эквивалентными способами [27, с.286], [31, (10.12)]. Геометрически соленоиды описываются следующим образом. Пусть имеется произвольная последовательность натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots)$. В трехмерном пространстве рассмотрим полноторие T_1, полученное вращением диска вокруг некоторой оси. Второй экземпляр T_2 такого же полнотория, наматывая n_1 раз вокруг оси T_1, вложим в T_1. Третий экземпляр полнотория T_3, наматывая n_2 раза вокруг оси T_2, вложим в T_2. В результате такого действия полноторие T_3 намотано $n_1 n_2$ раза вокруг оси T_1. Продолжая этот процесс, мы получаем бесконечную последовательность вложенных друг в друга полноторий, пределом которой является соленоид. В 1927 г. при изучении алгебраических характеристик топологических пространств, в том числе, их когомологий, Л. Вьеторис [131] построил *диадический* соленоид, определяемый последовательностью $P = (2, 2, \ldots)$. В 1930 г. Д. ван Данциг [59] исследовал произвольный n-адический соленоид, определяемый постоянной последовательностью, членами которой является натуральное число n. Он рассматривал эти соленоиды с точки зрения пространств, наделенных свойством однородности, и, в частности, дал их топологическую классификацию. Однородность соленоида проистекает из того факта, что он снабжается структурой топологической группы. Общее определение P-адического соленоида содержится в работе ван Данцига [60]. Р. Бинг [44, с.210] заметил, что при определении соленоидов, не теряя общности, можно ограничиться лишь последовательностями простых чисел. В 1965 г. М. Маккорд [112] завершил классификацию P-адических соленоидов, подтвердив гипотезу, выдвинутую Р. Бингом [44]. Она утверждает, что класс топологической эквивалентности, определяемый P-адическим соленоидом, характеризуется набором простых чисел и количеством их вхождений в последовательность P.

Теория P-адических соленоидов и более общих соленоидальных пространств [112] очень красивая и глубокая. Она богата приложениями в самых различных областях математики и служит источником разнообразных содержательных примеров. В качестве подтверждения сказанного, отметим лишь, что P-адические соленоиды выступают в следующих интересных ролях: а) динамических систем, у которых минимальные множества почти периодических движений не являются локально связными [25, с. 321]; б) пространств, на которых действуют нестабильные гомеоморфизмы [135]; в) аттракторов [136]. Эта теория по сей день привлекает внимание исследователей [47, 70, 93, 94].

В настоящей работе изучаются конечнолистные накрывающие отображения P-адических соленоидов, которые с различных точек зрения исследовали Ч. Юйчэн [137], Я. Квапиш [105], П. Коваррубиас, Я. Харатоник [51], Я. Аартс, Р. Фоккинк [36], В. Матиевич [111], С. Ван, Б. Цзян и Х. Чжэн [94] и др. Как уже отмечалось выше, в качестве примеров приложения теории оверлеев эти накрытия служат в работах Р. Фокса [74,75]. Как частный случай эндоморфизмов возведения в степень элементов так называемых обобщенных соленоидов, которыми являются и P-адические соленоиды, эти отображения выступают в работе С. А. Богатого и О. Д. Фролкиной [4]. Здесь отметим, что эндоморфизмы возведения в степень элементов топологической группы изучались еще Х. Хопфом. В частности, для компактной связной группы Ли он показал сюръективность этих эндоморфизмов [5, следствие 2.2.1b].

Ч. Юйчэн [137] в 2000 г., П. Коваррубиас и Я. Харатоник [51] в 2002 г. исследовали различные свойства эндоморфизмов возведения в степень элементов диадического соленоида $\Sigma_{(2,2,\ldots)}$. Эндоморфизм $h^k_{(2,2,\ldots)} : \Sigma_{(2,2,\ldots)} \longrightarrow \Sigma_{(2,2,\ldots)}$ возведения в степень $k \in \mathbb{N}$ рассмотрен ими в качестве предельного отображения, индуцируемого морфизмом между двумя копиями одной и той же обратной последовательности, пределом которой служит диадический соленоид. Эти авторы, в частности, доказали следующие утверждения: 1) для каждого $k \in \mathbb{N}$ предельное отображение $h^k_{(2,2,\ldots)}$ является конечнолистным накрытием [51, предложение 8]; 2) при $k = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, оно является гомеоморфизмом [51, предложение 18]; 3) соленоид $\Sigma_{(2,2,\ldots)}$ допускает накрытие любой нечетной кратности k вида $h^k_{(2,2,\ldots)}$ и не допускает накрытия четной кратности k вида $h^k_{(2,2,\ldots)}$ [51, теорема 19]; 4) для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество периодических точек отображения $h^k_{(2,2,\ldots)}$ плотно в соленоиде $\Sigma_{(2,2,\ldots)}$ [51, предложение 40].

В статье 2001-го г. Я. Квапиша [105, лемма 4.1], в частности, доказывается, что отображение $h^k_P : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$ возведения в степень k для произвольного P-адического соленоида является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда каждый простой делитель числа k встречается бесконечно много раз в последовательности P.

В диссертации доказывается следующая теорема, характеризующая накрывающие отображения P-адических соленоидов: *пусть P — произвольная последовательность простых чисел и $k \in \mathbb{N}$; если у числа k имеется простой делитель, который встречается бесконечно много раз в последовательности P, то не существует k-листного связного накрывающего отображения на P-адический соленоид; если же у числа k нет простого делителя, который встречается бесконечно много раз в последовательности P, то отображение $h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$ возведения в степень k является k-листным накрывающим отображением; более того, каждое связное k-листное накрывающее отображение на Σ_P эквивалентно предельному отображению h_P^k* (теорема 3.2.4). Независимые доказательства утверждений этой теоремы содержатся в статье В. Матиевич [111, см. теорему 8 и ее доказательство], опубликованной в 2003 г., и в работах автора диссертации: в препринте [170, теорема 2, замечание 2], размещенном в arxiv.org в 2003 г. и вышедшем в виде статьи [147, теорема 2, замечание 2] в 2005 г. Для получения сформулированного результата в статье [111] применяется развиваемая в ней теория конечнолистных накрытий паракомпактных пространств с использованием фактов теории оверлеев из [110]. Доказательство того факта, что всякое k-листное связное накрытие произвольного P-адического соленоида Σ_P эквивалентно эндоморфизму h_P^k возведения в степень k элементов Σ_P дается и в статье автора [152, теорема 5]. В работах автора диссертации [147, 152, 170] используются методы статей [51, 137] и аппроксимирующее семейство накрытий, построенное в [146, 149, 171]. Отметим также, что независимое доказательство того, что всякое связное конечнолистное накрывающее пространство P-адического соленоида гомеоморфно ему самому, опубликовано в 2008 г. в статье С. Вана, Б. Цзяня и Х. Чжэня [94].

Основываясь на методе статьи [51], автор диссертации изучил вопрос о плотности множеств эндоморфизмов возведения в степень элементов произвольного P-адического соленоида. Результаты этого исследования содержатся в указанных выше препринте [170, предложения 5,6,7] и статье [147, предложения 5,6,7]. Интересно отметить, что при этом используется классическая теорема Ферма — Эйлера о сравнениях чисел. С. А. Богатый и О. Д. Фролкина [4, теорема 19, пункт 1)] в 2005 г., в частности, доказали критерий плотности множества периодических точек отображения возведения в степень элементов обратного предела обратной последовательности, состоящей из копий одной и той же произвольной компактной связной группы Ли. Связующими морфизмами этой последовательности являются отображения возведения в степень. А именно, множество периодических точек отображения возведения в степень $k \geqslant 2$ элементов обратного предела плотно тогда и только тогда, когда существует простое число, которое не делит k и не входит бесконечное число раз в набор простых чисел, определяющий связующие морфизмы обратной последовательности. Частным случаем этого утверждения является критерий (теорема 3.3.1) плотности множества периодических точек отображения возведения в степень элементов P-адического соленоида, доставляемый результатами работ автора диссертации [147, 170, предложения 5,6,7].

Отвечая на вопрос Я. Харатоника и А. Илланеса [104, с.1931] о существовании 2-средних на соленоидах, П. Крупски [104, теорема 2] доказал, что на соленоиде, задаваемом последовательностью натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots)$ существует 2-среднее тогда и только тогда, когда эта последовательность содержит бесконечно много четных чисел. Его доказательство базируется на методе статьи Экманна [66] и теореме Шеффера [127, следствие 2] о гомотопическом представлении отображения компактной связной группы. Мы [148] доказываем аналог критерия из [104] для произвольных n-средних на P-адическом соленоиде. А именно, *пусть P — произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует n-среднее на P-адическом соленоиде в том и только том случае, когда каждый простой делитель числа n встречается бесконечно много раз в последовательности* P (теорема 3.4.1). Наше доказательство основано на методе статьи [104]. Таким образом, приведенные результаты о накрытиях и средних позволяют сказать, что n-среднее на P-адическом соленоиде и его n-листное связное накрытие не существуют одновременно. Нетрудно показать, что в группе рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$ возможно деление на n тогда и только тогда, когда каждый простой делитель числа n встречается бесконечно много раз в P. Поэтому оба критерия из [104] и [148] могут быть выведены из критерия Кислинга [102] о существовании обобщенных средних на компактных связных абелевых группах, сформулированного выше на с. 7.

P-адические соленоиды тесно связаны с некоторыми классами C^*-алгебр.

В диссертационной работе изучаются предельные $*$-эндоморфизмы редуцированных полугрупповых C^*-алгебр для полугрупп рациональных чисел. Каждая такая полугруппа является полугруппой в группе характеров P-адического соленоида.

В теории операторных алгебр рассматриваются различные типы полугрупповых C^*-алгебр. Исследованием свойств этих алгебр занимались Л. Кобурн, Р. Дуглас, Дж. Мёрфи, И. Кунц, Дж. Дункан, А. Патерсон и др. Обширная литература по предмету и краткая его история содержатся в обзоре С. Ли [108].

Важный класс C^*-алгебр представляют собой редуцированные полугрупповые C^*-алгебры $C_r^*(S)$ для полугрупп S со свойством сокращения, называемые также алгебрами Теплица. Поскольку каждая такая алгебра порождается регулярным представлением соответствующей полугруппы, то этот класс C^*-алгебр является очень естественным. Начало изучения таких C^*-алгебр для аддитивной полугруппы неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}^+$ было положено Л. Кобурном [53, 54] в 1967 г. Работы Л. Кобурна, Р. Дугласа и их соавторов [55, 56, 63, 64] были мотивированы некоторыми вопросами из теории индекса операторов и K-теории. В статье [64] Р. Дуглас рассмотрел случай полугрупповых C^*-алгебр для подполугрупп аддитивной группы действительных чисел. В статьях 1987 г. и 1989 г. Дж. Мёрфи [116, 117] исследовал случай для положительных конусов в упорядоченных абелевых группах. Было доказано [116], что изометрические представления полугрупп обладают свойством универсальности. Кроме того, Мёрфи построил функтор из категории частично упорядоченных групп в категорию C^*-алгебр, значениями которого являются алгебры Теплица для положительных конусов в группах. При этом было показано [116, теорема 1.6], что этот функтор является непрерывным, то есть, переводит пределы индуктивных систем групп в соответствующие пределы индуктивных систем алгебр.

Независимые доказательства некоторых результатов из статьи [116] опубликованы в 1994 г. в работе С. Аджи, М. Лаки, М. Нилсена и И. Рэйбёрна [37, следствия 2.5, 2.6].

В 1991 г. и 1994 г. Мёрфи [118, 120] обобщил конструкцию редуцированной полугрупповой C^*-алгебры для произвольной полугруппы с левым сокращением.

В литературе по теории C^*-алгебр свойство универсальности изометрического представления для полугруппы $\mathbb{Z}^+$, то есть, в случае алгебры Теплица $C_r^*(\mathbb{Z}^+)$, обозначаемую нами через $\mathcal{T}$, известно также как теорема Кобурна. Напомним, что алгебра Теплица $\mathcal{T}$ определяется как C^*-подалгебра в C^*-алгебре всех ограниченных линейных операторов на комплексном гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^+)$ квадратично суммируемых комплекснозначных функций на $\mathbb{Z}^+$, которая порождается оператором правого сдвига T на $l^2(\mathbb{Z}^+)$. Теорема Кобурна формулируется следующим образом [23, теорема 3.5.18].

Теорема (Л. Кобурн). *Пусть V — изометрия в некоторой унитальной C^*-алгебре B. Тогда существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм $\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow B$, такой, что $\varphi(T) = V$. Кроме того, если $VV^* \neq 1$, то φ изометричен.*

В данной диссертации теорема Кобурна служит инструментом для построения индуктивной последовательности алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, определяемой произвольной последовательностью натуральных чисел $(m_1, m_2, \ldots)$. В ней каждый объект совпадает с алгеброй Теплица $\mathcal{T}$. Ее связующие $*$-гомоморфизмы $\varphi_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ задаются формулой $\varphi_n(T) = T^{m_n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тот факт, что эта формула определяет единственный $*$-гомоморфизм сразу следует из теоремы Кобурна. Непосредственное доказательство этого факта содержится в статье автора диссертации [151]. Идея этого доказательства используется в статьях [143, 155] при построении вложений полугрупповых C^*-алгебр.

Нетрудно показать, что при нахождении пределов рассматриваемых индуктивных последовательностей, как и в случае соленоидов, мы, не теряя общности, можем ограничиться рассмотрением последовательностей, состоящих лишь из простых чисел (замечание 4.1.2).

Для заданной индуктивной последовательности алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, определяемой произвольной последовательностью простых чисел $P = (p_1, p_2, \ldots)$ в диссертационной работе показывается, что ее предел изоморфен редуцированной полугрупповой C^*-алгебре $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. Здесь $\mathbb{Q}_P^+$ — полугруппа всех неотрицательных чисел в группе рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$, которая порождается всеми дробями p_n^{-1} для простых чисел p_n из последовательности P. Хорошо известно, что дискретная группа $\mathbb{Q}_P$ изоморфна группе характеров P-адического соленоида. Эта группа представляется в виде предела индуктивной последовательности, в которой все объекты совпадают с аддитивной группой целых чисел, а все связующие гомоморфизмы — умножения на числа p_n [117, см., например, предложение 1]. Мы даем независимое доказательство указанного факта (предложение 4.2.1), не использующее непрерывности функтора из работы Мёрфи [116]. Аргументы этого доказательства используются в статьях [142, 154, 157] при рассмотрении индуктивных систем алгебр Теплица над произвольными направленными множествами.

Основной результат диссертации о полугрупповых C^*-алгебрах посвящен предельным $*$-эндоморфизмам алгебр $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ [141, теоремы 1,2], [158, теоремы 2,3]. Для фиксированных последовательности P и натурального числа $k \geqslant 2$ рассматривается предельный $*$-эндоморфизм ϕ_P^k алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. Он индуцируется «покоординатным» морфизмом $\{\phi_n^k : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \mid n \in \mathbb{N}\}$ между двумя копиями одной и той же индуктивной последовательности алгебр Теплица, определяемой последовательностью простых чисел P, где $\phi_n^k(T) = T^k$ для всех натуральных n. В работе доказывается следующий критерий (теорема 4.3.1): *для того, чтобы предельный эндоморфизм* ϕ_P^k *алгебры* $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ *был* $*$*-автоморфизмом необходимо и достаточно, чтобы каждый простой делитель числа* k *встречался бесконечно много раз в последовательности* P. Свойствами, эквивалентными условию, указанному в этом критерии, являются возможность деления на k в группе характеров P-адического соленоида и существование k-среднего на нем (теорема 4.3.2).

Как известно, изучение автоморфизмов алгебр представляет большой интерес в теории банаховых алгебр [121]. Они тесно связаны с дифференцированиями алгебр и, говоря неформально, отражают внутреннюю симметрию объекта [30, гл.7, §2].

С середины 1990-х г. по настоящее время теорию полугрупповых C^*-алгебр и близких к ним алгебр глубоко развили И. Кунц, М. Лака, С. Ли, А. Ника, М. Норлинг, И. Рэйбёрн и др. В частности, С. Ли при изучении полугрупповых C^*-алгебр рассматривал такие важные понятия, как аменабельность полугрупп и ядерность алгебр [106, 107].

В 2013 г. Н. Браунлоу и И. Рэйбёрн [47] использовали результаты о конечнолистных накрывающих отображениях P-адических соленоидов, которые содержатся в статье автора диссертации [147], для исследования скрещенных произведений C^*-алгебр.

Обзор недавних достижений в указанной области теории C^*-алгебр содержится в статьях [106, 107] и в упоминавшейся выше работе [108].

Свой вклад в развитие теории редуцированных полугрупповых C^*-алгебр вносят и работы представителей казанской математической школы по теории операторных алгебр [2, 13, 14, 21, 42, 141, 156]. В статьях автора диссертации и его соавторов [109, 142, 154, 156, 157] рассматриваются индуктивные системы C^*-алгебр над произвольными частично упорядоченными множествами. При этом получены результаты, показывающие тесную связь между алгебраическими и топологическими свойствами возникающих объектов.

Помимо самостоятельного интереса, исследование свойств индуктивных последовательностей и систем C^*-алгебр над частично упорядоченными множествами мотивировано их ролью, которую они играют в алгебраической квантовой теории поля. Дело в том, что такие индуктивные системы являются одним из основных объектов изучения при аксиоматическом подходе к алгебраической квантовой теории поля, предложенном Р. Хаагом, Х. Араки и Д. Кастлером [39, 77, 78] в середине прошлого столетия. Они строятся из алгебр локальных наблюдаемых и несут в себе информацию о квантовополевых системах. В настоящее время этот подход активно развивается в работах Э. Васселли, Дж. Руци, К. Фреденхагена и других авторов [48, 123–126, 130].

В статье [150], содержание которой представлено в заключительном параграфе диссертации, решается задача об аппроксимации конечного набора элементов полной матричной алгебры, которая является банаховой алгеброй относительно произвольной нормы на ней. При этом накладывается условие, что для произвольных отображений из полной линейной группы в себя, среди которых хотя бы одно является открытым, аппроксимирующие матрицы и матричное произведение значений отображений на этих матрицах должны иметь простые спектры. Существенную роль при решении указанной задачи играет естественная структура топологической группы на полной линейной группе. Эта задача используется при изучении топологических свойств тензорного ранга в статье [153].

Актуальность темы диссертации обусловлена источниками ее мотивации. Она выражается в том, что решения задач, рассматриваемых в диссертации, вносят вклад в дальнейшее естественное развитие обсуждаемых выше направлений фундаментальных исследований в топологической алгебре и функциональном анализе. Весьма существенным оказывается применение теоремы о накрывающей группе к изучению полиномиальных накрывающих отображений и многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций, заданных на компактных связных абелевых группах. Безусловно, актуальность тематики подтверждается и участием в ее разработке ряда известных специалистов. Несомненный интерес вызывается тем, что результаты работы демонстрируют взаимосвязь различных областей математики.

Степень разработанности темы до начала представленного исследования характеризуют упомянутые выше работы и содержащиеся в них следующие факты: результаты из теории многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций, показывающие связь многочленов с конечнолистными накрытиями топологических пространств; теорема Понтрягина о накрывающей группе для связных локально линейно связных топологических групп; результаты об отображениях P-адических соленоидов и морфизмах редуцированных полугрупповых C^*-алгебр.

Целью работы является исследование свойств отображений между пространствами, на которых есть или может быть введена структура топологической группы, а также эндоморфизмов тех операторных алгебр, которые определяются с помощью понятия полугруппы. Составной частью этой цели является изучение связи между многочленами Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций и конечнолистными накрывающими отображениями на компактные связные абелевы группы. В первую очередь, для достижения поставленной цели ставится задача доказательства аналога теоремы Понтрягина для конечнолистных накрывающих отображений из связных пространств на произвольные компактные связные группы. Другими словами, ставится задача подъема структуры группы с базы накрытия на его накрывающее пространство. В свою очередь, для ее решения ставится цель по ряду Ли базы накрытия построить семейство накрытий групп из этого ряда, которые аппроксимируют заданное накрытие и к которым применима теорема Понтрягина о накрывающей группе.

Доказательство теоремы о накрывающей группе позволяет поставить целью привлечение фактов и методов теории двойственности Понтрягина — ван Кампена для описания конечнолистных накрытий компактных связных абелевых групп в терминах полиномиальных накрывающих отображений, порожденных многочленами Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами.

Далее, ставится задача применения теоремы о накрывающей группе для компактных связных абелевых групп вместе с фактами теории их характеров для исследования структуры конечнолистных накрытий и к изучению вопроса о существовании обобщенных средних на группах.

Еще одной целью является изучение отображений P-адических соленоидов. При этом ставится задача применения аппроксимирующей конструкции, построенной для доказательства теоремы о накрывающей группе и методов статей [51, 137] для описания связных конечнолистных накрытий произвольных P-адических соленоидов. Также ставится задача изучения вопроса о плотности множеств периодических точек эндоморфизмов возведения в степень элементов P-адических соленоидов. Ставится задача доказательства критерия существования произвольных n-средних для P-адических соленоидов на основе метода статьи [104].

Другой целью является изучение свойств предельных эндоморфизмов редуцированных полугрупповых C^*-алгебр для полугрупп рациональных чисел. В связи с этим ставится задача изучения индуктивных последовательностей алгебр Теплица, определяемых последовательностями простых чисел, их пределов и морфизмов между ними. Ставится цель получения критериев того, когда предельные эндоморфизмы таких алгебр являются $*$-автоморфизмами.

Для полной матричной алгебры, множество обратимых элементов которой обладает естественной структурой топологической группы, ставится цель использования этой структуры для решения задачи аппроксимации элементов этой банаховой алгебры.

Методология и методы исследования. В работе используются методы анализа, топологии и топологической алгебры, а также общекатегорные методы. Для доказательства теоремы о накрывающей группе для конечнолистного накрывающего отображения на произвольную компактную связную группу задействован метод обратных спектров. Специально для этого построено семейство конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на компактные локально линейно связные группы, аппроксимирующее заданное накрытие. При исследовании свойств многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций, заданных на компактных связных абелевых группах, ключевую роль играют доказанная теорема о накрывающей группе и методология теории двойственности Понтрягина — ван Кампена. При изучении свойств накрывающих отображений соленоидов используются построенное аппроксимирующее семейство накрытий и теоретико-числовые методы. Для работы с предельными эндоморфизмами полугрупповых C^*-алгебр используются методы индуктивных последовательностей и теории C^*-алгебр.

Основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту, приводятся ниже.

1. Доказана теорема о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на компактные связные группы. Тем самым теорема Понтрягина о накрывающей группе обобщена на накрытия произвольных компактных связных групп. Получены приложения доказанной теоремы к изучению структуры накрытий и к вопросу о существовании обобщенных средних на абелевых группах.

2. Показано, что каждое конечнолистное накрывающее отображение из произвольного хаусдорфова пространства на компактную связную абелеву группу эквивалентно полиномиальному накрытию, определяемому сепарабельным многочленом Вейерштрасса над банаховой алгеброй непрерывных функций, заданных на этой группе. При этом всякое такое связное накрытие эквивалентно отображению проектирования на первую координату непрерывного многообразия Вейерштрасса, задаваемого конечным набором двучленов, коэффициентами которых являются характеры группы.

3. С использованием построенного при доказательстве теоремы о накрывающей группе аппроксимирующего семейства накрытий показано, что каждое конечнолистное связное накрывающее отображение P-адического соленоида эквивалентно предельному отображению, являющемуся эндоморфизмом возведения в степень элементов этого соленоида. Исследован вопрос о плотности множеств периодических точек эндоморфизмов возведения в степень элементов P-адического соленоида.

4. В алгебраических, теоретико-числовых и функциональных терминах по-

лучены критерии того, когда предельные эндоморфизмы редуцированных полугрупповых C^*-алгебр для полугрупп рациональных чисел являются $*$-автоморфизмами.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные выше и выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость диссертации. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Они могут применяться для дальнейших исследований в рамках теории накрывающих пространств, теории многочленов Вейерштрасса с коэффициентами в коммутативных банаховых алгебра, изучении полугрупповых C^*-алгебр и в алгебраической квантовой теории поля, где индуктивные системы C^*-алгебр играют важную роль. Результаты, представленные в диссертации, использовались соискателем при чтении специальных курсов для студентов Казанского (Приволжского) федерального университета и могут аналогично использоваться в вузах Российской Федерации. Часть этих материалов вошла в учебно-методические пособия [164, 165].

Степень достоверности результатов. Все результаты диссертации представлены в форме математических утверждений (лемм, предложений, теорем, утверждений, следствий). Они снабжены строгими доказательствами. Вспомогательные факты взяты автором диссертации из авторитетных математических научных журналов, учебников и монографий. Все результаты, которые выносятся на защиту, опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Апробация работы. Основные результаты, включенные в диссертационную работу, были представлены на следующих международных конференциях и школах:

- «Актуальные проблемы математики и механики» в научно-исследовательском институте математики и механики имени Н. Г. Чеботарева Казанского ГУ, Казань, 1–3 октября 2000 г.;

- 5-я, 7-я, 8-я, 10–14-я Казанские летние школы — конференции «Теория функций, ее прилож. и смежн. вопросы», К(П)ФУ, соответственно 27 июня — 4 июля 2001 г., 27 июня — 4 июля 2005 г., 27 июня — 4 июля

2007 г., 1–7 июля 2011 г., 22–28 августа 2013 г., 27 июня — 4 июля 2015 г., 21–27 августа 2017 г., 7–12 сентября 2019 г.;

- «Актуальные проблемы математики и механики», посвященная 200–летию Казанского ГУ и 70–летию научно-исследовательского института математики и механики имени Н. Г. Чеботарева Казанского ГУ, Казань, 26 сентября — 1 октября 2004 г.;

- «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященная 100–летию со дня рождения академика С. М. Никольского, Москва, МИРАН имени В. А. Стеклова, 23–29 мая 2005 г.;

- «Александровские чтения — 2006», посвященная 110–летию со дня рождения академика П. С. Александрова, Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультетт, 30 мая — 2 июня 2006 г.;

- конференция по общей топологии и ее приложениям «The Tenth Prague Topological Symposium», Прага, 13–19 августа 2006 г.;

- «Актуальные проблемы математики и механики», посвященная 75–летию научно-исследовательского института математики и механики имени Н. Г. Чеботарева Казанского ГУ, Казань, 10–16 октября 2009 г.;

- «Сеточные методы для краевых задач и приложения, X», Казань, К(П)ФУ, 24–29 сентября 2014 г.;

- «Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии», посвященной юбилеям П. А. и А. П. Широковых, Казань, К(П)ФУ, 26 июня — 2 июля 2016 г.;

- «Сеточные методы для краевых задач и приложения, XI», школа — конференция молодых исследователей, Казань, К(П)ФУ, 25–29 сентября 2016 г.;

- Уфимская математическая конференция, Уфа, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский ГУ, 27–30 сентября 2016 г.;

- конференция по теории функций, посвященная 100–летию со дня рождения А. Ф. Леонтьева, Уфа, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский ГУ, АН РБ, 24–27 мая 2017 г.;

- «Probability Theory and Mathematical Statistics», Казань, К(П)ФУ, 7–10 ноября 2017 г.;

- «Комплексный анализ и геометрия», Уфа, Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Башкирский ГУ, 23–26 мая 2018 г.;

- «Quantum Structures — 2018», Казань, К(П)ФУ, 16–20 июля 2018 г.;

- конференция, посвященная 100–летию со дня рождения М. Джрбашяна, Ереван, Институт математики НАН Армении, 22–24 октября 2018 г.;

- «Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis», Долгопрудный, МФТИ, 17–21 июня 2019 г.;

- «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвященная 125–летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского унив-та чл.-корр. АН СССР Н. Г. Чеботарева и 75–летию со дня рождения зав. каф. алгебры ак. АН РТ М. М. Арсланова, Казань, К(П)ФУ, 24–28 июня 2019 г.

Часть результатов диссертации обсуждалась на Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и механики–2019», Казань, К(П)ФУ, 29 ноября – 4 декабря 2019 г.

Все основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, докладывались на научно–исследовательских семинарах, перечисляемых ниже:

- «Алгебры в анализе» кафедры теории функций и функционального анализа в МГУ им. М. В. Ломоносова (руководители: профессор А. Я. Хелемский, доцент А. Ю. Пирковский) в 2001, 2006 гг. и 8 декабря 2017 г.;

- «Алгебры операторов и их приложения» кафедры математического анализа в Казанском государственном университете (руководитель: профессор А. Н. Шерстнев) в 2000, 2001 и 2004 гг.;

- на семинаре по общей топологии имени академика П. С. Александрова кафедры общей топологии и геометрии в МГУ им. М. В. Ломоносова (зав. кафедрой профессор В. В. Федорчук) 29 марта 2001 г.;

- «Топология и Анализ» кафедры высшей геометрии и топологии в МГУ им. М. В. Ломоносова (руководители: профессора А. С. Мищенко, В. М. Мануйлов, Е. В. Троицкий и др.) 20 марта 2003 г.;

- «Топологическая динамика» кафедры общей топологии и геометрии в МГУ им. М. В. Ломоносова (руководитель: профессор С. А. Богатый) в 2004 г.;

- на семинаре кафедры геометрии в Казанском государственном университете (зав. кафедрой профессор Б. Н. Шапуков) в 2004 г.;

- на семинаре по функциональному анализу и математической физике кафедры высшей математики в Казанском государственном энергетическом университете (руководители: профессора С. А. Григорян, А. С. Ситдиков, доцент Е. В. Липачева) регулярно в 2006–2019 гг.;

- на семинаре по функциональному и численному анализу кафедр вычислительной математики и математического анализа в Казанском (Приволжском) федеральном университете (руководители: профессора М. М. Карчевский, Р. Р. Шагидуллин, доцент Р. Н. Гумеров) регулярно в 2014–2019 гг.;

- на семинаре кафедры алгебры и математической логики в Казанском (Приволжском) федеральном университете (руководители: профессор М. М. Арсланов, доцент А. Н. Абызов) 15 декабря 2017 г.;

- на семинаре кафедры высшей математики в МФТИ (руководитель: профессор Е. С. Половинкин) 21 мая 2019 г.

Диссертационная работа прошла апробацию на заседании кафедры математического анализа в К(П)ФУ (зав. кафедрой профессор С. Р. Насыров) 28 февраля 2020 г.

Публикации. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 20 работах — это статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в списки RSCI, Scopus, Web of Science.

Всего по теме диссертации автором опубликована 41 научная работа и 2 учебно-методических пособия.

Личный вклад автора. Результаты диссертации, выносимые на защиту и составляющие ее основное содержание, получены лично автором.

Часть результатов работы опубликована в совместных статьях [142, 145, 146, 149, 150, 153, 155–157]. В каждой из статей [142, 145, 155, 156] автору диссертации принадлежит одна третья часть содержания. В работах [146, 149] автору диссертации принадлежат все сформулированные утверждения и их доказательства, а соавтору — постановка задачи о поднятии групповой структуры и общее указание на связь этой задачи с теорией многочленов Вейерштрасса. В статье [150] все сформулированные утверждения и их доказательства принадлежат автору диссертации. Эта работа написана в результате обсуждений авторами известного факта, обобщением которого является предложение 1 из статьи. В статьях [153] и [157] автору диссертации принадлежат соответственно две третьих части и половина содержания.

В диссертацию вошли лишь те результаты, доказательства которых получены автором самостоятельно. Ее содержание и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные статьи.

Содержание диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, каждая из которых разбита на параграфы, заключения, указателей обозначений и терминов, списка использованной литературы, содержащего 181 наименование и включающего работы, опубликованные автором по теме диссертации. Общий объем диссертации составляет 214 страниц.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках темы диссертации, приводится обзор литературы и результатов по изучаемым вопросам, формулируются цели и ставятся задачи. Здесь же формулируются основные результаты диссертации, обосновывается их новизна и значимость.

В первой главе, которая состоит из четырех параграфов, доказывается теорема о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных пространств на произвольные компактные связные группы. Кроме того, даются приложения этой теоремы к структуре накрывающих пространств компактных связных абелевых групп и к проблеме существования обобщенных средних на таких группах.

В **§1.1** содержатся основные обозначения и предварительные сведения об объектах и морфизмах категорий топологических пространств и групп, с которыми предстоит работать в дальнейшем. В частности, приводятся необходимые факты из теории обратных спектров и их пределов в категориях топологических пространств и компактных групп, даются определения накрывающих отображений и обобщенных средних.

§1.2 является подготовительным для решения задачи о подъеме групповой структуры на конечнолистное накрывающее пространство компактной связной группы.

В этом параграфе строится семейство накрытий компактных групп Ли, аппроксимирующее заданное k-листное накрывающее отображение $p : X \longrightarrow G$, $k \in \mathbb{N}$, из компактного пространства X на компактную связную группу G. Для этого рассматривается обратный спектр $\{ G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda \}$ над направленным вверх множеством $(\Lambda, \prec)$, такой, что имеет место изоморфизм

$$(G, \{\pi_\lambda\}) \; \backsimeq \; \varprojlim \{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$$

в категории компактных групп. Этот спектр состоит из компактных связных групп Ли и их открытых сюръективных гомоморфизмов. Он называется рядом Ли для группы G.

Далее, выбирается индекс $\alpha \in \Lambda$, удовлетворяющий некоторым условиям, и рассматривается конфинальное подмножество

$$\Lambda_\alpha := \{ \lambda \in \Lambda : \alpha \prec \lambda \}$$

в множестве индексов Λ. При этом группа G является обратным пределом подспектра ряда Ли для группы G, который рассматривается над множеством Λ_α.

Затем, для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\alpha$ строятся компактное связное пространство X_λ и отображение $p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda$, такие, что имеет место

Предложение 1.2.1. *Существует индекс $\beta \in \Lambda_\alpha$, такой, что для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\beta$ отображение $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$ является k-листным накрывающим отображением.*

Основным утверждением данного параграфа является

Предложение 1.2.2. *Конечнолистное накрывающее отображение $p : X \to G$ из связного топологического пространства на компактную группу кратности k является с точностью до изоморфизма предельным морфизмом, индуцированным морфизмом*

$$\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\} : \{X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda_\beta\} \longrightarrow \{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda_\beta\}$$

обратных систем в категории компактных пространств и их непрерывных отображений.

Следующий **§1.3** посвящен доказательству теоремы 1.3.1 о накрывающей группе для конечнолистного накрывающего отображения из связного топологического пространства на произвольную компактную связную группу. Она формулируется на страницах 11 и 70. В ее доказательстве используется теорема Понтрягина о накрывающей группе и предложение 1.2.2. В конце параграфа строятся два примера накрывающих отображений, которые демонстрируют существенность наличия свойства связности у пространств для справедливости утверждения теоремы о накрывающей группе.

В последнем **§1.4** этой главы даются приложения доказанной теоремы о накрывающей группе в случае компактных связных абелевых групп. Она применяется для изучения структуры конечнолистных накрывающих отображений и к проблеме существования обобщенных средних. При этом нами используются факты теории двойственности Понтрягина — ван Кампена.

Используя теорему о накрывающей группе, в этом параграфе сначала доказывается

Теорема 1.4.1. *Пусть $p : X \to G$ — конечнолистное накрывающее отображение из связного топологического пространства X на компактную связную абелеву группу G. Группа характеров $\widehat{G}$ допускает деление на кратность накрытия p в том и только том случае, когда кратность* *накрытия* p *равняется единице, то есть, отображение* p *является гомеоморфизмом.*

Потом приводятся утверждения (следствия 1.4.1, 1.4.2) непосредственно вытекающие из теоремы 1.4.1 и критерия Кислинга [102, теорема 1.1] о существовании обобщенных средних, сформулированного на страницах 7 и 53.

Теорема 1.4.1 позволяет доказать достаточность условия, сформулированного в следующем критерии тривиальности конечнолистных накрывающих отображений на компактные связные абелевы группы.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Все* k*-листные накрывающие отображения на компактную связную абелеву группу* G *являются тривиальными тогда и только тогда, когда группа характеров* $\widehat{G}$ *допускает деление на* $k!$.

Доказательство необходимости условия, сформулированного в теореме 1.4.2, ввиду использования в нем доказываемых в дальнейшем свойств многочленов Вейерштрасса, нам удобнее отложить до §2.4 в главе 2. Это будет теорема 2.4.3.

Критерий Кислинга [102, теорема 1.1] о существовании обобщенных средних позволяет переформулировать теорему 1.4.2.

Теорема 1.4.3. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Все* k*-листные накрывающие отображения на компактную связную абелеву группу* G *являются тривиальными тогда и только тогда, когда на группе* G *существует* $k!$*-среднее.*

В **главе 2**, состоящей из четырех параграфов, рассматриваются многочлены Вейерштрасса и уравнения над банаховыми алгебрами непрерывных функций на компактных связных абелевых группах. Исследуется их тесная связь с полиномиальными накрывающими отображениями.

В **§2.1** приводятся основные сведения о многочленах Вейерштрасса, коэффициентами которых являются непрерывные комплекснозначные функции и о полиномиальных накрытиях, определяемых сепарабельными многочленами Вейерштрасса.

§2.2 посвящен доказательству теоремы 2.2.1 об эквивалентности каждого накрывающего отображения некоторому полиномиальному накрытию.

В **§2.3** вводится понятие непрерывного многообразия Вейерштрасса, порождаемого конечным набором многочленов и доказывается

Теорема 2.3.1. *Пусть $p : X \to G$ — n-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную связную абелеву группу G. Тогда существуют многочлены Вейерштрасса*

$$R_j(g, z) = z^{n_j} - \chi_j(g),$$

где $n_j \in \mathbb{N}$, $\chi_j \in \widehat{G}$, $j = 1, \ldots, m$, такие, что наркытие p эквивалентно отображению проектирования на первую координату многообразия Вейерштрасса, порождаемого многочленами $R_1(g, z), \ldots, R_m(g, z)$. При этом степени многочленов Вейерштрасса связаны с кратностью накрывающего отображения p равенством $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$.

Из доказательства теоремы 2.3.1 вытекает

Теорема 2.3.2. *Пусть $p : X \longrightarrow G$ — n-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную связную абелеву группу G, где n — простое число. Тогда существует многочлен Вейерштрасса $R(g, z) = z^n - \chi(g)$, где $\chi \in \widehat{G}$, такой, что накрытие p эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению, определяемому многочленом R.*

В **§2.4** сначала изучаются свойства алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами вида

$$x^n - \chi = 0,$$

где χ — характер компактной связной абелевой группы G. При этом доказывается следующий результат об их решениях.

Теорема 2.4.2. *Пусть $\chi_0 \in \widehat{G}$. Предположим, что уравнение*

$$x^n - \chi_0 = 0$$

имеет решение в алгебре $C(G)$. Тогда это уравнение имеет решение и в группе характеров $\widehat{G}$.

Используя теорему 2.4.2, доказывается оставшаяся импликация в теореме 1.4.2, то есть, необходимость возможности деления на $n!$ в группе характеров $\widehat{G}$ группы G, у которой все n-листные накрытия тривиальны. Следуя терминологии, принятой в теории многочленов Вейерштрасса, мы формулируем этот результат следующим образом.

Теорема 2.4.3. *Пусть все n-листные накрытия группы G тривиальны. Тогда в группе характеров $\widehat{G}$ возможно извлечение корня степени $n!$.*

Глава 3 состоит из четырех параграфов и посвящена отображениям P-адических соленоидов.

§3.1 содержит необходимые сведения о P-адических соленоидах.

В **§3.2** для любого натурального числа k и для произвольного P-адического соленоида Σ_P изучаются свойства его эндоморфизма h_P^k, представляющего собой операцию возведения в степень k. При этом h_P^k рассматривается в качестве предельного морфизма, индуцированного морфизмом между двумя копиями одной и той же обратной последовательности, пределом которой является соленоид Σ_P.

Первая часть параграфа представляет из себя доказательство следующей теоремы, которое разбито на ряд утверждений.

Теорема 3.2.1. *Пусть P — произвольная последовательность простых чисел и $k \in \mathbb{N}$. Предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является k-листным накрывающим отображением P-адического соленоида Σ_P тогда и только тогда, когда число k не имеет простого делителя, который встречается бесконечно много раз в последовательности P.

Следствием этой теоремы и факта о делимости в группе рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$ (см. предложение 3.2.5) является

Теорема 3.2.2. *Пусть P — произвольная последовательность простых чисел и $k \in \mathbb{N}$. Предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является k-листным накрывающим отображением P-адического соленоида

Σ_P тогда и только тогда, когда у числа k нет простого делителя q, такого, что группа рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$ является q-делимой.

Использование аппроксимирующего семейства накрытий, построенного в §1.2, и теорем классической теории накрывающих пространств позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. *Пусть P — произвольная последовательность простых чисел и $f : X \longrightarrow \Sigma_P$ — k-листное связное накрывающее отображение на P-адический соленоид Σ_P, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда накрытие f изоморфно предельному отображению*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P.$$

Итоговым результатом **§3.2** является теорема 3.2.4 (см. с. 17, 125).

Свойства множеств периодических точек отображений h_P^k изучаются в **§3.3**. Для произвольной последовательности простых чисел P в рассмотрение вводится множество простых чисел $S(P)$, состоящее из всех простых чисел из натурального ряда, которые не встречаются бесконечно много раз в последовательности P. В зависимости от мощности множества $S(P)$ доказываются следующие три предложения.

Предложение 3.3.1. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — последовательность простых чисел, такая, что $S(P) = \varnothing$, то есть, каждое простое число из множества $\mathbb{N}$ встречается бесконечно много раз в последовательности P. Тогда для каждого натурального числа $k \geq 2$ единичный элемент $e = (1, 1, \ldots)$ в P-адическом соленоиде является единственной периодической точкой отображения возведения в k-ую степень*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P.$$

Предложение 3.3.2. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — последовательность простых чисел, такая, что множество $S(P)$ бесконечно. Тогда, для каждого натурального числа $k \geqslant 2$, множество периодических точек отображения возведения в k-ую степень*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

плотно в P-адическом соленоиде Σ_P.

Предложение 3.3.3. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — последовательность простых чисел, такая, что множество $S(P)$ непусто и конечно. Пусть $k \geqslant 2$. Если число k кратно произведению всех простых чисел, входящих в множество $S(P)$, то единичный элемент e в P-адическом соленоиде является единственной периодической точкой отображения возведения в k-ую степень*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P.$$

Если же найдется простое число из множества $S(P)$, которое не является делителем числа k, то множество всех периодических точек отображения h_P^k плотно в P-адическом соленоиде Σ_P.

Заметим, что в доказательстве предложения 3.3.2 используется классическая теорема Ферма—Эйлера о сравнениях.

Эти три предложения доставляют критерий плотности множеств периодических точек накрытий соленоидов.

Теорема 3.3.1. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Для того, чтобы множество периодических точек отображения возведения в степень k в P-адическом соленоиде было плотным необходимо и достаточно, чтобы существовало простое число, которое не встречается бесконечно много раз в последовательности P и не является делителем числа k.*

§3.4 посвящен вопросу о существовании обобщенных средних на P-адических соленоидах. В нем содержатся следующие теоремы.

Теорема 3.4.1. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует n-среднее на P-адическом соленоиде Σ_P в том и только том случае, когда каждый простой делитель числа n встречается бесконечно много раз в последовательности P.*

Теорема 3.4.3. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует*

n-среднее на P-адическом соленоиде Σ_P в том и только том случае, когда для каждого простого делителя p числа n не существуют p-листные связные накрывающие отображения на соленоид Σ_P.

Теорема 3.4.4. *Пусть $M = (m_1, m_2, \ldots)$ — произвольная последовательность натуральных чисел больше единицы и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует n-среднее на соленоиде Σ_M в том и только том случае, когда каждый простой делитель числа n делит бесконечно много членов последовательности M.*

Последняя **глава 4**, состоящая из четырех параграфов, посвящена C^*-алгебрам. В ней рассматриваются редуцированные полугрупповые C^*-алгебры и полные матричные алгебры.

В **§4.1** приведены необходимые сведения об изометрических представлениях полугрупп рациональных чисел, редуцированных полугрупповых C^*-алгебрах, индуктивных последовательностях C^*-алгебр и групп. В частности, напоминается свойство универсальности для изометрических представлений полугрупп неотрицательных рациональных чисел.

В этом параграфе доказывается частный случай теоремы Кобурна для алгебры Теплица $\mathcal{T}$.

Лемма 4.1.2. *Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр*

$$\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \mapsto T^n.$$

Более того, гомоморфизм φ изометричен.

Лемма 4.1.2 служит инструментом для построения индуктивных последовательностей алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, определяемых последовательностями простых чисел $P = (p_1, p_2, \ldots)$. Связующими $*$-гомоморфизмами φ_n таких индуктивных последовательностей являются отображения, которые, по лемме 4.1.2, однозначно задаются формулой

$$\varphi_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \mapsto T^{p_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Индуктивные последовательности алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, определяемые последовательностями простых чисел P, рассматриваются в **§4.2**, где доказывается утверждение об их индуктивных пределах.

Предложение 4.2.1. *Пусть* $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$ *— индуктивная последовательность алгебр Теплица, определяемая последовательностью простых чисел* $P = (p_1, p_2, \ldots)$. *Тогда существует изоморфизм*

$$\varinjlim\{\mathcal{T}, \varphi_n\} \ \simeq \ C_r^*(\mathbb{Q}_P^+).$$

в категории C^**-алгебр и* $*$*-гомоморфизмов.*

Также в этом параграфе для последовательностей P и натуральных чисел k строятся предельные $*$-эндоморфизмы ϕ_P^k полугрупповых C^*-алгебр $C^*(\mathbb{Q}_P^+)$ для полугрупп неотрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}_P^+$. Такой эндоморфизм

$$\phi_P^k := \varinjlim \left\{ \phi_n^k \,|\, n \in \mathbb{N} \right\} : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

индуцируется морфизмом $\left\{ \phi_n^k \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ между двумя копиями одной и той же последовательности алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, который действует «покоординатно» между объектами копий и задается формулой

$$\phi_n^k : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В предложении 4.2.2 показывается, что $*$-гомоморфизм ϕ_P^k совпадает с $*$-эндоморфизмом C^*-алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$, который доставляется свойством универсальности для изометрического представления полугрупп неотрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}_P^+$.

В **§4.3** изучаются теоретико-множественные свойства предельных $*$-эндоморфизмов ϕ_P^k полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. Эти свойства сформулированы в следующих четырех доказываемых предложениях. Пусть задана последовательность простых чисел P.

Предложение 4.3.1. *Для каждого числа* $k \in \mathbb{N}$ *предельный эндоморфизм* ϕ_P^k *является инъективным.*

Предложение 4.3.2. *Пусть каждый простой делитель числа* k *встре-*

чается бесконечно много раз в последовательности простых чисел P. Тогда предельный эндоморфизм ϕ_P^k является $*$-автоморфизмом.

Предложение 4.3.3. *Пусть k — простое число, которое не встречается бесконечно много раз в последовательности P. Тогда предельный эндоморфизм ϕ_P^k не является сюръективным.*

Предложение 4.3.4. *Если у натурального числа k есть простой делитель, который не встречается бесконечно много раз в последовательности P, то предельный эндоморфизм ϕ_P^k не является сюръективным.*

Приведенные предложения позволяют сформулировать критерий.

Теорема 4.3.1. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и k — натуральное число больше единицы. Для того, чтобы предельный эндоморфизм*

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

был $*$-автоморфизмом необходимо и достаточно, чтобы каждый простой делитель числа k встречался бесконечно много раз в последовательности P.

Из теоремы 4.3.1 и результатов о наличии деления в группах и о существовании обобщенных средних следует

Теорема 4.3.2. *Для последовательности простых чисел P и натурального числа $k \geqslant 2$ следующие условия эквивалентны:*

1) *предельный эндоморфизм $\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ является $*$-автоморфизмом;*

2) *группа рациональных чисел Q_P является k-делимой группой;*

3) *на P-адическом соленоиде Σ_P существует k-среднее.*

В последнем **§4.4** диссертации естественная структура топологической группы обратимых матриц $GL_n(\mathbb{C})$ в полной матричной алгебре $M_n(\mathbb{C})$ используется для доказательства следующего результата.

Теорема 4.4.1. *Пусть заданы отображения*

$$f_1, f_2 : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}),$$

среди которых хотя бы одно является открытым. Пусть $\|\cdot\|$ *— произвольная норма на пространстве квадратных матриц* $M_n(\mathbb{C})$*. Тогда для любых матриц* A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ *и любого действительного числа* $\varepsilon > 0$ *существуют обратимые матрицы* A_ε, $B_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ *с простыми спектрами, такие, что выполняются неравенства*

$$\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon, \qquad \|B - B_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

и при этом произведение матриц $f(A_\varepsilon)g(B_\varepsilon)$ имеет простой спектр.

В конце параграфа сформулирована теорема 4.4.2, являющаяся обобщением теоремы 4.4.1 на случай произвольного конечного числа отображений и матриц.

В **заключении** диссертационной работы изложены итоги выполненного исследования и указаны рекомендации и перспективные направления для дальнейшей разработки темы.

Завершается диссертация **указателем обозначений**, **предметным указателем** и **списком литературы**, содержащим работы автора по теме диссертации [139]– [181].

Теперь скажем несколько слов о технической стороне изложения. Например, ссылка типа «по теореме 4.3.1» относится к первой теореме из §3 главы 4. Ссылка типа «в §1.3» относится к третьему параграфу первой главы. Равенство по определению часто обозначается символом $:=$. При задании отображения мы будем использовать запись типа $f : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f(x)$. Конец доказательства утверждения отмечается значком $\square$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору С. А. Григоряну за плодотворные обсуждения задачи о поднятии групповой структуры и ее приложений в теории многочленов Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами.

Глава 1.

Групповая структура конечнолистного накрывающего пространства компактной связной группы

Основной целью настоящей главы является доказательство теоремы о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных компактных топологических пространств на связные компактные группы. Для доказательства этой теоремы заданное накрытие аппроксимируется семейством конечнолистных накрытий компактных связных групп Ли. К каждому из накрытий этого семейства применима теорема Понтрягина о накрывающей группе. Предельный переход позволяет наделить накрывающее пространство заданного накрытия искомой структурой топологической группы. Полученная теорема применяется к изучению структуры накрытий компактных связных абелевых групп и к вопросу о существовании обобщенных средних.

В §1.1 приводятся необходимые в дальнейшем определения и сведения.

Содержанием §1.2 является построение аппроксимирующего семейства накрытий для заданного связного конечнолистного накрытия компактной группы G. Это семейство строится по ряду Ли для группы G.

Аппроксимирующее семейство накрытий используется в §1.3 для доказательства теоремы о накрывающей группе.

В §1.4 даются приложения доказанной теоремы о накрывающей группе к изучению структуры конечнолистных накрытий компактных связных абелевых групп и к вопросу о существовании обобщенных средних на таких группах.

1.1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы установим обозначения и напомним определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения материала. В основном мы придерживаемся обозначений и терминологии из книги [34].

На протяжении всей работы топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми. Под окрестностью мы всегда понимаем открытое подмножество топологического пространства. Ссылаясь на теорему Александрова, мы подразумеваем следующий классический результат для компактов.

Теорема (П. С. Александров) *Всякое непрерывное биективное отображение компакта на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

В этой главе под отображением между топологическими пространствами и гомоморфизмом между топологическими группами мы подразумеваем непрерывную функцию и непрерывный гомоморфизм соответственно. Мы также называем их морфизмами соответствующих объектов.

Как обычно, через $\mathbb{N}$ обозначается множество всех натуральных чисел, через $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, через $\mathbb{C}$ — пространство всех комплексных чисел, снабженное естественной топологией, и через $\mathbb{C}^m$ — декартово произведение m экземпляров пространства $\mathbb{C}$, где $m \in \mathbb{N}$. Единичная окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ рассматривается как подпространство пространства $\mathbb{C}$ с естественными групповыми операциями и обозначается через $\mathbb{S}^1$. Множество натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$ часто будет обозначаться символом $\overline{m}$. Символ $\bigsqcup$ обозначает дизъюнктное объединение множеств.

Пусть X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 — произвольные топологические пространства.

Определение 1.1.1. *Диагональю отображений* $f_j : X \to Y_j$, *где* $j = 1, 2$, *или диагональным отображением, называется отображение, задаваемое следующим образом:*

$$f_1 \triangle f_2 \ : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2 : x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

где $x \in X$, *а* $Y_1 \times Y_2$ — *декартово произведение пространств* Y_1 *и* Y_2.

Определение 1.1.2. *Для непересекающихся топологических пространств* X_1 *и* X_2 *комбинацией отображений* $f_j : X_j \longrightarrow Y$, $j = 1, 2$, *будем называть отображение, задаваемое формулой*

$$f_1 \nabla f_2 \ : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow Y : x \longmapsto f_j(x),$$

где $x \in X_j$.

В первых двух главах диссертационной работы символом $\oplus$ обозначается сумма топологических пространств.

Определение 1.1.3. *Для двух пар* X_1, X_2 *и* Y_1, Y_2 *непересекающихся пространств и двух отображений* $f_j : X_j \to Y_j$, $j = 1, 2$, *формулой*

$$f_1 \oplus f_2 : X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \ : x \mapsto f_j(x) \ \text{ для } x \in X_j, j = 1, 2,$$

определяется сумма отображений f_1 *и* f_2.

Определения этих понятий для семейств отображений, имеющих произвольные мощности, аналогичны (см., например, [34, гл. 2]).

Далее, напомним определения обратного спектра и предела обратного спектра в категориях топологических пространств и топологических групп. За детальным обсуждением этих понятий мы отсылаем читателя, например, к [27, гл.VIII, § 3], [34, § 2.5]) и [49, гл. 3].

Обозначим через $\mathcal{COMP}$ и $\mathcal{CGR}$ соответственно категорию компактных пространств и их отображений и категорию компактных групп и их гомоморфизмов.

Пусть $\mathcal{C}$ — одна из этих двух категорий и пусть $(\Lambda, \prec)$ — некоторое направленное множество. Каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ поставим в соответствие объект X_λ категории $\mathcal{C}$, а каждой паре элементов $\lambda, \mu \in \Lambda$, удовлетворяющих соотношению $\lambda \prec \mu$, поставим в соответствие морфизм $\pi_\lambda^\mu : X_\mu \to X_\lambda$ категории $\mathcal{C}$. Кроме того, пусть $\pi_\lambda^\lambda : X_\lambda \to X_\lambda$ — тождественный морфизм для каждого элемента $\lambda \in \Lambda$ и пусть для любых элементов $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$, таких, что $\lambda \prec \mu$ и $\mu \prec \nu$, диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_\nu \arrow[dl, "\pi_\lambda^\nu"'] \arrow[dr, "\pi_\mu^\nu"] & \\ X_\lambda & & X_\mu \arrow[ll, "\pi_\lambda^\mu"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, выполняется равенство морфизмов $\pi_\lambda^\nu = \pi_\lambda^\mu \circ \pi_\mu^\nu$.

Определение 1.1.4. *Семейство $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ называется обратной, или проективной, системой (спектром) в категории $\mathcal{C}$ над множеством индексов Λ. Морфизмы π_λ^μ называются связующими морфизмами обратного спектра $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$. Обратная система $\{X_n, \pi_n^m, \mathbb{N}\}$, где множество всех натуральных чисел направлено естественным порядком, называется обратной последовательностью.*

Замечание 1.1.1. Как хорошо известно, задание обратной системы, состоящей из объектов и морфизмов категории $\mathcal{C}$, над произвольным частично упорядоченным множеством $(\Lambda, \prec)$ в точности означает, что у нас имеется контравариантный функтор, действующий из категории, ассоциированной с $(\Lambda, \prec)$, в категорию $\mathcal{C}$. Обозначая категорию, ассоциированную с $(\Lambda, \prec)$, той же буквой Λ, мы напомним, что объектами этой категории являются элементы самого множества Λ. Для каждой пары объектов $a, b \in \Lambda$ множество морфизмов $Mor_\Lambda(a, b)$ из a в b определяется следующим образом:

$$Mor_\Lambda(a,b) = \begin{cases} \{(a,b)\}, & \text{если } a \prec b\,; \\ \varnothing & \text{иначе}\,. \end{cases}$$

Определение 1.1.5. *Обратным, или проективным, пределом обратного спектра $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ называется пара $(X, \{\pi_\lambda\})$, состоящая из объекта X*

категории $\mathcal{C}$ *и семейства морфизмов*

$$\{\pi_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

категории $\mathcal{C}$, *обладающая следующим свойством универсальности:*

1) *для любой пары индексов* $\lambda, \mu \in \Lambda$, *удовлетворяющих соотношению* $\lambda \prec \mu$, *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_\lambda"'] \arrow[dr, "\pi_\mu"] & \\ X_\lambda & & X_\mu \arrow[ll, "\pi_\lambda^\mu"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, выполняется равенство $\pi_\lambda = \pi_\lambda^\mu \circ \pi_\mu$.

2) *если в категории* $\mathcal{C}$ *имеется семейство морфизмов*

$$\{\tau_\lambda : Y \longrightarrow X_\lambda : \lambda \in \Lambda\},$$

такое, что для любой пары индексов $\lambda, \mu \in \Lambda$, *удовлетворяющих соотношению* $\lambda \prec \mu$, *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\tau_\lambda"'] \arrow[dr, "\tau_\mu"] & \\ X_\lambda & & X_\mu \arrow[ll, "\pi_\lambda^\mu"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, $\tau_\lambda = \pi_\lambda^\mu \circ \tau_\mu$, *то в категории* $\mathcal{C}$ *существует единственный морфизм* $\rho : Y \longrightarrow X$, *для которого диаграмма*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\tau_\lambda"'] & & X \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & X_\lambda & \end{tikzcd}$$

коммутативна для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$, *то есть,* $\tau_\lambda = \pi_\lambda \circ \rho$.

Для обозначения обратного предела $(X, \{\pi_\lambda\})$ обратной системы $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ используется запись

$$(X, \{\pi_\lambda\}) = \varprojlim\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}.$$

Часто просто сам объект X называют обратным пределом системы $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$.

Определение 1.1.6. *Морфизм* π_λ *называется проекцией предела обратной системы на объект* X_λ.

В категории $\mathcal{C}$ обратный предел $\varprojlim\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ существует. А именно, объект X_∞ категории $\mathcal{C}$, состоящий из всех нитей обратной системы $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$, и семейство всех естественных проекций X_∞ на X_λ является обратным пределом. В связи с этим напомним

Определение 1.1.7. *Элемент* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *декартова произведения* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *называется нитью обратной системы* $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$, *если*

$$\pi_\lambda^\mu(x_\mu) = x_\lambda$$

для любых индексов $\lambda, \mu \in \Lambda$, *удовлетворяющих соотношению* $\lambda \prec \mu$.

Что касается топологии обратного предела, то имеет место следующее утверждение о базе этой топологии (см., например, [34, предложение 2.5.5]).

Предложение 1.1.1. *Пусть в категории* $\mathcal{C}$ *задана обратная система* $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$. *Тогда семейство всех множеств вида*

$$\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda), \tag{1.1}$$

где π_λ *— проекция обратного предела* $\varprojlim\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ *на* X_λ, U_λ *— открытое подмножество пространства* X_λ, *а индекс* λ *пробегает некоторое подмножество, конфинальное множеству* Λ, *есть база топологии обратного предела* $\varprojlim\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$.

Более того, если для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ база $\mathscr{B}_\lambda$ пространства X_λ фиксирована, то подсемейство, состоящее из тех полных прообразов (1.1), для которых $U_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda$, также образует базу указанной топологии.

Если имеется два обратных предела одной и той же обратной системы в некоторой категории, то они изоморфны. Изоморфизмами при этом являются морфизмы, доставляемые свойством универсальности для этих обратных пределов [49, следствие 3.2].

Определение 1.1.8. *Пусть даны две обратные системы $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ и $\{Y_\lambda, \sigma_\lambda^\mu, \Lambda\}$ в категории $\mathcal{C}$. Морфизмом этих систем называется семейство $\{\tau_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ морфизмов из $\mathcal{C}$, такое, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[d, "\tau_\lambda"'] & X_\mu \arrow[l, "\pi_\lambda^\mu"'] \arrow[d, "\tau_\mu"] \\
Y_\lambda & Y_\mu \arrow[l, "\sigma_\lambda^\mu"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, $\tau_\lambda \circ \pi_\lambda^\mu = \sigma_\lambda^\mu \circ \tau_\mu$ для любых индексов $\lambda, \mu \in \Lambda$, удовлетворяющих соотношению $\lambda \prec \mu$.

Морфизм обратных систем $\{\tau_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ из определения 1.1.8 индуцирует морфизм в категории $\mathcal{C}$, задаваемый формулой

$$\tau_\infty : X_\infty \longrightarrow Y_\infty : \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \longmapsto \{\tau_\lambda(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\},$$

где $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \in X_\infty$.

Определение 1.1.9. *Морфизм $\tau_\infty : X_\infty \longrightarrow Y_\infty$ называется предельным морфизмом, индуцированным семейством $\{\tau_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, и обозначается через $\varprojlim\{\tau_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.*

Определение 1.1.10. *Будем говорить, что морфизм $\tau : X \longrightarrow Y$ в категории $\mathcal{C}$ является с точностью до изоморфизма предельным морфизмом, индуцированным морфизмом обратных систем $\{\tau_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, если существуют изоморфизмы $\rho : X \longrightarrow X_\infty$ и $\sigma : Y \longrightarrow Y_\infty$ в категории $\mathcal{C}$, такие,* *что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\tau"'] & X_\infty \arrow[d, "\tau_\infty"] \\ Y \arrow[r, "\sigma"] & Y_\infty \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, $\tau_\infty \circ \rho = \sigma \circ \tau$.

Теперь перейдем к определениям и фактам из теории накрывающих отображений топологических пространств.

Определение 1.1.11. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и* $p : X \longrightarrow Y$ *— сюръективное непрерывное отображение между топологическим пространствами* X *и* Y*, обладающее следующим свойством. У каждой точки* $y \in Y$ *существуют ее окрестность* W *в пространстве* Y *и разбиение полного прообраза* $p^{-1}(W)$ *на непересекающиеся окрестности* V_i, $i \in \overline{k}$, *в пространстве* X, *то есть,*

$$p^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i,$$

такие, что для каждого индекса $i \in \overline{k}$ *отображение*

$$p|_{V_i} : V_i \longrightarrow W,$$

представляющее собой ограничение отображения p *на окрестность* V_i*, является гомеоморфизмом* V_i *на* W*. Тогда* p *называется* k*-листным накрывающим отображением, или просто* k*-листным накрытием. При этом* X *называется накрывающим пространством,* Y *— базой накрывающего отображения* p*, а* W *— правильно, или ровно, накрытой окрестностью. Семейство окрестностей* $\{V_i : i \in \overline{k}\}$ *называется разбиением полного прообраза* $p^{-1}(W)$ *на слои. Число* k *называется кратностью отображения* p*. Отображение* p *называется конечнолистным накрытием, если оно является* k*-листным накрытием для некоторого числа* $k \in \mathbb{N}$*. Конечнолистное накрытие* p *называется связным, если пространства* X *и* Y *связны.*

Заметим, что аналогично, при $k = \infty$, определяется бесконечнолистное накрывающее отображение.

Пример 1.1.1. Всякий гомеоморфизм является однолистным накрывающим отображением.

Пример 1.1.2. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Отображение возведения в k-ую степень

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 : z \longmapsto z^k$$

является k-листным накрывающим отображением.

Пример 1.1.3. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и X — топологическое пространство. Снабдим конечное множество $\{1, \ldots, k\}$ дискретной топологией. Проекция декартова произведения $X \times \{1, \ldots, k\}$ на первую координату

$$pr : X \times \{1, \ldots, k\} \longrightarrow X : (x, l) \longmapsto x,$$

где $x \in X$, $l \in \{1, \ldots, k\}$, является k-листным накрывающим отображением.

Определение 1.1.12. *Конечнолистные накрывающие отображения* $p : X \longrightarrow Y$ *и* $q : Z \longrightarrow Y$ *называются изоморфными, или эквивалентными, если существует гомеоморфизм* $\rho : X \longrightarrow Z$, *такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, $p = q \circ \rho$.

Определение 1.1.13. *Конечнолистное накрывающее отображение* $p : X \longrightarrow Y$ *называется тривиальным, если оно изоморфно проекции декартова произведения* $X \times \{1, \ldots, k\}$ *на первую координату, где число* k *равняется кратности накрытия* p.

Пусть имеется конечнолистное накрытие $p : X \longrightarrow Y$ с кратностью k больше единицы, где топологическое пространство X несвязно, а Y является компактным связным пространством. Тогда легко показать, что для каждой компоненты связности X_0 пространства X ограничение $p|_{X_0} : X_0 \longrightarrow Y$

отображения p на подпространство X_0 является конечнолистным накрывающим отображением, чья кратность не превосходит числа k.

Определения и факты, касающиеся полиномиальных накрывающих отображений, будут даны в главе 2.

Перейдем к сведениям из теории топологических групп. Необходимые факты из этой теории, в частности, фундаментальные результаты о группе характеров и теории двойственности Понтрягина — ван Кампена содержатся в книгах [26], [31] и [89].

В приложениях теоремы о накрывающей группе к абелевым группам нам понадобится следующее

Определение 1.1.14. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Аддитивная абелева группа G называется k-делимой, если для любого элемента $g \in G$ существует элемент $h \in G$, такой, что выполняется равенство*

$$kh = g.$$

При этом также говорят, что группа G допускает деление на k или что в группе G возможно деление на k.

При изучении уравнений над банаховыми алгебрами непрерывных функций нам будет удобней использовать аналог определения 1.1.14 для групп с мультипликативной формой записи групповых операций.

Определение 1.1.15. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Говорят, что в мультипликативной абелевой группе G возможно извлечение корня k-ой степени, если для любого элемента $g \in G$ существует элемент $h \in G$, такой, что выполняется равенство*

$$h^k = g.$$

При этом элемент h называется корнем k-ой степени из g.

Для локально компактной абелевой группы G через $\widehat{G}$ обозначается ее группа характеров, состоящая из непрерывных гомоморфизмов из группы G в мультипликативную группу $\mathbb{S}^1$. Для морфизма

$$\sigma : G_1 \longrightarrow G_2$$

между двумя локально компактными абелевыми группами его *дуальным морфизмом* называется гомоморфизм групп

$$\widehat{\sigma} : \widehat{G}_2 \longrightarrow \widehat{G}_1,$$

определяемый следующей формулой

$$\widehat{\sigma}(\chi) \;=\; \chi \circ \sigma,$$

где χ — произвольный характер группы G_2.

Группа характеров группы $\widehat{G}$ и морфизм, дуальный к морфизму $\widehat{\sigma}$, обозначаются через $\widehat{\widehat{G}}$ и $\widehat{\widehat{\sigma}}$ соответственно.

Напомним, что канонический изоморфизм в теории двойственности Понтрягина — ван Кампена для топологических групп, обозначаемый через

$$\tau_G : G \longrightarrow \widehat{\widehat{G}}\,,$$

задается следующей формулой

$$[\tau_G(g)](\chi) \;=\; \chi(g),$$

где g — произвольный элемент, а χ — характер группы G.

Хорошо известно, что соответствие между группами и морфизмами

$$G \longrightarrow \widehat{G};$$
$$\sigma \longrightarrow \widehat{\sigma}$$

является контравариантным функтором из категории локально компактных абелевых групп и их морфизмов в себя. Одним из важнейших результатов теории двойственности Понтрягина является замечательный факт о том, что указанный функтор является антиэквивалентностью категорий.

Таким образом, для компактной связной абелевой группы G аддитивная дуальная группа $\widehat{G}$ является k-делимой, если сюръективен гомоморфизм

$$\tau_k : \widehat{G} \longrightarrow \widehat{G} : \chi \longmapsto k\chi.$$

Заметим, что если группа $\widehat{G}$ допускает деление на k, то гомоморфизм τ_k является автоморфизмом поскольку дуальная группа $\widehat{G}$ является абелевой группой без кручения [31, теорема 24.25].

Различные необходимые и достаточные условия для наличия k-делимости в дуальной группе $\widehat{G}$ содержатся в [102]. В частности, имеет место

Теорема 1.1.1. ***(Дж. Кислинг)*** *Пусть задана компактная связная абелева группа G и пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Тогда группа характеров $\widehat{G}$ является k-делимой в том и только том случае, когда на G существует k-среднее.*

Напомним определение обобщенного среднего на топологическом пространстве.

Определение 1.1.16. *Пусть X — топологическое пространство и пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Непрерывное отображение*

$$\mu : X \times X \times \ldots \times X \longrightarrow X$$

из декартово произведения k экземпляров X называется k-средним на топологическом пространстве X, если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) $\mu(x, x, \ldots, x) = x$;

2) $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \mu(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$

для любых точек $x, x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ и любой перестановки σ множества натуральных чисел $\overline{k}$.

1.2. Аппроксимация конечнолистных накрывающих отображений компактных групп

На протяжении §1.2 и §1.3 через G обозначается компактная связная группа, $p : X \longrightarrow G$ — k-листное накрывающее отображение, где X — топологическое пространство и $k \in \mathbb{N}$. Хорошо известно (см., например, [138, с. 155]) и это нетрудно показать , что пространство X обязательно компактно.

Напомним, что через $\mathcal{CGR}$ обозначается категория, объектами которой являются компактные группы, а морфизмами —непрерывные гомоморфизмы групп. Хорошо известно (см., например, [6, §25], [89, предложение 1.33]), что в категории $\mathcal{CGR}$ существует обратная система $\{\, G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda \,\}$ над направленным вверх множеством $(\Lambda, \prec)$, такая, что имеет место изоморфизм

$$(G, \{\pi_\lambda\}) \;\backsimeq\; \varprojlim\{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}.$$

При этом в рассматриваемой системе все группы G_λ являются компактными связными группами Ли. Отметим, что каждая группа G_λ локально линейно связна. Все связующие морфизмы $\pi_\lambda^\mu : G_\mu \longrightarrow G_\lambda$, где $\lambda \prec \mu$, и проекции $\pi_\lambda : G \longrightarrow G_\lambda$ являются открытыми сюръективными отображениями. Более того, если заданная группа G абелева, то и каждая группа G_λ будет абелевой.

В этом разделе мы построим семейство k-листных накрывающих отображений на группы G_λ, которое аппроксимирует заданное накрывающее отображение $p : X \longrightarrow G$. Говоря неформально, мы увидим, что в подходящей категории отображений накрытие $p : X \longrightarrow G$ является обратным пределом обратной системы, состоящей из k-листных накрывающих отображений на группы Ли G_λ.

В силу предложения 1.1.1, семейство всех множеств вида $\pi_\lambda^{-1}(U)$, где U является окрестностью в группе G_λ, а индекс λ пробегает некоторое конфинальное подмножество в множестве всех индексов Λ, образует базу топологии в группе G.

Для произвольного элемента $\nu \in \Lambda$ введем в рассмотрение подмножество Λ_ν в множестве индексов Λ, определяемое следующим образом:

$$\Lambda_\nu := \{\, \lambda \in \Lambda : \nu \prec \lambda \,\}.$$

Очевидно, подмножество Λ_ν конфинально в множестве Λ. Поэтому (см., например, [27, гл. VIII, §3]) в категории $\mathcal{CGR}$ имеет место изоморфизм

$$(G, \{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\nu}) \backsimeq \varprojlim\{\, G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda_\nu \,\}.$$

Далее, используя описание базы топологии в группе G, приведенное выше, а также компактность G, легко видеть, что найдется конечное открытое покрытие $\{W_n : n \in \overline{m}\}$ группы G, то есть,

$$G = \bigcup_{n=1}^{m} W_n,$$

которое удовлетворяет следующим двум условиям:

- для каждого $n \in \overline{m}$, окрестность W_n правильно накрыта отображением p;
- существует индекс $\alpha \in \Lambda$ и некоторое конечное открытое покрытие $\{W_n^\alpha : n \in \overline{m}\}$ группы G_α, то есть,

$$G_\alpha = \bigcup_{n=1}^{m} W_n^\alpha,$$

такие, что для любого $n \in \overline{m}$ выполняется равенство

$$W_n = \pi_\alpha^{-1}(W_n^\alpha).$$

С этого момента мы зафиксируем индексированное семейство окрестностей $\{W_n : n \in \overline{m}\}$ и элемент $\alpha \in \Lambda$, удовлетворяющие указанным выше двум условиям. Кроме того, для каждого полного прообраза $p^{-1}(W_n)$ мы фиксируем его индексированное разбиение на слои $V_1^n, V_2^n, \ldots, V_k^n$. Таким образом, для каждого числа $n \in \overline{m}$ справедливо равенство

$$p^{-1}(W_n) = \bigsqcup_{l=1}^{k} V_l^n, \tag{1.2}$$

где для всякого $l \in \overline{k}$ ограничение отображения p на окрестность V_l^n является гомеоморфизмом на окрестность W_n.

Далее мы «забываем» о групповых структурах, которыми наделены изучаемые объекты. Таким образом, вплоть до конца этого раздела, G, G_λ и $\pi_\lambda^\mu, \pi_\lambda$ рассматриваются, соответственно, в качестве объектов и морфизмов категории $\mathcal{COMP}$, то есть, только как компактные пространства и непрерывные отображения между ними. Иными словами, мы применяем забывающий функтор, действующий из категории $\mathcal{CGR}$ в категорию $\mathcal{COMP}$.

В первую очередь, нам необходимо определить функции и окрестности, которые наряду с определенными ранее, будут играть важную роль в наших дальнейших построениях.

Сначала мы «сжимаем» покрытие $\{W_n : n \in \overline{m}\}$. А именно, ясно что существует такое конечное открытое покрытие $\{U_n : n \in \overline{m}\}$ пространства G, то есть

$$G = \bigcup_{n=1}^{m} U_n,$$

которое обладает следующими двумя свойствами:

$$\begin{aligned} &\bullet\ U_n = \pi_\alpha^{-1}(U_n^\alpha) \qquad \text{для каждого} \qquad n \in \overline{m}; \\ &\bullet\ \overline{U}_n \subset W_n \qquad \text{для каждого} \qquad n \in \overline{m}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

При этом семейство $\{U_n^\alpha : n \in \overline{m}\}$ является конечным открытым покрытием пространства G_α, то есть,

$$G_\alpha = \bigcup_{n=1}^{m} U_n^\alpha,$$

вписанным в покрытие $\{W_n^\alpha : n \in \overline{m}\}$ и удовлетворяющим, для каждого n, условию

$$U_n^\alpha \subset W_n^\alpha.$$

Теперь рассмотрим разбиение единицы $\{\phi_n : n \in \overline{m}\}$ на пространстве G_α, подчиненное покрытию $\{U_n^\alpha : n \in \overline{m}\}$. Напомним, что так называется индексированное семейство непрерывных функций

$$\phi_n : G_\alpha \to [0, 1],$$

где $n \in \overline{m}$, обладающее следующими свойствами:

- для каждого n носитель функции ϕ_n, то есть, замыкание множества $\phi_n^{-1}((0, 1])$, содержится в окрестности U_n^α;

- для любого элемента $g \in G_\alpha$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{m} \phi_n(g) = 1.$$

Следующим шагом для каждого $n \in \overline{m}$ мы введем в построение композиции отображений, задаваемые формулами

$$\psi_n := \phi_n \circ \pi_\alpha : G \to [0,1];$$

$$\widehat{\psi}_n := \phi_n \circ \pi_\alpha \circ p : X \to [0,1].$$

Непосредственным образом проверяется, что семейства отображений $\{\,\psi_n : n \in \overline{m}\,\}$ и $\{\,\widehat{\psi}_n : n \in \overline{m}\,\}$ являются, соответственно, разбиениями единицы на G и X, подчиненными покрытиям $\{\,U_n : n \in \overline{m}\,\}$ и $\{\,p^{-1}(U_n) : n \in \overline{m}\,\}$.

Далее, для каждого числа $n \in \overline{m}$ зададим пару функций $f_n : X \to \mathbb{C}$ и $\widehat{f}_n : X \to \mathbb{C}$ следующими формулами:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad x \notin p^{-1}(W_n) = \bigsqcup_{l=1}^{k} V_l^n; \\ \exp(i\dfrac{2\pi}{k}(l-1)), \quad \text{если} \quad x \in V_l^n, \quad l \in \overline{k}; \qquad (i^2 = -1); \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\widehat{f}_n(x) := \widehat{\psi}_n(x) f_n(x), \qquad \text{где} \quad x \in X.$$

Здесь и в дальнейшем символом exp обозначается экспоненциальная функция.

Заметим, что, ввиду условий (1.3), функции $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \ldots, \widehat{f}_m$ непрерывны на пространстве X.

Теперь рассмотрим диагональ отображений $p, \widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m$:

$$p \triangle \widehat{f}_1 \triangle \widehat{f}_2 \triangle \cdots \triangle \widehat{f}_m : X \to G \times \mathbb{C}^m.$$

Она является гомеоморфным вложением. Это означает, что под действием $p \triangle \widehat{f}_1 \triangle \widehat{f}_2 \triangle \cdots \triangle \widehat{f}_m$ пространство X гомеоморфно отображается на свой

образ
$$p\triangle\widehat{f}_1\triangle\widehat{f}_2\triangle\cdots\triangle\widehat{f}_m(X)\subset G\times\mathbb{C}^m.$$

Действительно, поскольку диагональ отображений непрерывна, а пространство X компактно, то, по теореме Александрова, для доказательства гомеоморфности вложения достаточно показать, что отображение $p\triangle\widehat{f}_1\triangle\widehat{f}_2\triangle\cdots\triangle\widehat{f}_m$ инъективно. Но последнее свойство эквивалентно тому факту, что семейство отображений $\{p,\widehat{f}_1,\widehat{f}_2,\dots,\widehat{f}_m\}$ разделяет точки, что, в свою очередь легко проверяется (ср. [145, лемма 1]).

Теперь для каждого индекса $\lambda\in\Lambda_\alpha$ мы определяем компактное пространство X_λ с помощью формулы
$$X_\lambda:=\left\{\,\big(\pi_\lambda(p(x)),\widehat{f}_1(x),\widehat{f}_2(x),\cdots,\widehat{f}_m(x)\big):x\in X\,\right\}\subset G_\lambda\times\mathbb{C}^m.$$

Иными словами, пространство X_λ представляет собой образ пространства X под действием диагонали отображений
$$(\pi_\lambda\circ p)\triangle\widehat{f}_1\triangle\widehat{f}_2\triangle\cdots\triangle\widehat{f}_m:X\to G_\lambda\times\mathbb{C}^m.$$

Обозначим через $h_\lambda:X\to X_\lambda$ сюръективное непрерывное отображение, задаваемое формулой
$$h_\lambda(x)=(\pi_\lambda\circ p)\triangle\widehat{f}_1\triangle\widehat{f}_2\triangle\cdots\triangle\widehat{f}_m(x)\qquad\text{для}\quad x\in X.$$

И, наконец, последний «кирпичик» построения. А именно, рассмотрим проекцию p_λ пространства X_λ на первую координату, то есть, отображение
$$p_\lambda:X_\lambda\to G_\lambda:(\pi_\lambda(p(x)),\widehat{f}_1(x),\widehat{f}_2(x),\cdots,\widehat{f}_m(x))\mapsto\pi_\lambda(p(x)),\quad x\in X.$$

Очевидно, для каждого индекса $\lambda\in\Lambda_\alpha$, диаграмма
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h_\lambda"'] & G \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\ X_\lambda \arrow[r, "p_\lambda"] & G_\lambda \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

коммутативна. Другими словами, справедливо равенство для композиций отображений

$$\pi_\lambda \circ p = p_\lambda \circ h_\lambda,$$

простым следствием которого является открытость композиции отображений $p_\lambda \circ h_\lambda$ и отображения p_λ.

Теперь зафиксируем индекс $\lambda \in \Lambda_\alpha$. Для любого элемента $g \in G_\lambda$, коммутативность диаграммы (1.5) гарантирует следующее равенство полных прообразов

$$h_\lambda^{-1}(p_\lambda^{-1}(g)) = (\pi_\lambda \circ p)^{-1}(g),$$

которое, в свою очередь, влечет представление

$$p_\lambda^{-1}(g) = \{(g, \widehat{f}_1(x), \widehat{f}_2(x), \ldots, \widehat{f}_m(x)) : x \in (\pi_\lambda \circ p)^{-1}(g)\}. \tag{1.6}$$

Более того, при каждом $n \in \overline{m}$, мы получаем равенство

$$\widehat{\psi}_n(x) = \phi_n \circ \pi_\alpha^\lambda(g)$$

для всякого элемента x из множества $(\pi_\lambda \circ p)^{-1}(g)$. Оно показывает, что отображение $\widehat{\psi}_n(x)$ является постоянным на слое $(\pi_\lambda \circ p)^{-1}(g)$. Поэтому мы можем переписать равенство (1.6) следующим образом:

$$\begin{gathered} p_\lambda^{-1}(g) = \\ = \{(g, \phi_1(\pi_\alpha^\lambda(g)) f_1(x), \ldots, \phi_m(\pi_\alpha^\lambda(g)) f_m(x)) : x \in (\pi_\lambda \circ p)^{-1}(g)\}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Заметим, что для каждого числа $n \in \overline{m}$, мощность множества

$$\{f_n(x) : x \in (\pi_\lambda \circ p)^{-1}(g)\}$$

конечна. Точнее говоря, она не превосходит числа $k+1$ (см. (1.4)). Используя этот факт и равенство (1.7), мы заключаем, что множество $p_\lambda^{-1}(g)$ конечно. Вообще говоря, мощность слоя $p_\lambda^{-1}(g)$ зависит от g. Поэтому на данный момент мы не можем утверждать, что отображение p_λ является конечнолистным накрытием.

Тем не менее имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.2.1. *Существует индекс $\beta \in \Lambda_\alpha$, такой, что для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\beta$ отображение $p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda$ является k-листным накрытием.*

Доказательство этого предложения мы проведем в два этапа.

На первом этапе будет доказана лемма 1.2.1, в которой строится конечное открытое покрытие

$$\{\, O_s : s \in \overline{t}\,\},\ t \in \mathbb{N},$$

пространства G, удовлетворяющее некоторым дополнительным требованиям. При этом построении будет выбран желаемый индекс $\beta \in \Lambda_\alpha$.

На втором этапе, используя покрытие $\{\, O_s : s \in \overline{t}\,\}$, мы покажем, что все отображения p_λ, где $\lambda \in \Lambda_\beta$ являются k-листными накрытиями.

Лемма 1.2.1. *Существуют индекс $\beta \in \Lambda_\alpha$ и такое конечное семейство открытых подмножеств*

$$\{\, O_s : s \in \overline{t}\,\},\ t \in \mathbb{N}$$

пространства G, что

$$G = \bigcup_{s=1}^{t} O_s,$$

и выполняются следующие свойства:

(O1) *Для любого числа $s \in \overline{t}$ справедливо равенство $O_s = \pi_\beta^{-1}(O_s^\beta)$, где семейство $\{\, O_s^\beta : s \in \overline{t}\,\}$ является открытым покрытием пространства G_β :*

$$G_\beta = \bigcup_{s=1}^{t} O_s^\beta;$$

(O2) *Для любого числа $s \in \overline{t}$ существует дизъюнктное разложение множества натуральных чисел*

$$\overline{m} = \{\, a_1, a_2, \dots, a_r \,\} \bigsqcup \{\, b_1, b_2, \dots, b_{m-r} \,\}, \tag{1.8}$$

такое, что выполняются следующие два соотношения:

- $O_s \subset \bigcap_{j=1}^{r} W_{a_j};$
- $O_s \bigcap (\bigcup_{j=1}^{m-r} \overline{U}_{b_j}) = \emptyset.$

Более того, для всякого числа $j \in \overline{m-r}$, *и любой точки* $x \in p^{-1}(O_s)$ *выполняется равенство*

$$\widehat{\psi}_{b_j}(x) = 0,$$

и все множества

$$f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}(p^{-1}(g))$$

состоят из одних и тех же k *элементов, когда точка* g *пробегает рассматриваемую окрестность* O_s.

(Для упрощения обозначений мы использовали здесь символы a_j, b_j и r вместо символов a_{sj}, b_{sj} и r_s соответственно. Естественно, если $r = m$, то множество $\{ b_j : j \in \overline{m-r} \}$ полагается пустым).

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $g \in G$. Разбиение (1.8) множества натуральных чисел $\overline{m}$ задается с помощью дизъюнктного разложения открытого покрытия

$$\{ W_n : n \in \overline{m} \} = \{ W_{a_j} : j \in \overline{r} \} \bigsqcup \{ W_{b_j} : j \in \overline{m-r} \},$$

которое, в свою очередь, определяется следующими двумя требованиями:

$$g \in \bigcap_{j=1}^{r} W_{a_j} \qquad \text{и} \qquad g \notin \bigcup_{j=1}^{m-r} W_{b_j}.$$

Используя (1.3), мы делаем вывод, что

$$g \notin \bigcup_{j=1}^{m-r} \overline{U}_{b_j}. \tag{1.9}$$

Возьмем произвольный элемент x из полного прообраза $p^{-1}(g)$. Для каждого числа a_j из разбиения (1.8) обозначим через $V_{l_j}^{a_j}$ единственный слой в разложении (1.2) множества $p^{-1}(W_{a_j})$, такой, что выполняется условие

$$x \in V_{l_j}^{a_j}.$$

Следующим шагом определяем окрестность $O(x)$ точки x, полагая

$$O(x) := \bigcap_{j=1}^{r} V_{l_j}^{a_j}.$$

Ввиду (1.4), для каждого индекса $j \in \overline{r}$ и любого элемента $y \in O(x)$, имеем равенство

$$f_{a_j}(y) = \exp(i\frac{2\pi}{k}(l_j - 1)).$$

Аналогичным образом, полагая, что

$$p^{-1}(g) = \{\, x_1, x_2, \dots, x_k \,\},$$

мы определяем непересекающиеся окрестности $O(x_1), O(x_2), \dots, O(x_k)$ точек $x_1, x_2, \cdots, x_k$ соответственно.

Очевидно, что для каждого индекса $l \in \overline{k}$ ограничение диагонали отображений $f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}$ на окрестность $O(x_l)$ является постоянной функцией.

Принимая во внимание (1.9), мы построим окрестность $O(g)$ точки g, такую, что справедливы два следующих соотношения:

- $O(g) \subset \bigcap\limits_{l=1}^{k} p(O(x_l))$;
- $O(g) \bigcap (\bigcup\limits_{j=1}^{m-r} \overline{U}_{b_j}) = \emptyset$.

Очевидно, без ограничения общности, мы можем положить,что

$$O(g) = \pi_{\lambda}^{-1}(U),$$

где $\lambda \in \Lambda_\alpha$, а U — некоторая непустая окрестность в пространстве G_λ.

Легко видеть, что все функции $\widehat{\psi}_{b_1}, \widehat{\psi}_{b_2}, \ldots, \widehat{\psi}_{b_{m-r}}$ обращаются в нуль на множестве $p^{-1}(O(g))$ (конечно, при условии, что множество $\{ b_1, b_2, \ldots, b_{m-r} \}$ непусто), а мощность образа

$$f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}(p^{-1}(O(g)))$$

равна k. Точнее говоря, для произвольного элемента $g' \in O(g)$ с полным прообразом

$$p^{-1}(g') = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$$

имеет место представление

$$f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}(p^{-1}(O(g))) = \{ f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}(y_l) : l \in \overline{k} \}.$$

Далее, поскольку пространство G компактно, то существует конечное открытое покрытие этого пространства, удовлетворяющее условию $O2$), которое обозначим через

$$\big\{O(g_s) : g_s \in G, s \in \overline{t}\big\},$$

где для каждого индекса $s \in \overline{t}$ полагаем, что

$$O(g_s) = \pi_{\lambda_s}^{-1}(U_s^{\lambda_s}),$$

а $U_s^{\lambda_s}$ — окрестность в пространстве G_{λ_s}, где $\lambda_s \in \Lambda_\alpha$.

Для каждого $s \in \overline{t}$ окрестность $O(g_s)$ обозначим через O_s.

Следующим шагом выбираем индекс $\beta \in \Lambda_\alpha$, такой, что $\lambda_s \prec \beta$ для всех индексов $s \in \overline{t}$. Ясно, что имеет место равенство множеств

$$O_s = \pi_\beta^{-1}(O_s^\beta),$$

где индекс $s \in \overline{t}$, а окрестность O_s^β задается формулой

$$O_s^\beta = (\pi_{\lambda_s}^\beta)^{-1}(U_s^{\lambda_s}).$$

Наконец, так как отображение π_β сюръективно, семейство множеств

$$\{ O_s^\beta : s \in \overline{t} \}$$

является открытым покрытием пространства G_β :

$$G_\beta = \bigcup_{s=1}^{t} O_s^\beta.$$

Таким образом, покрытие $\{\, O_s : s \in \overline{t}\,\}$ обладает свойством $O1$), и лемма доказана. $\square$

Доказательство предложения 1.2.1. Пусть β — индекс, фигурирующий в лемме 1.2.1. Сначала докажем, что $p_\beta : X_\beta \longrightarrow G_\beta$ является k-листным накрывающим отображением. Мы уже знаем, что оно является открытым. Нам достаточно показать, что для каждого элемента $g \in G_\beta$ полный прообраз $p_\beta^{-1}(g)$ состоит из k точек.

Для этого зафиксируем произвольный элемент $g \in G_\beta$. Для множества $p_\beta^{-1}(g)$ имеются представления (1.6) и (1.7) (с β вместо λ).

Поскольку семейство $\{\, O_s^\beta : s \in \overline{t}\,\}$, построенное в лемме 1.2.1, является покрытием пространства G_β, то найдется индекс s, такой, что имеет место включение

$$\pi_\beta^{-1}(g) \subset O_s.$$

Зафиксируем такое число s и рассмотрим разбиение (1.8), соответствующее этому индексу.

Если в указанном разбиении множество $\{\, b_j : j \in n_{m-r}\,\}$ непусто, то (см. свойство $(O2)$ в лемме 1.2.1) для каждого числа b_j мы получаем равенство

$$\widehat{f}_{b_j}(x) = \widehat{\psi}_{b_j}(x) f_{b_j}(x) = 0$$

при $x \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g)$.

Следовательно, мощность полного прообраза $p_\beta^{-1}(g)$ совпадает с мощностью множества

$$\{\, \widehat{f}_{a_1} \triangle \widehat{f}_{a_2} \triangle \cdots \triangle \widehat{f}_{a_r}(x) : x \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g)\,\}.$$

Теперь рассмотрим точку $x_0 \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g)$. Поскольку для каждого натурального числа a_j из разбиения (1.8), соответствующего индексу s, выполняется равенство

$$\widehat{\psi}_{a_j}(x) = \widehat{\psi}_{a_j}(x_0)$$

при $x \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g)$, то нам достаточно показать, что множество

$$\left\{ (\widehat{\psi}_{a_1}(x_0) f_{a_1}(x), \widehat{\psi}_{a_2}(x_0) f_{a_2}(x), \ldots, \widehat{\psi}_{a_r}(x_0) f_{a_r}(x)) : x \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g) \right\} \quad (1.10)$$

состоит из k точек.

Так как семейство функций $\{ \widehat{\psi}_n : n \in \overline{m} \}$ является разбиением единицы на пространстве X, и функции $\widehat{\psi}_{b_1}, \widehat{\psi}_{b_2}, \ldots, \widehat{\psi}_{b_{m-r}}$ обращаются в нуль на множестве $(\pi_\beta \circ p)^{-1}(g)$, то справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{r} \widehat{\psi}_{a_j}(x_0) = 1.$$

Из него мы заключаем, что, по крайней мере для одного индекса a_j, выполняется неравенство

$$\widehat{\psi}_{a_j}(x_0) > 0.$$

Используя последнее наблюдение, свойство $(O2)$ из леммы 1.2.1 и тот факт, что любая функция f_{a_j} разделяет точки каждого множества $p^{-1}(g')$, где $g' \in \pi_\beta^{-1}(g)$, легко видеть, что множество (1.10) состоит из k точек. Таким образом, аналогичное заключение справедливо и для множества $p_\beta^{-1}(g)$.

Теперь покажем, что для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\beta$ отображение

$$p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda$$

является k-листным накрытием. Для этого зафиксируем произвольный индекс $\lambda \in \Lambda_\beta$.

В пространстве G_λ рассмотрим семейство окрестностей $\{ O_s^\lambda : s \in \bar{t} \}$ полагая

$$O_s^\lambda := (\pi_\beta^\lambda)^{-1}(O_s^\beta),$$

где в качестве $\{ O_s^\beta : s \in \bar{t} \}$ взято открытое покрытие пространства G_β, удовлетворяющее свойству $(O1)$ из леммы 1.2.1. Очевидно, что семейство

$\{ O_s^\lambda : s \in \bar{t} \}$ образует открытое покрытие пространства G_λ:

$$G_\lambda = \bigcup_{s=1}^{t} O_s^\lambda.$$

Заметим, что из равенства $\pi_\beta = \pi_\beta^\lambda \circ \pi_\lambda$ следует соотношение

$$O_s = \pi_\lambda^{-1}(O_s^\lambda)$$

для каждого индекса $s \in \bar{t}$.

Чтобы получить требуемое заключение, остается повторить рассуждения, проведенные в начале данного доказательства, заменяя отображение $p_\beta : X_\beta \longrightarrow G_\beta$ на отображение $p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda$. Предложение доказано. $\square$

Далее для каждой пары сравнимых индексов $\lambda, \mu \in \Lambda_\beta$, где $\lambda \prec \mu$, введем в рассмотрение отображение

$$h_\lambda^\mu : X_\mu \longrightarrow X_\lambda : h_\mu(x) \longmapsto h_\lambda(x),$$

где $x \in X$. Очевидно, что эта формула задает указанное отображение корректно.

Используя соответствующие определения, непосредственно проверяется, что семейство $\{ X_\lambda, h_\lambda^\mu, \Lambda_\beta \}$ является обратной системой в категории $\mathcal{COMP}$ и что семейство $\{ p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta \}$ является морфизмом между обратными системами $\{ X_\lambda, h_\lambda^\mu, \Lambda_\beta \}$ и $\{ G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda_\beta \}$. Таким образом, для каждой пары индексов $\lambda, \mu \in \Lambda_\beta$, удовлетворяющей условию $\lambda \prec \mu$, диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"'] & X_\mu \arrow[l, "h_\lambda^\mu"'] \arrow[d, "p_\mu"] \\ G_\lambda & G_\mu \arrow[l, "\pi_\lambda^\mu"'] \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

коммутативна.

Перейдем к основному утверждению этого параграфа.

Предложение 1.2.2. *Конечнолистное накрывающее отображение* p :

$X \longrightarrow G$ из связного топологического пространства на компактную группу кратности k является с точностью до изоморфизма предельным морфизмом, индуцированным морфизмом

$$\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\} : \{X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda_\beta\} \longrightarrow \{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda_\beta\}$$

обратных систем в категории компактных пространств и их непрерывных отображений $\mathcal{COMP}$, где $p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda$ — k-листное накрывающее отображение для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\beta$.

Доказательство. Итак, по предложению 1.2.1 и наблюдениям, приведенным выше в настоящем разделе, у нас имеется морфизм $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\}$ обратных систем в категории $\mathcal{COMP}$, состоящий из k-листных отображений.

Введем в рассмотрение предельный морфизм $p_\infty : X_\infty \longrightarrow G_\infty$ между обратными пределами, индуцированный морфизмом $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\}$. Свойство универсальности для обратных пределов X_∞ и G_∞ доставляет соответственно отображение $\rho : X \longrightarrow X_\infty$ и гомеоморфизм $\sigma : G \longrightarrow G_\infty$. Очевидно, что эти отображения задаются следующими формулами:

$$\rho(x) = \{h_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda_\beta\} \qquad x \in X;$$

$$\sigma(g) = \{\pi_\lambda(g) : \lambda \in \Lambda_\beta\}, \qquad g \in G.$$

Коммутативность диаграммы (1.5) гарантирует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "p"'] & X_\infty \arrow[d, "p_\infty"] \\ G \arrow[r, "\sigma"] & G_\infty \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

Остается показать, что отображение $\rho : X \longrightarrow X_\infty$ является гомеоморфизмом.

Действительно, предположим, что для точек x и y, принадлежащих пространству X выполняется равенство

$$\rho(x) = \rho(y).$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\widehat{f}_j(x) = \widehat{f}_j(y), \qquad j \in \overline{m};$$

$$\pi_\lambda(p(x)) = \pi_\lambda(p(y)), \quad \lambda \in \Lambda_\beta.$$

Поскольку семейство проекций $\{\pi_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\}$ разделяет точки пространства G, получается равенство

$$p(x) = p(y).$$

Следовательно, мы имеем равенство

$$p\triangle\widehat{f}_1\triangle\widehat{f}_2\triangle\ldots\triangle\widehat{f}_m(x) = p\triangle\widehat{f}_1\triangle\widehat{f}_2\triangle\ldots\triangle\widehat{f}_m(y).$$

Но диагональ отображений $p\triangle\widehat{f}_1\triangle\widehat{f}_2\triangle\ldots\triangle\widehat{f}_m$ инъективна. Из чего вытекает равенство

$$x = y.$$

Таким образом, отображение ρ является инъективным.

Теперь установим сюрьективность этого отображения.

Для этого, взяв произвольную точку $x = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\} \in X_\infty$, где $x_\lambda \in X_\lambda$, $\lambda \in \Lambda_\beta$, мы покажем справедливость равенства

$$x = \rho(y)$$

для некоторой точки $y \in p^{-1}(g)$. Здесь g — это единственна точка пространства G, такая, что выполняется равенство

$$\sigma(g) = p_\infty(x).$$

С этой целью, для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\beta$ рассмотрим точку $z_\lambda \in X$,

такую, что
$$x_\lambda = h_\lambda(z_\lambda).$$
В таком случае мы имеем равенство
$$h_\beta(z_\beta) = h_\beta^\lambda(h_\lambda(z_\lambda)),$$
из которого следует, что
$$h_\lambda(z_\lambda) = (\pi_\lambda(p(z_\lambda)), \widehat{f}_1(z_\beta), \widehat{f}_2(z_\beta), \ldots, \widehat{f}_m(z_\beta)). \tag{1.13}$$
Обратим внимание читателя на то, что последние m координат у всех точек $h_\lambda(z_\lambda)$, где $\lambda \in \Lambda_\beta$, одни и те же.

Далее положим
$$p^{-1}(g) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}.$$
Легко видеть, что для каждого элемента $y_n \in p^{-1}(g)$, где $n \in \overline{k}$, выполняется равенство
$$(\pi_\beta \circ p)(y_n) = (\pi_\beta \circ p)(z_\beta). \tag{1.14}$$

Из этого следует, что точки $z_\beta, y_1, y_2, \ldots, y_k$ лежат в одном прообразе $p^{-1}(O_s)$ для некоторой окрестности O_s покрытия $\{O_1, O_2, \ldots, O_t\}$ пространства G, построенного в лемме 1.2.1.

Зафиксируем такую окрестность O_s и рассмотрим разбиение (1.8) множества натуральных чисел $\overline{m}$ из леммы 1.2.1, соответствующее этой окрестности.

По свойству $(O2)$ из указанной леммы существует единственная точка y_l в полном прообразе $p^{-1}(g)$, удовлетворяющая равенству
$$f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \ldots \triangle f_{a_r}(y_l) = f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \ldots \triangle f_{a_r}(z_\beta). \tag{1.15}$$

Утверждается, что справедливо равенство
$$\rho(y_l) = x. \tag{1.16}$$

Действительно, используя равенства (1.14), (1.15) и свойство $(O2)$ из леммы 1.2.1, мы получаем равенства

$$\widehat{f}_{a_j}(y_l) = \widehat{f}_{a_j}(z_\beta)$$

для всех индексов $j \in \overline{r}$ и, вдобавок, при условии, что множество чисел $\{b_j : j \in \overline{m-r}\}$ непусто, равенства

$$\widehat{f}_{b_j}(y_l) = \widehat{f}_{b_j}(z_\beta) = 0$$

для всех чисел $j \in \overline{m-r}$.

Из свойств, указанных выше, вытекает соотношение для множеств

$$\widehat{f}_1 \triangle \widehat{f}_2 \triangle \ldots \triangle \widehat{f}_m(y_l) = \widehat{f}_1 \triangle \widehat{f}_2 \triangle \ldots \triangle \widehat{f}_m(z_\beta). \tag{1.17}$$

Легко видеть, что для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\beta$ имеет место равенство

$$\pi_\lambda \circ p(y_l) = \pi_\lambda \circ p(z_\lambda). \tag{1.18}$$

Теперь, комбинируя соотношения (1.13), (1.17) и (1.18), мы получаем требуемое равенство (1.16).

Таким образом, отображение ρ является биекцией.

Поэтому, будучи непрерывным и заданным на компактном пространстве, отображение ρ является, по теореме Александрова, гомеоморфизмом. Что и требовалось показать. $\square$

1.3. Теорема о накрывающей группе

В этом параграфе доказывается теорема о накрывающей группе для компактных связных групп, которые, вообще говоря, не локально связны.

Теорема 1.3.1. ***(Теорема о накрывающей группе)***

Пусть $p : X \longrightarrow G$ — конечнолистное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную группу G с единицей e. Тогда для любой точки $\widetilde{e}$ из множества $p^{-1}(e)$ на пространстве X существует единственная структура топологической группы, такая, что элемент

$\widetilde{e}$ является ее единицей, а p — гомоморфизмом компактных групп. Более того, если группа G абелева, то отображение p — гомоморфизм абелевых групп.

Доказательство. Пусть кратность накрывающего отображения p равна k. Рассмотрим морфизм

$$\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\} : \{X_\lambda, h_\lambda^\mu, \Lambda_\beta\} \longrightarrow \{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda_\beta\}$$

обратных систем в категории $\mathcal{COMP}$, построенный в предложении 1.2.2. Ниже, мы превратим $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\}$ в морфизм обратных систем в категории компактных групп и их непрерывных гомоморфизмов $\mathcal{CGR}$.

Зафиксируем точку $\widetilde{e}$ из полного прообраза $p^{-1}(e)$. Для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\beta$ введем в рассмотрение точку e_λ из пространства X_λ, задав ее формулой $\widetilde{e}_\lambda := h_\lambda(\widetilde{e})$.

Обозначим через e_λ единицу группы G_λ.

Из коммутативности диаграммы (1.5) немедленно следует включение

$$\widetilde{e}_\lambda \in p_\lambda^{-1}(e_\lambda).$$

Применяя теорему Понтрягина о накрывающей группе ко всем накрывающим отображениям $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda, \lambda \in \Lambda_\beta$, снабдим каждое пространство X_λ такой структурой топологической группы, что точка $\widetilde{e}_\lambda$ становится ее единицей, а k-листное накрывающее отображение p_λ — гомоморфизмом компактных групп.

При этом нам нужно показать еще, что все связующие отображения

$$h_\lambda^\mu : X_\mu \longrightarrow X_\lambda \tag{1.19}$$

становятся гомоморфизмами компактных групп.

С этой целью, для фиксированной пары индексов $\lambda, \mu \in \Lambda_\beta$, удовлетворяющей соотношению $\lambda \prec \mu$, рассмотрим отображение (1.19) и, используя его, мы построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] \\
X_\mu \times X_\mu \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "F_1=F_2"] & G_\lambda
\end{tikzcd}$$

Через F в этой диаграмме обозначается композиция трех отображений, а именно, умножения в группе X_μ, отображения h^μ_λ и гомоморфизма p_λ. То есть, для любых $x, y \in X_\mu$ мы можем написать, что

$$F(x, y) = p_\lambda \circ h^\mu_\lambda(xy).$$

Далее, определим два отображения F_1 и F_2 из декартова квадрата топологического пространства X_μ в пространство X_λ. Зададим их формулами, приведенным ниже:

$$F_1 : X_\mu \times X_\mu \longrightarrow X_\lambda : (x, y) \longmapsto h^\mu_\lambda(xy);$$

$$F_2 : X_\mu \times X_\mu \longrightarrow X_\lambda : (x, y) \longmapsto h^\mu_\lambda(x)h^\mu_\lambda(y),$$

где $x, y \in X_\mu$.

Мы утверждаем, что оба эти отображения являются поднятиями отображения F на пространство X_λ относительно накрытия p_λ. Это в точности означает, что с помощью каждого из отображений F_1 и F_2 предыдущая диаграмма может быть дополнена до коммутативной, то есть, справедливы следующие равенства отображений:

$$p_\lambda \circ F_1 = F, \quad p_\lambda \circ F_2 = F.$$

Действительно, так как диаграмма (1.11) коммутативна и отображения p_λ, p_μ и π^μ_λ являются гомоморфизмами групп, то для любых точек $x, y \in X_\mu$ выполняется равенство

$$p_\lambda \circ h^\mu_\lambda(xy) = p_\lambda(h^\mu_\lambda(x)h^\mu_\lambda(y)).$$

Вдобавок, напоминая, что элемент $\widetilde{e}_\mu$ является единицей группы X_μ, мы имеем равенство

$$F_1(\widetilde{e}_\mu, \widetilde{e}_\mu) = F_2(\widetilde{e}_\mu, \widetilde{e}_\mu).$$

Поскольку декартово произведение $X_\mu \times X_\mu$ является связным пространством, то из свойства единственности для поднятий на накрывающие пространства [128, гл. 2, §2, теорема 2] вытекает равенство отображений $F_1 = F_2$, которое и означает, что отображение $h^\mu_\lambda : X_\mu \to X_\lambda$ является гомоморфизмом компактных групп.

В свою очередь, семейство отображений

$$\{\, p_\lambda; \Lambda_\beta \,\} : \{\, X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda_\beta \,\} \to \{\, G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda_\beta \,\}$$

рассматриваем в качестве морфизма обратных систем в категории компактных групп $\mathcal{CGR}$. Поэтому отображение $p_\infty : X_\infty \to G_\infty$ является гомоморфизмом компактных групп.

При всем этом, если группа G абелева, то каждое k-листное накрывающее отображение $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$ является гомоморфизмом между абелевыми группами, а, следовательно, таковым является и предельное отображение $p_\infty : X_\infty \to G_\infty$.

Далее, заметим, что в диаграмме (1.12) отображения σ и p_∞ являются гомоморфизмами компактных групп. Используя полученные выше свойства объектов и морфизмов в диаграмме (1.12), мы очевидным образом снабжаем пространство X желаемой структурой топологической группой, в которой единицей группы служит точка $\widetilde{e}$.

Наконец, остается отметить, что единственность построенной структуры сразу следует из указанного выше свойства единственности для поднятий отображений на накрывающие пространства [128, гл. 2, §2, теорема 2].

Тем самым теорема о накрывающей группе полностью доказана. □

Замечание 1.3.1. Теорему 1.3.1 можно доказать с использованием лишь одного конечнолистного накрытия $p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda$ из предложения 1.2.1. При этом групповая операция умножения на накрывающем пространстве X задается с помощью формулы, в которой участвуют отображения, построенные в §1.2, и групповое умножение, которое вводится на пространстве X_λ с помощью теоремы Понтрягина о накрывающей группе. В статье [144] приводится такое доказательство.

Ниже мы построим два примера, показывающие, что теорема 1.3.1 перестает быть справедливой, если в ее посылке отказаться от предположения о связности пространств.

Пример 1. Рассмотрим два декартовых произведения $X_1 = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ и $X_2 = \mathbb{S}^1 \times \{2\}$. Через p_k, где $k = 1, 2$, обозначим k-листное накрывающее отображение, задаваемое формулой

$$p_k : X_k \longrightarrow \mathbb{S}^1 : (z, k) \longmapsto z^k, \qquad z \in \mathbb{S}^1.$$

Построим комбинацию отображений p_1 и p_2:

$$p_1 \triangledown p_2 : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow \mathbb{S}^1.$$

В дальнейшем пространство $X_1 \oplus X_2$ и отображение $p_1 \triangledown p_2$ будем соответственно обозначать через Y и p. Легко видеть, что комбинация $p : Y \longrightarrow \mathbb{S}^1$ является 3-листным накрывающим отображением.

Мы утверждаем, что структура топологической группы в $\mathbb{S}^1$ не поднимается на накрывающее пространство Y. Доказательство этого проведем от противного.

Итак, пусть на пространстве Y существует структура топологической группы, превращающая отображение p в непрерывный гомоморфизм групп. Предположим, что единичный элемент этой группы принадлежит X_2. Ясно, что для каждого элемента $y \in X_1$ справедливо равенство $X_1 = yX_2$. Из него следует, что отображения $p|_{X_1} = p_1$ и $p|_{X_2} = p_2$, являющиеся ограничениями отображения p на X_1 и X_2 соответственно, имеют одинаковые кратности, что неверно. Случай, когда единица группы Y лежит в X_1, аналогичен. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Пример 2. Пусть $p : Y \longrightarrow \mathbb{S}^1$ — накрывающее отображение из примера 1. Рассмотрим два пространства

$$Y_j := Y \times \{j\}, \quad \text{где} \quad j = 0, 1,$$

и два отображения q_j, определяемые следующей формулой:

$$q_j : Y_j \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \{j\} : (y, j) \longmapsto (p(y), j), \quad y \in Y, \quad j = 0, 1.$$

Пусть $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ — дискретная группа порядка два, а $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$ — прямое произведение групп. Ясно, что сумма отображений

$$q_0 \oplus q_1 : Y_0 \oplus Y_1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$$

является интересующим нас накрывающим отображением.

1.4. Приложения теоремы о накрывающей группе

На протяжении этого раздела мы будем рассматривать компактную связную абелеву группу G. Для групповой операции в ее дуальной группе $\widehat{G}$ будем использовать аддитивную форму записи.

В качестве первого следствия из теоремы 1.3.1, мы получаем следующий результат, касающийся конечнолистных накрывающих отображений на компактные связные абелевы группы.

Теорема 1.4.1. *Пусть $p : X \longrightarrow G$ — конечнолистное накрывающее отображение из связного топологического пространства X на компактную связную абелеву группу G. Группа характеров $\widehat{G}$ допускает деление на кратность накрытия p в том и только том случае, когда кратность накрытия p равняется единице, то есть, отображение p является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Итак, пусть в группе $\widehat{G}$ возможно деление на кратность $k \in \mathbb{N}$ накрытия p. Воспользовавшись теоремой 1.3.1, снабдим накрывающее пространство X структурой топологической группы, превращающей накрывающее отображение p в гомоморфизм между компактными связными абелевыми группами.

Обозначим через e и $\widetilde{e}$ единичные элементы топологических групп G и X соответственно.

Введем в рассмотрение канонический гомоморфизм на фактор-группу $X/p^{-1}(e)$:

$$\tau : X \longrightarrow X/p^{-1}(e).$$

Рассмотрим также изоморфизм топологических групп

$$\sigma : X/p^{-1}(e) \longrightarrow G,$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "p"'] & & X/p^{-1}(e) \arrow[dl, "\sigma"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{1.20}$$

коммутативна, то есть, $p = \sigma \circ \tau$.

Утверждается, что отображение τ является изоморфизмом топологических групп. Для доказательства этого утверждения мы покажем справедливость равенства

$$p^{-1}(e) \ = \ \{\widetilde{e}\}. \tag{1.21}$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что равенство (1.21) неверно. Очевидно, что в таком случае найдется характер $\chi \in \widehat{X}$, ограничение которого на подгруппу $p^{-1}(e)$ не является тождественным характером.

Так как полный прообраз $p^{-1}(e)$ является конечной группой порядка k, то ограничение характера $k\chi$ на подгруппу $p^{-1}(e)$ является тождественным характером. Отсюда следует (см. [31, теорема 23.25]), что существует характер

$$\theta \in \widehat{X/p^{-1}(e)}\,,$$

для которого выполняется равенство

$$\widehat{\tau}(\theta) = k\chi, \tag{1.22}$$

где $\widehat{\tau}$ — морфизм, дуальный к гомоморфизму τ.

Так как группа $\widehat{X/p^{-1}(e)}$ является k-делимой, то существует характер

$$\eta \in \widehat{X/p^{-1}(e)},$$

удовлетворяющий следующему равенству:

$$k\eta = \theta. \tag{1.23}$$

Применим к обеим частям равенства (1.23) гомоморфизм $\widehat{\tau}$. Воспользовавшись равенством (1.22), получаем следующее равенство:

$$k\widehat{\tau}(\eta) = k\chi. \tag{1.24}$$

Поскольку, по теореме 24.25 из [31], группа характеров $\widehat{X}$ является группой без кручения, то из (1.24) вытекает равенство

$$\widehat{\tau}(\eta) = \chi.$$

Отсюда следует, что ограничение характера χ на подгруппу $p^{-1}(e)$ является тождественным характером. Получили противоречие. Тем самым, равенство (1.21) доказано.

Значит, гомоморфизм τ является изоморфизмом топологических групп, как и утверждалось.

Для завершающего шага осталось воспользоваться коммутативностью диаграммы (1.20). Таким образом, накрывающее отображение p является изоморфизмом топологических групп.

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана. $\square$

Непосредственными следствиями теоремы 1.4.1 и критерия Кислинга [102, теорема 1.1] являются следующие утверждения.

Следствие 1.4.1. *Пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Если группа характеров $\widehat{G}$ является k-делимой, то не существует k-листного накрывающего отображения из связного топологического пространства на компактную связную абелеву группу G.*

Следствие 1.4.2. *Пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Если существует k-*

листное накрывающее отображение из связного топологического пространства на компактную связную абелеву группу G, то на G не существует k-среднее.

Замечание 1.4.1. Нетрудно построить примеры компактных связных абелевых групп, на которых не существует k-среднее, что равносильно тому, что их группы характеров не являются k-делимыми, и при этом также нет k-листных накрывающих отображений из связных топологических пространств на эти группы. Такие примеры есть среди P-адических соленоидов (см. [74, пример 2], [115, предложение 2.2], [51], [147], [148]). Таким образом, утверждения следствий 1.4.1 и 1.4.2 не являются обратимыми.

Используя теорему 1.4.1, мы получаем достаточность условия, сформулированного в следующем критерии тривиальности конечнолистных накрывающих отображений на компактные связные абелевы группы. Доказательство его необходимости (теорема 2.4.3) мы откладываем до §2.4 в главе 2. Это объясняется тем, что в нем будут использоваться свойства корней многочленов Вейерштрасса, которые нам удобнее изложить позже.

Теорема 1.4.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Все k-листные накрывающие отображения на компактную связную абелеву группу G являются тривиальными тогда и только тогда, когда группа характеров $\widehat{G}$ допускает деление на $k!$.*

Доказательство. Итак, предположим, что группа характеров $\widehat{G}$ допускает деление на $k!$.

Пусть $p : Y \longrightarrow G$ — k-листное накрывающее отображение, где Y — некоторое несвязное топологическое пространство. Выберем произвольную компоненту связности Y_1 пространства Y и рассмотрим конечнолистное накрывающее отображение

$$p|_{Y_1} : Y_1 \longrightarrow G,$$

то есть ограничение накрытия p на подпространство Y_1.

Поскольку кратность накрывающего отображения $p|_{Y_1}$ какое-то натуральное число, меньшее кратности накрывающего отображения p, то есть числа k, то, очевидно, что группа характеров $\widehat{G}$ допускает деление на кратность накрытия $p|_{Y_1}$. Поэтому, применяя теорему 1.4.1 к накрытию $p|_{Y_1}$, мы заключаем, что отображение $p|_{Y_1}$ является гомеоморфизмом.

Рассуждая аналогичным образом с ограничением накрывающего отображения p на каждую компоненту связности пространства Y, мы получаем, что Y имеет ровно k компонент связности, которые обозначим через $Y_1, \ldots, Y_k$. При этом для каждого числа $m \in \overline{k}$ отображение

$$p|_{Y_m} : Y_m \longrightarrow G$$

является гомеоморфизмом.

Теперь легко видеть, что отображение p является тривиальным k-листным накрывающим отображением.

Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "p"'] & \bigoplus\limits_{m=1}^{k} Y_m \arrow[r, "\varphi"] & G \times \overline{k} \arrow[dl, "pr"] \\
& G &
\end{tikzcd} \tag{1.25}$$

В ней все пространства компактны. Напомним, что каждая компонента связности Y_s, будучи замкнутым подмножеством в компактном пространстве Y, является компактным подпространством в Y. Поскольку мы имеем дело с конечной суммой компактных пространств $\bigoplus\limits_{m=1}^{k} Y_m$, то она компактна [34, теорема 3.2.3]. Далее, id — тождественное отображение, φ — отображение, задаваемое формулой

$$\begin{aligned} \varphi(y) = \ & (p|_{Y_m}(y), m) \ = \\ & = (p(y), m), \end{aligned}$$

в которой точка $y \in \bigoplus\limits_{m=1}^{k} Y_m$ и натуральное число m однозначно определяется из условия $y \in Y_m$, а отображение pr — проекция на первую координату.

Ясно, что отображения id и φ являются гомеоморфизмами, а, стало быть, и их композиция $\varphi \circ id$ — гомеоморфизм.

Осталось убедиться в коммутативности диаграммы (1.25). Но это вытекает из очевидных выкладок. А именно, возьмем произвольную точку $y \in Y$. Пусть $y \in Y_m$. Тогда имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned}[pr \circ (\varphi \circ id)](y) &= pr(\varphi(y)) = \\ &= pr(p|_{Y_m}(y), m) = \\ &= p(y).\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора точки $y \in Y$, получили требуемое равенство отображений

$$[pr \circ (\varphi \circ id)] = p.$$

Таким образом, k-листное накрывающее отображение $p : Y \longrightarrow G$ эквивалентно проекции на первую координату $pr : G \times \overline{k} \longrightarrow G$, то есть, является тривиальным. Теорема доказана. □

Из теоремы 1.4.2 и теоремы 1.1.1 (критерий Кислинга) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.4.3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Все k-листные накрывающие отображения на компактную связную абелеву группу G являются тривиальными тогда и только тогда, когда на группе G существует $k!$-среднее.*

Глава 2.

Многочлены Вейерштрасса и уравнения над банаховыми алгебрами непрерывных функций на компактных связных абелевых группах

На протяжении данной главы G обозначает произвольную компактную связную абелеву группу. Через $C(G)$ обозначается алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на группе G с поточечными операциями сложения и умножения. Символ $\|\cdot\|_0$ будет обозначать равномерную (или $\sup -$) норму на $C(G)$, относительно которой она является банаховой алгеброй. Здесь мы изучаем тесную связь многочленов Вейерштрасса над алгеброй $C(G)$ с конечнолистными накрывающими отображениями на группу G.

В первом параграфе приводятся необходимые сведения из теории многочленов Вейерштрасса над алгеброй $C(G)$.

Второй параграф посвящен доказательству теоремы о том, что всякое конечнолистное накрывающее отображение из необязательно связного пространства на группу G эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению, определяемому сепарабельным многочленом Вейерштрасса над $C(G)$.

В третьем параграфе вводится понятие непрерывного многообразия Вейерштрасса, порождаемого конечным набором многочленов. Оно возникло в процессе изучения вида коэффициентов многочленов Вейерштрасса, определяющих полиномиальные накрытия, которые эквивалентны связным конечнолистным накрывающим отображениям на группу G. В этом параграфе доказывается, что каждое связное конечнолистное накрытие группы G эквивалентно отображению проектирования на первую координату многообразия Вейерштрасса, порождаемого двучленами $x^{n_j}-\chi_j$, где χ_j — характер группы G, $j=1,\ldots,m$, $m\in\mathbb{N}$. Из доказательства этого утверждения будет видно, что, если кратность заданного связного накрытия равна простому числу, то многообразие Вейерштрасса совпадает с множеством нулей одного такого двучлена.

В четвертом параграфе рассматриваются многочлены Вейерштрасса над алгеброй $C(G)$ вида $x^n-\chi$, где χ — характер группы G. С помощью теоремы ван Кампена о факторизации обратимых элементов алгебры $C(G)$ мы изучаем свойства корней таких многочленов. Это изучение позволяет нам доказать необходимость возможности деления на $n!$ в группе характеров $\widehat{G}$ группы G, у которой все n-листные накрытия тривиальны. То есть, доказать оставшуюся импликацию в теореме 1.4.2. Следуя терминологии в теории многочленов Вейерштрасса, мы будем говорить о возможности извлечения корня степени $n!$.

2.1. Многочлены Вейерштрасса и полиномиальные накрывающие отображения

В первом параграфе мы приводим основные определения и факты о многочленах над алгеброй $C(G)$, взятые из работ В.Л. Хансена [81, 85], где такие многочлены называются многочленами Вейерштрасса и рассматриваются над алгеброй непрерывных комплекснозначных функций, заданных на произвольном связном топологическом пространстве.

Определение 2.1.1. *Многочленом Вейерштрасса степени* $n\in\mathbb{N}$ *над*

$C(G)$, или над G , называется полиномиальная функция

$$R : G \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

которая имеет вид

$$\begin{aligned} R(g,z) = z^n + \sum_{j=1}^{n} f_j(g) z^{n-j} = \\ = z^n + f_1(g)z^{n-1} + f_2(g)z^{n-2} + \cdots + f_n(g), \end{aligned}$$

и коэффициентами которой служат непрерывные комплекснозначные функции

$$f_1, \ldots, f_n : G \longrightarrow \mathbb{C},$$

где $g \in G$, $z \in \mathbb{C}$.

Другими словами, многочленами Вейерштрасса называются унитарные (со старшими коэффициентами равными единице) многочлены над банаховой алгеброй $C(G)$.

Определение 2.1.2. *Многочлен Вейерштрасса (2.1) называется сепарабельным, или простым, если для каждого элемента $g \in G$ многочлен*

$$R(g,z) = z^n + f_1(g)z^{n-1} + f_2(g)z^{n-2} + \cdots + f_n(g)$$

от переменной z с комплексными коэффициентами не имеет кратных корней в поле $\mathbb{C}$.

Пусть R — простой многочлен Вейерштрасса степени n над G. Рассмотрим множество его нулей

$$E(R) = \{(g,z) \in G \times \mathbb{C} \mid R(g,z) = 0\}$$

как подпространство декартова произведения $G \times \mathbb{C}$, а вместе с ним и проекцию на первую координату

$$pr : E(R) \longrightarrow G : (g,z) \longmapsto g.$$

Как известно (см., например, [81, предложение 3.2]), отображение pr является n-листным накрывающим отображением. Этим фактом мотивировано следующее определение [81, определение 2.2].

Определение 2.1.3. *Проекция* $pr : E(R) \longrightarrow G$ *называется* n*-листным полиномиальным накрывающим отображением, а пространство* $E(R)$ *—* n*-листным полиномиальным накрывающим пространством над* G*, определяемым (ассоциированным с) простым многочленом Вейерштрасса* $R(g, z)$ *степени* n *над* G.

Пример 2.1.1. Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим многочлен Вейерштрасса степени n над единичной окружностью $\mathbb{S}^1$

$$R : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

задаваемый формулой

$$R(g, z) = z^n - g,$$

где $g \in \mathbb{S}^1$, $z \in \mathbb{C}$.

Ясно, что этот многочлен Вейерштрасса является простым. Поэтому мы имеем n-листное полиномиальное накрывающее отображение

$$pr : E(R) \longrightarrow \mathbb{S}^1 : (g, z) \longmapsto g,$$

где

$$E(R) = \{(g, z) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \mid z^n - g = 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что накрытие pr эквивалентно отображению возведения в n-ую степень, то есть, n-листному накрывающему отображению

$$p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 : z \longmapsto z^n.$$

Действительно, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E(R) \arrow[dl, "pr"] \\
& \mathbb{S}^1 &
\end{tikzcd}$$

В ней через φ обозначен гомеоморфизм, задаваемый формулой

$$\varphi(z) = (z^n, z).$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$pr \circ \varphi \ = \ p,$$

то есть, диаграмма коммутативна. Поэтому n-листные накрывающие отображения p и pr эквивалентны.

Пример 2.1.2. Рассмотрим многочлен Вейерштрасса (2.1), где $n \geqslant 2$, задаваемый формулой

$$R(g, z) \ = \ (z - 1) \cdot (z - 2) \cdot \ldots \cdot (z - n).$$

Очевидно, что он простой многочлен Вейерштрасса. Также ясно, что n-листное полиномиальное накрывающее отображение, определяемое многочленом R, не что иное, как тривиальное n-листное накрывающее отображение, являющееся проекцией на первую координату, то есть, отображение

$$G \times \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow G : (g, l) \longmapsto g, \quad l \in \overline{n}.$$

В.Л. Хансен привел необходимое и достаточное условие для того, чтобы заданное конечнолистное накрывающее отображение $p : E \longrightarrow X$ на связное топологическое пространство X было эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению [81, теорема 5.1]. Для формулировки этого критерия напомним определение (см. [81, с.34]).

Определение 2.1.4. *Конечнолистное накрывающее отображение*

$$p : E \longrightarrow X$$

из топологического пространства E *на связное топологическое пространство* X *вкладывается в тривиальное комплексное линейное расслоение над* X*, если существует непрерывное отображение*

$$h : E \longrightarrow X \times \mathbb{C},$$

называемое вложением, которое отображает E *гомеоморфно на его образ* $h(E)$ *в декартовом произведении* $X \times \mathbb{C}$ *и которое коммутирует с проекцией*

$$pr : X \times \mathbb{C} \longrightarrow X : (x, z) \longmapsto x,$$

где $x \in X$, $z \in \mathbb{C}$, *то есть, справедливо равенство*

$$pr \circ h = p,$$

или, другими словами, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times \mathbb{C} \arrow[dl, "pr"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Имеет место следующий критерий [81, теорема 5.1].

Теорема 2.1.1. ***(В.Л.Хансен)*** *Конечнолистное накрывающее отображение*

$$p : E \longrightarrow X$$

из топологического пространства E *на связное топологическое пространство* X *эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению тогда и только тогда, когда оно вкладывается в тривиальное комплексное линейное расслоение над* X.

Напомним, что эквивалентность между конечнолистными накрывающими отображениями на окружность $\mathbb{S}^1$ и полиномиальными накрывающими отображениями была доказана Хансеном в [81, теорема 8.3].

2.2. Многочлены Вейерштрасса и конечнолистные накрытия компактных связных абелевых групп

В этом параграфе мы используем теорему о накрывающей группе для того, чтобы показать, что каждое конечнолистное накрытие компактной связной абелевой группы G эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению. Наши рассуждения проведем в два этапа. На первом этапе мы рассматриваем накрытие со связным накрывающим пространством. К заданному накрытию применяется теорема о накрывающей группе. Затем, это накрытие вкладывается в тривиальное комплексное линейное расслоение над G. Для этого используются свойства характеров группы G. В конце первого этапа строится сепарабельный многочлен Вейерштрасса, определяющий полиномиальное накрытие, которое эквивалентно заданному накрывающему отображению. На втором этапе рассматривается накрытие с несвязным накрывающим пространством. К накрывающим отображениям, являющимся ограничениями заданного накрытия, на компоненты связности его накрывающего пространства, применяется первый этап. На завершающем шаге строится сепарабельный многочлен Вейерштрасса, определяющий требуемое полиномиальное накрытие.

Теорема 2.2.1. *Любое конечнолистное накрывающее отображение на связную компактную абелеву группу G эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $p : X \longrightarrow G$ — k-листное накрывающее отображение, где X — связное топологическое пространство и $k \geqslant 2$.

Воспользовавшись теоремой о накрывающей группе, введем структуру компактной связной абелевой группы на пространстве X, превращающую отображение $p : X \longrightarrow G$ в непрерывный гомоморфизм групп. Тогда ядро этого гомоморфизма $\mathrm{Ker}(p)$ является конечной подгруппой в группе X порядка k.

Согласно теореме 2.1.1, для доказательства эквивалентности накрытия p полиномиальному накрывающему отображению достаточно построить вложение p в тривиальное комплексное линейное расслоение над G. Этим мы и займемся ниже. Для этого используем свойства характеров компактных абелевых групп.

Сначала построим некоторое вспомогательное отображение

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Пусть $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{k-1}\}$ — набор всех характеров группы $\mathrm{Ker}(p)$ за исключением тождественного характера.

По лемме 24.4 из [31], для каждого характера χ_j, где $j \in \overline{k-1}$, существует характер $\widetilde{\chi}_j$ группы X, являющийся продолжением характера χ_j, то есть, для любого $x \in \mathrm{Ker}(p)$ справедливо равенство

$$\widetilde{\chi}_j(x) = \chi_j(x).$$

В случае, если $k = 2$, то функцию f зададим формулой

$$f := \widetilde{\chi}_1.$$

Если же $k \geqslant 3$, то для каждого натурального числа $j \in \overline{k-2}$ мы сначала определим действительное число ϵ_j с помощью следующей формулы:

$$\epsilon_j := \min\{|\chi_j(g) - \chi_j(h)| : g, h \in \mathrm{Ker}(p), \chi_j(g) \neq \chi_j(h)\}.$$

Очевидно, что $0 < \epsilon_j \leqslant 2$ для всех индексов j.

Далее, выбираем любые положительные действительные числа

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{k-1} > 0,$$

удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$\lambda_j \epsilon_j > 2(\lambda_{j+1} + \lambda_{j+2} + \cdots + \lambda_{k-1}),$$

где $j \in \overline{k-2}$.

Функцию $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ задаем в виде линейной комбинации характеров:

$$f := \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \widetilde{\chi}_j.$$

Мы утверждаем, что для каждого элемента $g \in G$ отображение f разделяет точки полного прообраза $p^{-1}(g)$.

Действительно, это сразу ясно в случае, когда $k = 2$.

Предположим, что выполняется условие $k \geqslant 3$. Зафиксируем элемент $g \in G$ и возьмем две различные точки $x_1, x_2 \in p^{-1}(g)$. Так как имеет место равенство множеств

$$p^{-1}(g) = x\mathrm{Ker}(p),$$

где $x \in p^{-1}(g)$, то в $\mathrm{Ker}(p)$ найдутся элементы y_1 и y_2, такие, что выполняются равенства

$$x_1 = xy_1,$$

$$x_2 = xy_2.$$

Отметим, что конечное семейство характеров $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{k-1}$ разделяет точки множества $\mathrm{Ker}(p)$.

Теперь обозначим через j_0 наименьшее число из множества $\overline{k-1}$, такое, что характер χ_{j_0} разделяет точки y_1 и y_2, то есть, имеет место соотношение

$$\chi_{j_0}(y_1) \neq \chi_{j_0}(y_2).$$

Если $j_0 \neq k-1$, то справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| \geqslant \lambda_{j_0}|\chi_{j_0}(y_1)-\chi_{j_0}(y_2)|- \\ -\sum_{j=j_0+1}^{k-1}\lambda_j|\chi_j(y_1)-\chi_j(y_2)| \geqslant \\ \geqslant \lambda_{j_0}\epsilon_{j_0}-2\sum_{j=j_0+1}^{k-1}\lambda_j > \\ > 0.\end{aligned}$$

Если же $j_0 = k-1$, то имеет место формула

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \lambda_{k-1}|\chi_{k-1}(y_1)-\chi_{k-1}(y_2)| > 0.$$

Таким образом, мы показали, что справедливо соотношение

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Тем самым, утверждение о том, что для каждого элемента $g \in G$ отображение f разделяет точки полного прообраза $p^{-1}(g)$, доказано.

В свою очередь, оно позволяет сделать вывод о том, что отображение ϕ, задаваемое формулой

$$\phi : X \longrightarrow G \times \mathbb{C} : x \longmapsto (p(x), f(x)),$$

где $x \in X$, является инъективным.

Образ множества X под действием отображения ϕ с топологией, индуцированной из пространства $G \times \mathbb{C}$, обозначим через Y. Поскольку пространство X компактно, то под действием отображения ϕ оно гомеоморфно отображается на пространство Y.

При этом ясно, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & G \times \mathbb{C} \arrow[dl, "pr"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, справедливо равенство отображений

$$p \;=\; pr \circ \phi, \tag{2.2}$$

где pr — проекция на первую координату. Значит, отображение ϕ является вложением конечнолистного накрывающего отображения $p : X \longrightarrow G$ в тривиальное комплексное расслоение. Теперь, для завершения доказательства в шаге 1, можно сослаться на теорему 2.1.1. Для полноты изложения мы представим ниже независимое рассуждение, завершающее доказательство шага 1.

Мы будем обозначать теми же буквами ϕ и pr соответственно гомеоморфизм между пространствами X и Y и проекцию пространства Y на первую координату G.

Очевидно, что справедливо то же самое равенство (2.2).

Нам остается показать, что pr является полиномиальным накрывающим отображением, порождаемым простым многочленом Вейерштрасса степени k над группой G.

С этой целью, для каждого элемента $g \in G$ мы полагаем

$$p^{-1}(g) = \{x_1(g), x_2(g), \ldots, x_k(g)\}.$$

Как обычно, обозначим через s_n n-ый симметрический многочлен от k переменных, где $n \in \overline{k}$.

Непосредственно проверяется, что для каждого числа $n \in \overline{k}$ функция $f_n : G \to \mathbb{C}$, задаваемая формулой

$$f_n(g) := (-1)^n s_n(f(x_1(g)), f(x_2(g)), \ldots, f(x_k(g))),$$

где $g \in G$, определена корректно и непрерывна на группе G.

Наконец, введем в рассмотрение простой многочлен Вейерштрасса степени k над группой G:

$$r(g,z) := z^k + f_1(g)z^{k-1} + f_2(g)z^{k-2} + \ldots + f_k(g),$$

где $g \in G, z \in \mathbb{C}$.

Нетрудно проверить, что Y является множеством нулей для многочлена $r(g,z)$, то есть, имеет место равенство множеств:

$$Y = \{(g,z) \in G \times \mathbb{C} : z^k + f_1(g)z^{k-1} + \ldots + f_k(g) = 0\}.$$

Таким образом, мы заключаем, что pr является полиномиальным накрывающим отображением, определяемым простым многочленом Вейерштрасса $r(g,z)$. При этом накрывающее отображение p эквивалентно накрытию pr. Доказательство шага 1 завершено.

Шаг 2. Пусть $p : X \longrightarrow G$ — k-листное накрывающее отображение, где X — несвязное топологическое пространство и $k \geqslant 2$.

Поскольку ограничение отображения p на произвольную компоненту связности пространства X является конечнолистным накрывающим отображением, то, рассматривая конечное разбиение пространства X на компоненты связности, а именно,

$$X = \bigsqcup_{j=1}^{n} X_j,$$

мы имеем k_j-листные накрывающие отображения

$$p|_{X_j} : X_j \longrightarrow G$$

на группу G. При этом каждое число k_j удовлетворяет неравенству $k_j < k$ и для их суммы выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} k_j = k.$$

В дальнейшем мы будем отождествлять пространство X и сумму компонент связности $\bigoplus_{j=1}^{n} X_j$ (см. доказательство достаточности теоремы 1.4.2).

Применяя шаг 1 данного доказательства, получаем, что все накрывающие отображения $p|_{X_j}$, $j \in \overline{n}$, эквивалентны полиномиальным накрывающим отображениям на группу G.

Поэтому, для каждого индекса $j \in \overline{n}$, существует k_j-листное накрывающее отображение
$$\widetilde{p}_j : Y_j \to G,$$
определяемое простым многочленом Вейерштрасса
$$r_j(g,z) = z^{k_j} + f_{1j}(g)z^{k_j-1} + f_{2j}(g)z^{k_j-2} + \ldots + f_{k_jj}(g)$$
степени k_j над группой G, где
$$Y_j := \{(g,z) \in G \times \mathbb{C} : z^{k_j} + f_{1j}(g)z^{k_j-1} + \ldots + f_{k_jj}(g) = 0\}.$$
При этом существует гомеоморфизм
$$\phi_j : X_j \to Y_j,$$
такой, что имеет место равенство
$$p|_{X_j} = \widetilde{p}_j \circ \phi_j.$$

Далее, для произвольного числа $z_0 \in \mathbb{C}$ рассмотрим множество нулей простого многочлена Вейерштрасса $r_j(g, z+z_0)$, где $g \in G$, $z \in \mathbb{C}$:
$$Y_j(z_0) := \{(g,z) \in G \times \mathbb{C} : (z+z_0)^{k_j} + f_{1j}(g)(z+z_0)^{k_j-1} + \ldots + f_{k_jj}(g) = 0\}.$$

Очевидно, что пространства Y_j и $Y_j(z_0)$ являются гомеоморфными.

Напомним хорошо известный и легко проверяемый факт, что для модуля второй координаты произвольной точки (g,z), лежащей в пространстве Y_j, справедливо неравенство
$$|z| \leqslant 1 + \max\{\|f_{lj}\|_0 : l \in \overline{k_j}\},$$
где $\|f_{lj}\|_0$ — равномерная норма функции f_{lj}.

Используя эту оценку, мы выбираем действительные числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

которые удовлетворяют следующему условию:

$$Y_j(\alpha_j) \bigcap Y_l(\alpha_l) = \emptyset,$$

при различных индексах $j, l \in \overline{n}$.

Обозначим через $\widetilde{q}_j$ проекцию пространства $Y_j(\alpha_j)$ на первую координату, а через ψ_j — гомеоморфизм пространства Y_j на пространство $Y_j(\alpha_j)$, такой, что имеет место равенство

$$\widetilde{p}_j = \widetilde{q}_j \circ \psi_j.$$

Тогда отображение $\theta_j : X_j \to Y_j(\alpha_j)$, задаваемое как композиция отображений

$$\theta_j := \psi_j \circ \phi_j,$$

является гомеоморфизмом, удовлетворяющим равенству

$$p|_{X_j} = \widetilde{q}_j \circ \theta_j.$$

Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\theta_1 \oplus \cdots \oplus \theta_n"] \arrow[dr, "p"'] & & \bigoplus\limits_{j=1}^{n} Y_j(\alpha_j) \arrow[dl, "\widetilde{q}_1 \triangledown \cdots \triangledown \widetilde{q}_n"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Напомним, что сумма $\theta_1 \oplus \cdots \oplus \theta_n$ гомеоморфизмов $\theta_1, \ldots, \theta_n$ является также гомеоморфизмом.

Наконец, нетрудно видеть, что комбинация отображений

$$\widetilde{q}_1 \triangledown \cdots \triangledown \widetilde{q}_n$$

является k-листным накрывающим отображением, определяемым простым многочленом Вейерштрасса

$$r(g,z) = \prod_{j=1}^{n} r_j(g, z+\alpha_j).$$

степени k над группой G.

На этом доказательство теоремы завершено. $\square$

2.3. Многообразия Вейерштрасса и конечнолистные накрытия компактных связных абелевых групп

В этом параграфе вводится понятие многообразия Вейерштрасса, порождаемого конечным семейством многочленов Вейерштрасса над банаховой алгеброй непрерывных функций, определенных на компактной группе G. Так мы называем пространство, определяемое нулями этих многочленов.

Определение 2.3.1. *Пусть дано конечное семейство многочленов Вейерштрасса $P_1(g,z),\ldots,P_m(g,z)$ над $C(G)$. Подпространство $E(P_1,\ldots,P_m)$ декартова произведения $G\times\mathbb{C}^m$, задаваемое формулой*

$$E(P_1,\ldots,P_m) = \{(g,z_1,\ldots,z_m) \mid g\in G,\ z_j\in\mathbb{C},\ P_j(g,z_j)=0,\ j\in\overline{m}\},$$

называется непрерывным многообразием Вейерштрасса, порождаемым многочленами $P_1(g,z),\ldots,P_m(g,z)$.

Целью данного раздела является доказательство следующей теоремы, утверждающей, говоря неформально, что всякое связное конечнолистное накрытие компактной связной абелевой группы определяется многообразием Вейерштрасса, порождаемым многочленами, коэффициентами которых являются характеры этой группы.

Теорема 2.3.1. *Пусть $p: X\longrightarrow G$ — n-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную связную абелеву группу*

G. Тогда существуют многочлены Вейерштрасса

$$R_j(g,z) = z^{n_j} - \chi_j(g), \tag{2.3}$$

где $n_j \in \mathbb{N}$, $\chi_j \in \widehat{G}$, $j \in \overline{m}$, такие, что наркытие p эквивалентно отображению проектирования на первую координату многообразия Вейерштрасса, порождаемого многочленами $R_1(g,z), \dots, R_m(g,z)$. При этом степени многочленов Вейерштрасса связаны с кратностью накрывающего отображения p равенством $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой о накрывающей группе, введем структуру компактной связной абелевой группы на пространстве X, превращающую отображение $p : X \to G$ в непрерывный гомоморфизм абелевых групп. Тогда ядро этого гомоморфизма $\mathrm{Ker}(p)$ является дискретной подгруппой в группе X порядка n.

В случае, когда $n = 1$ утверждение доказываемой теоремы очевидно. Поэтому мы предполагаем, что число n больше единицы.

Рассмотрим разложение ядра $\mathrm{Ker}(p)$ гомоморфизма p в прямое произведение своих подгрупп

$$\mathrm{Ker}(p) = < x_1 > \times < x_2 > \times \ldots \times < x_m >,$$

где $< x_j >$ — циклическая подгруппа порядка $n_j \geqslant 2$ с образующим элементом $x_j \in \mathrm{Ker}(p), j \in \overline{m}$.

Для каждого индекса $j \in \overline{m}$ обозначим через ψ_{0j} характер группы $\mathrm{Ker}(p)$, задаваемый равенством

$$\psi_{0j}(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}) = \exp(i\frac{2\pi k_j}{n_j}),$$

где $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$, $i^2 = -1$.

Напомним [31, (23.27)], что всякий элемент из группы характеров $\widehat{\mathrm{Ker}(p)}$ имеет вид

$$\psi_{01}^{k_1} \psi_{02}^{k_2} \ldots \psi_{0m}^{k_m},$$

где $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$.

Далее, продолжим каждый характер ψ_{0j} до характера ψ_j всей группы X.

Сделать это нам позволяет лемма 24.4 из [31]. Ясно, что характер $\psi_j^{n_j}$ принадлежит аннулятору группы $\mathrm{Ker}(p)$ в группе характеров $\widehat{X}$. Таким образом, в нашем распоряжении имеется равенство множеств

$$\psi_j^{n_j}(\mathrm{Ker}(p)) = \{1\}.$$

Следовательно, по теореме 24.40 из [31], существует характер $\chi_j \in \widehat{G}$, такой, что справедливо равенство

$$\psi_j^{n_j} = \widehat{p}(\chi_j). \tag{2.4}$$

Следующим шагом, для каждого индекса $j \in \overline{m}$, рассмотрим простой многочлен Вейерштрасса R_j степени n_j над группой G, задаваемый формулой (2.3).

Вслед за этим, введем в рассмотрение многообразие Вейерштрасса

$$E(R_1, \ldots, R_m) = \{(g, z_1, \ldots, z_m) \mid g \in G,\ z_j \in \mathbb{C},\ R_j(g, z_j) = 0,\ j \in \overline{m}\}.$$

Для краткости будем обозначать его через E. Очевидно, что относительно покоординатных групповых операций многообразие Вейерштрасса E является компактной абелевой группой. При этом, нетрудно видеть, что проекция на первую координату

$$pr :\longrightarrow G : (g, z_1, \ldots, z_m) \longmapsto g$$

является сюръективным морфизмом в категории компактных групп и n-листным накрывающим отображением.

Нам остается показать, что накрывающие отображения p и pr являются эквивалентными.

С этой целью, мы сначала построим изоморфизм между группами характеров $\widehat{E}$ и $\widehat{X}$.

Указанное построение начнем с утверждения о том, что каждый характер θ группы X может быть представлен, причем единственным образом, в виде произведения

$$\theta = \psi_1^{k_1}\psi_2^{k_2}\ldots\psi_m^{k_m}\widehat{p}(\eta), \tag{2.5}$$

в котором $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$, где $j \in \overline{m}$, а η является характером группы G.

Действительно, рассматривая произвольный характер $\theta \in \widehat{X}$ и его ограничение на ядро $\mathrm{Ker}(p)$, мы получаем характер $\theta|_{\mathrm{Ker}(p)}$ конечной группы $\mathrm{Ker}(p)$. Следовательно, как было отмечено выше, он имеет вид

$$\theta|_{\mathrm{Ker}(p)} = \psi_{01}^{k_1}\psi_{02}^{k_2}\dots\psi_{0m}^{k_m}$$

для некоторых целых чисел k_j, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1.$$

Ясно, что при этом характер

$$\theta\psi_1^{-k_1}\psi_2^{-k_2}\dots\psi_m^{-k_m}$$

принадлежит аннулятору группы $\mathrm{Ker}(p)$ в $\widehat{X}$. Поэтому существует характер $\eta \in \widehat{G}$, такой, что имеет место представление (2.5), что и утверждалось.

Далее, заметим, что при любых двух различных индексах j и s из множества чисел $\overline{m}$ мы имеем соотношения

$$\psi_s(x_j) = 1,$$

$$\psi_j^{k_j}(x_j) \neq 1,$$

где k_j — произвольное число из множества $\overline{n_j - 1}$.

Используя эти соотношения, а также инъективность сопряженного морфизма $\widehat{p} : \widehat{G} \to \widehat{X}$ и равенство множеств

$$\widehat{p}(\eta)(X_0) = \{1\}$$

для произвольного характера $\eta \in \widehat{G}$, нетрудно видеть, что представление характера $\theta \in \widehat{X}$ в виде (2.5) единственно.

Теперь для каждого индекса $j \in \overline{m}$ введем в рассмотрение элемент ξ_j группы характеров $\widehat{E}$, задаваемый формулой

$$\xi_j(g, z_1, \dots, z_m) = z_j,$$

где $(g, z_1, \dots, z_m) \in E$. Тем самым, каждый из характеров $\xi_1, \dots, \xi_m \in \widehat{E}$

представляет собой проекцию многообразия Вейерштрасса на соответствующую координату.

Проводя рассуждения аналогичные тем, которые были выше при доказательстве формулы (2.5), легко видеть, что каждый характер $\zeta \in \widehat{E}$ единственным образом представляется в виде

$$\zeta = \xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\dots\xi_m^{k_m}\widehat{pr}(\eta),$$

где $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$, $j \in \overline{m}$, $\eta \in \widehat{G}$.

Пусть $\sigma : \widehat{E} \to \widehat{X}$ — биективное отображение, определяемое формулой

$$\sigma(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\dots\xi_m^{k_m}\widehat{pr}(\eta)) = \psi_1^{k_1}\psi_2^{k_2}\dots\psi_m^{k_m}\widehat{p}(\eta).$$

Тот факт, что отображение σ является гомоморфизмом групп, легко проверяется используя (2.4) и равенство

$$\xi_j^{n_j} = \widehat{pr}(\chi_j).$$

Таким образом, построен изоморфизм σ между группами характеров $\widehat{E}$ и $\widehat{X}$.

При этом отметим справедливость равенства

$$\widehat{p} = \sigma \circ \widehat{pr}.$$

Кроме того, полученные выше результаты и основные свойства функторов позволяют сделать выводы, о том, что отображение

$$\widehat{\sigma} : \widehat{\widehat{E}} \to \widehat{\widehat{X}}$$

является изоморфизмом и имеет место равенство отображений

$$\widehat{\widehat{p}} = \widehat{\widehat{pr}} \circ \widehat{\sigma}.$$

Для завершающего шага в доказательстве эквивалентности накрывающих отображений $p : X \longrightarrow G$ и $pr : E \longrightarrow G$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "\tau_X"] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, dashed, "\rho"'] & & & \widehat{\widehat{X}} \arrow[dl, "\widehat{\widehat{p}}"'] \arrow[dd, "\widehat{\sigma}"] \\
& G \arrow[r, "\tau_G"] & \widehat{\widehat{G}} & \\
E \arrow[rrr, "\tau_E"] \arrow[ur, "pr"'] & & & \widehat{\widehat{E}} \arrow[ul, "\widehat{\widehat{pr}}"]
\end{tikzcd}
$$

Дополним ее изоморфизмом групп

$$\rho = \tau_E^{-1} \circ \widehat{\sigma} \circ \tau_X : X \longrightarrow E.$$

Легко видеть, что имеет место равенство отображений

$$p = pr \circ \rho.$$

Таким образом, накрывающие отображения p и pr эквивалентны. Теорема доказана. $\square$

Из доказательства теоремы 2.3.1 вытекает следующая

Теорема 2.3.2. *Пусть* $p : X \longrightarrow G$ *— n-листное накрывающее отображение из связного пространства* X *на компактную связную абелеву группу* G*, где n — простое число. Тогда существует простой многочлен Вейерштрасса*

$$R(g, z) = z^n - \chi(g),$$

где $\chi \in \widehat{G}$*, такой, что накрытие* p *эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению, определяемому многочленом* R.

2.4. Уравнения над банаховыми алгебрами непрерывных функций на компактных связных абелевых группах

В этом параграфе сначала изучаются многочлены Вейерштрасса над алгеброй $C(G)$ вида

$$x^n - \chi,$$

где G — компактная связная абелева группа, а χ — характер G. При этом доказывается теорема о свойстве корней таких многочленов. Для этого мы привлекаем теорему Е. Р. ван Кампена, доказанную им в 1937 году в статье [98], а также некоторые факты об алгебраических и аналитических свойствах характеров абелевых топологических групп.

Затем доказывается достаточное условие для возможности извлечения корня в группе характеров группы G.

Заметив, что теорема ван Кампена верна и для неабелевых групп, сформулируем ее для группы G.

Теорема 2.4.1. ***(Е. Р. ван Кампен)*** *Пусть функция $f \in C(G)$ удовлетворяет условию*

$$f(x) \neq 0$$

при всех $x \in G$. Тогда найдется такой характер χ группы G и такая функция $\phi \in C(G)$, что имеет место представление

$$f = \chi \exp(\phi).$$

Доказательство этой теоремы, которое, в отличие от оригинального, не опирается на нетривиальные структурные теоремы о компактных группах, содержится в [9].

Непосредственным следствием из теоремы Е. Р. ван Кампена является следующее утверждение.

Лемма 2.4.1. *Для всякой непрерывной функции $\alpha : G \longrightarrow \mathbb{S}^1$ существуют характер χ на группе G и непрерывная функция $\beta : G \longrightarrow \mathbb{R}$, такие,* *что имеет место равенство*

$$\alpha(g) = \chi(g)\exp(i\beta(g))$$

для каждого g *из* G.

Для изучения решений функциональных уравнений нам также понадобится лемма, в которой утверждается, что лишь тождественный характер может быть представлен в виде композиции экспоненциальной функции и чисто мнимой непрерывной функции. Этот факт, по-видимому, хорошо известен специалистам. Мы приводим его доказательство для полноты изложения.

Лемма 2.4.2. *Предположим, что для характера* $\chi \in \widehat{G}$ *имеет место представление*

$$\chi = \exp \circ (if),$$

где f *– непрерывная вещественнозначная функция на* G. *Тогда существует число* $k \in \mathbb{Z}$, *такое, что выполняется равенство*

$$f(g) = 2\pi k$$

для любого $g \in G$. *Таким образом,* χ *является тождественным характером группы* G.

Доказательство. Возьмем два произвольных элемента g и h группы G. Поскольку справедливо равенство

$$\chi(gh) = \chi(g)\chi(h),$$

то в нашем распоряжении имеется формула

$$\begin{aligned} \exp(if(gh)) = \exp(if(g))\exp(if(h)) = \\ = \exp(i(f(g) + f(h))), \end{aligned}$$

из которой вытекает соотношение

$$f(gh) = f(g) + f(h) + 2\pi k(g,h), \tag{2.6}$$

где $k(g,h)$ – некоторое целое число, вообще говоря, зависящее от выбора элементов группы g и h.

Обозначим через e единичный элемент группы G. Тогда мы можем написать равенства

$$f(e) = f(e^2) = 2f(e) + 2\pi k(e,e).$$

Отсюда следует числовое равенство

$$f(e) = -2\pi k(e,e).$$

Для краткости записи, введем обозначение

$$k_0 := -k(e,e)$$

и покажем, что для каждого элемента $g \in G$ имеет место равенство

$$f(g) = 2\pi k_0.$$

Для этого рассмотрим целочисленную функцию двух переменных на декартовом квадрате

$$k : G \times G \longrightarrow \mathbb{Z},$$

определяемую формулой

$$k(g,h) = \frac{1}{2\pi}(f(gh) - f(g) - f(h)),$$

где $g, h \in G$.

Нетрудно видеть, что функция k является непрерывной на декартовом произведении $G \times G$.

Поскольку группа G связна, то и декартово произведение $G \times G$ является связным пространством. Значит, образ пространства $G \times G$ под действием непрерывного отображения k является тоже связным в дискретном топологическом пространстве целых чисел $\mathbb{Z}$. Но связными множествами в дискретном топологическом пространстве являются лишь одноточечные множества.

Поэтому имеем равенство множеств

$$k(G \times G) = \{-k_0\}.$$

Отсюда и из (2.6) вытекает равенство

$$f(gh) = f(g) + f(h) - 2\pi k_0 \tag{2.7}$$

для любых элементов g и h из G.

Теперь повнимательнее посмотрим на образ группы G под действием отображения f, то есть на множество $f(G)$ в $\mathbb{R}$. Оно является компактным как образ компактного множества относительно непрерывного отображения. Следовательно, образ $f(G)$ является ограниченным множеством в пространстве действительных чисел $\mathbb{R}$.

Мы утверждаем, что, на самом деле, функция $f : G \to \mathbb{R}$ постоянна.

Докажем этот факт от противного. Для этого предположим, что существует такой элемент $g \in G$, что справедливо соотношение

$$f(g) \neq 2\pi k_0.$$

Тогда, в силу (2.7), для произвольного натурального числа n имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} f(g^n) &= nf(g) - 2\pi(n-1)k_0 = \\ &= (n-1)(f(g) - 2\pi k_0) + f(g). \end{aligned}$$

Из этого всего немедленно вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(g^n) = \infty.$$

Но это означает, что последовательность $\{f(g^n) : n \in \mathbb{N}\}$, а вместе с ней, и множество $f(G)$ являются неограниченными. Пришли к противоречию с ограниченностью образа $f(G)$.

Таким образом, имеем равенство множеств

$$f(G) = \{2\pi k_0\}.$$

Следовательно, для любого элемента $g \in G$ справедливы равенства

$$\chi(g) = \exp(i2\pi k_0) = 1,$$

то есть, χ — тождественный характер. Лемма доказана. $\square$

Теперь перейдем к результату о решениях уравнений над банаховой алгеброй непрерывных функций $C(G)$.

Теорема 2.4.2. *Пусть $\chi_0 \in \widehat{G}$. Предположим, что уравнение*

$$x^n - \chi_0 = 0 \tag{2.8}$$

имеет решение в алгебре $C(G)$. Тогда это уравнение имеет решение и в группе характеров $\widehat{G}$.

Доказательство. Обозначим через $\alpha : G \to \mathbb{C}$ непрерывную функцию, которая является решением уравнения (2.8).

Тогда для любого элемента $g \in G$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} |\alpha(g)|^n = |\alpha^n(g)| = \\ = |\chi_0(g)| = 1. \end{aligned}$$

Из этого заключаем, что на всей группе G выполняется тождество

$$|a(g)| = 1.$$

Следовательно, по лемме 2.4.1, существуют характер $\chi \in \widehat{G}$ и непрерывная функция $\beta : G \to \mathbb{R}$, такие, что имеет место равенство

$$\alpha(g) = \chi(g)\exp(i\beta(g))$$

для всех элементов $g \in G$. Но тогда получается, что

$$\begin{aligned} \alpha^n(g) = \chi^n(g)\exp(in\beta(g)) = \\ = \chi_0(g). \end{aligned}$$

для каждого элемента $g \in G$. Поэтому справедливо равенство

$$\exp(in\beta) = \chi_0 \chi^{-n},$$

которое немедленно гарантирует, что функция $\exp(in\beta)$ является характером группы G.

В силу леммы 2.4.2, в таком виде на G представляется только тождественный характер. Значит, получаем равенство

$$\chi^n = \chi_0.$$

Другими словами, функциональное уравнение (2.8) имеет решение в группе характеров $\widehat{G}$, что и требовалось доказать. $\square$

Далее мы используем теорему 2.4.2 для доказательства наличия деления на $n!$ (возможности извлечения корня степени $n!$) в группе характеров компактной связной абелевой группы, у которой все n-листные накрывающие отображения тривиальны, то есть, для доказательства необходимости в критерии тривиальности (см. теорему 1.4.2).

Теорема 2.4.3. *Пусть все n-листные накрытия группы G тривиальны. Тогда в группе характеров $\widehat{G}$ возможно извлечение корня степени $n!$.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного, то есть, предположим, что в группе $\widehat{G}$ невозможно извлечение корня степени $n!$.

Тогда найдутся натуральное число m, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant n$, и характер $\chi_0 \in \widehat{G}$, не являющийся тождественным, такие, что уравнение

$$x^m = \chi_0 \tag{2.9}$$

не имеет решений в группе характеров $\widehat{G}$.

Из теоремы 2.4.2 немедленно вытекает, что это уравнение также не имеет решений в алгебре $C(G)$.

С целью получения противоречия, мы в дальнейшем займемся построением функции $f \in C(G)$, являющейся решением уравнения (2.9).

Для этого рассмотрим простой многочлен Вейерштрасса

$$r : G \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

задаваемый формулой

$$r(g, z) \ = \ z^m - \chi_0(g),$$

и m-листное полиномиальное накрывающее отображение

$$p : X \longrightarrow G,$$

определяемое этим многочленом. То есть, пространство X — это множество

$$\{(g, z) \in G \times \mathbb{C} : r(g, z) = 0\}$$

нулей многочлена r, а p — это проекция на первую координату:

$$p(g, z) = g$$

для всех точек $(g, z) \in X$.

Ясно, что накрывающее отображение p является тривиальным. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть случай $m = n - 1$. Тогда комбинация отображения p с тождественным отображением на G будет n-листным накрытием, которое тривиально по предположению. Значит, существует гомеоморфизм из $X \oplus G$ в декартово произведение $G \times \{1, \ldots, n\}$, показывающий эквивалентность построенной комбинации с проекцией на первую координату пространства $G \times \{1, \ldots, n\}$. Ограничение этого гомеоморфизма на X доставит требуемую эквивалентность.

Поэтому существует гомеоморфизм

$$\varphi : G \times \overline{m} \longrightarrow X,$$

такой, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
G \times \overline{m} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "pr"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\
& G &
\end{tikzcd}
\tag{2.10}
$$

коммутативна, то есть, выполняется равенство отображений

$$pr = p \circ \varphi.$$

Здесь, как обычно, через pr обозначена проекция декартова произведения $G \times \overline{m}$ на первую координату.

Далее рассмотрим отображение

$$q : X \longrightarrow \mathbb{C},$$

являющееся проекцией пространства X на вторую координату:

$$q(g, z) \ = \ z.$$

Теперь, с помощью гомеоморфизма φ и отображения q, определим комплекснозначную функцию

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

посредством следующей формулы:

$$f(g) \ = \ q(\varphi(g, 1)),$$

где $g \in G$. Отметим, что она является непрерывной как композиция непрерывных функций.

Мы утверждаем, что f является решением уравнения (2.9), то есть, имеет место равенство функций

$$f^m = \chi_0. \tag{2.11}$$

Для доказательства равенства (2.11) зафиксируем произвольный элемент g группы G. Мы покажем, что первая координата точки $\varphi(g, 1)$ в накрывающем пространстве X равняется элементу g. Для этого положим

$$\varphi(g, 1) = (g_0, z_0),$$

где $g_0 \in G$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Далее, в силу коммутативности диаграммы (2.10) и определений отображений pr и p, имеем равенства

$$\begin{aligned} g = pr(g, 1) = \\ = p(\varphi(g, 1)) = \\ = p(g_0, z_0) = g_0. \end{aligned}$$

Таким образом, получили соотношение

$$\varphi(g, 1) = (g, z_0).$$

Заметим, что точка (g, z_0) лежит в пространстве X. Значит, справедливо равенство

$$z_0^m = \chi_0(g).$$

Из сделанных выше наблюдений вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} f^m(g) = (q(\varphi(g, 1)))^m = \\ = (q(g, z_0))^m = \\ = z_0^m = \chi_0(g). \end{aligned}$$

Поэтому, в силу произвольности выбора элемента $g \in G$, получаем желаемое равенство функций (2.11).

Таким образом, как утверждалось, уравнение (2.9) имеет решение в алгебре непрерывных функций $C(G)$.

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Завершим параграф и главу следующим замечанием.

Замечание 2.4.1. Как уже отмечалось, группа характеров $\widehat{G}$ изоморфна группе когомологий Чеха $H^1(G, \mathbb{Z})$. В связи с этим фактом следует упомянуть следующее утверждение.

Для компактного пространства X *группа* $H^1(X,\mathbb{Z})$ *является* n*-делимой тогда и только тогда, когда для каждой непрерывной функции*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

функциональное уравнение

$$x^n = f$$

имеет решение в банаховой алгебре $C(X)$.

За его доказательством и обсуждением близких к нему результатов мы отсылаем читателя к [73, результат 5], [8, введение], [85, лемма 1.6, с. 126] и [99, лемма 3.1]. Отметим лишь, что в [85] предполагается, что рассматриваемое пространство связно и локально линейно связно.

Глава 3.

Отображения P-адических соленоидов

Данная глава посвящена изучению свойств связных накрытий соленоидов и обобщенных средних на этих группах. Основными результатами главы являются две теоремы. Во-первых, это теорема 3.2.4 о структуре конечнолистных связных накрытий соленоидов. Для ее доказательства применяется аппроксимационная конструкция, построенная в §1.2. Во-вторых, это критерий (теорема 3.3.1) плотности множеств периодических точек накрытий соленоидов.

В первом параграфе настоящей главы приводятся необходимые определения и сведения о P-адических соленоидах и их отображениях.

Во втором и третьем параграфах изучаются отображения возведения в степень элементов P-адических соленоидов. Такой эндоморфизм P-адического соленоида можно представить в виде предельного морфизма, индуцируемого морфизмом между двумя копиями одной и той же обратной последовательности, пределом которой является P-адический соленоид. Ранее, с точки зрения предельных морфизмов отображения возведения в степень элементов диадического соленоида изучались в работах [137], [51].

В статьях [137], [51] и [104] изучались предельные отображения диадического соленоида и 2-средние на нем. Напомним, что для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ предельное отображение $h^k_{(2,2,\dots)} : \Sigma_{(2,2,\dots)} \longrightarrow \Sigma_{(2,2,\dots)}$ диадического соленоида является конечнолистным накрывающим отображением [137], [51]. Теорема 19 из [51] утверждает, что диадический соленоид допускает конечнолистное накрывающее отображение вида $h^k_{(2,2,\ldots)}$ любой нечетной кратности k и, в то же время, не обладает конечнолистным накрывающим отображением вида $h^k_{(2,2,\ldots)}$ какой-либо четной кратности k. Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ периодические точки предельного отображения $h^k_{(2,2,\ldots)}$ образуют плотное множество в диадическом соленоиде $\Sigma_{(2,2,\ldots)}$ [137], [51]. В [104] доказан критерий существования 2-среднего на соленоиде.

В этой главе мы распространим указанные выше результаты, касающиеся предельных отображений $h^k_{(2,2,\ldots)}$ и 2-средних, соответственно на предельные отображения h^k_P и на произвольные средние на любых P-адических соленоидах Σ_P.

3.1. Необходимые сведения о соленоидах

Мы начнем с определения соленоида, удобного для нашего изложения. При этом соленоид рассматривается как предел обратного спектра, определяемого последовательностью чисел.

Определение 3.1.1. *Пусть $M = (m_1, m_2, \ldots)$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Соленоидом Σ_M называется обратный предел обратной последовательности*

$$\mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_1^2} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_2^3} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_3^4} \ldots, \tag{3.1}$$

в которой связующее отображение f_n^{n+1} является отображением возведения в m_n-ую степень:

$$f_n^{n+1}(z) = z^{m_n},$$

где $z \in \mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, кратко можно написать

$$\Sigma_M = \varprojlim \{\mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\}.$$

Хорошо известно, что соленоид Σ_M представляет из себя метрический связный компакт, который не является локально связным ни в одной точке. Относительно покоординатных групповых операций соленоид Σ_M является компактной связной абелевой группой с единицей

$$e := (1, 1, \ldots).$$

Вместе с последовательностью M из определения 3.1.1 рассмотрим аддитивную группу рациональных чисел

$$\mathbb{Q}_M := \left\{ \frac{m}{m_1 m_2 \ldots m_n} \;\middle|\; \quad m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{3.2}$$

снабженную дискретной топологией.

Для группы характеров соленоида Σ_M и группы $\mathbb{Q}_M$ имеет место изоморфизм групп (см., например, [31, (25.3)], [4, лемма 1]):

$$\widehat{\Sigma_M} \simeq \mathbb{Q}_M.$$

Таким образом, по теории двойственности Понтрягина — ван Кампена, для двух последовательностей натуральных чисел M_1 и M_2 соленоиды Σ_{M_1} и Σ_{M_2} изоморфны как топологические группы тогда и только тогда, когда изоморфны группы рациональных чисел $\mathbb{Q}_{M_1}$ и $\mathbb{Q}_{M_2}$. В свою очередь, классы изоморфизмов групп вида $\mathbb{Q}_M$ могут быть охарактеризованы на языке типов (см., например, [28, §85]) и в других терминах (см., например, [4, лемма 2]). Из этих результатов следует, что группа $\mathbb{Q}_M$ изоморфна группе $\mathbb{Q}_P$, где P — последовательность простых чисел, полученная из последовательности M заменой каждого ее члена на набор ее простых делителей (см., например, обсуждения в [4, с. 34, 35]). Поэтому при изучении свойств соленоидов мы можем, не теряя общности, рассматривать только те из них, которые определяются последовательностями простых чисел.

Определение 3.1.2. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел. Компактная связная абелева группа Σ_P называется P-адическим соленоидом. При этом, если $p_n = 2$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то соленоид Σ_P называется диадическим.*

Отметим, что при рассмотрении последовательностей простых чисел единица не входит в них.

Определение 3.1.3. *Мы будем говорить, что простое число q встречается бесконечно много раз, или часто, в последовательности простых чисел $P = (p_1, p_2, \ldots)$, если для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ существует число $m \in \mathbb{N}$, такое, что $m \geqslant n$ и $p_m = q$.*

Определение 3.1.4. *Последовательности простых чисел P и Q называются эквивалентными, если из этих последовательностей можно так удалить конечные числа членов, что полученные последовательности удовлетворяют следующему условию. Каждое простое число, входящее в одну последовательность, равняется одному и тому же конечному числу членов в обеих последовательностях или встречается в них бесконечно много раз. При этом используется обозначение $P \sim Q$.*

Известно, что P-адический соленоид Σ_P гомеоморфен Q-адическому соленоиду Σ_Q тогда и только тогда, когда $P \sim Q$ (см. [44], [112], [35]). Условие $P \sim Q$ является и критерием существования изоморфизма между топологическими группами Σ_P и Σ_Q [112].

Теперь определим предельные отображения P-адических соленоидов, с которыми нам предстоит работать.

Пусть задано произвольное число $k \in \mathbb{N}$. Для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение возведения в k-ую степень элементов окружности

$$h_n^k : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 : z \longmapsto z^k.$$

Определение 3.1.5. *Предельным отображением $h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$ будем называть эндоморфизм, индуцируемый морфизмом $\{ h_n^k \mid n \in \mathbb{N} \}$ между двумя копиями одной и той же обратной последовательности (3.1), пределом которой является Σ_P:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[d, "h_1^k"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_1^2"'] \arrow[d, "h_2^k"'] & \cdots \arrow[l, "f_2^3"'] & \Sigma_P \arrow[d, "h_P^k"] \\
\mathbb{S}^1 & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "f_1^2"] & \cdots \arrow[l, "f_2^3"] & \Sigma_P
\end{tikzcd} \qquad (3.3)$$

Из этого определения сразу видно, что h_P^k есть не что иное, как отображения возведения в степень k элементов топологической группы Σ_P.

3.2. Конечнолистные накрытия соленоидов

Первая часть параграфа посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 3.2.1. *Пусть P — произвольная последовательность простых чисел и $k \in \mathbb{N}$. Предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является k-листным накрывающим отображением P-адического соленоида Σ_P тогда и только тогда, когда число k не имеет простого делителя, который встречается бесконечно много раз в последовательности P.

Доказательство этой теоремы будет автоматически следовать из ряда предложений, приведенных ниже.

Начнем с утверждения для отображений произвольных P-адических соленоидов, которое является аналогом леммы 1 и предложения 8 для отображений диадических соленоидов из статей [137] и [51] соответственно.

Предложение 3.2.1. *Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является конечнолистным накрывающим отображением. При этом кратность этого отображения не превосходит числа k.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что для доказательства предложения достаточно показать, что предельное отображение h_P^k является m-кратным сюръективным открытым отображением для некоторого числа m, удовлетворяющего условию $m \leqslant k$ (ср. [134, гл. X, §6] , [51, предложение 1]).

Поскольку пространство $\mathbb{S}^1$ компактно, и каждое отображение h_n^k в диаграмме (3.3) сюръективно, то предельное отображение h_P^k также является сюръективным [34, теорема 3.2.14].

Так как h_P^k является непрерывным гомоморфизмом из компактной группы в себя, то этот гомоморфизм является открытым отображением (см., например, [31, (5.29)]).

При этом для каждого элемента $y \in \Sigma_P$ имеем равенство мощностей полных прообразов точек:

$$\mathrm{card}(h_P^k)^{-1}(y) = \mathrm{card}(h_P^k)^{-1}(e).$$

Далее заметим, что если элемент $(x_1, x_2, \ldots)$ лежит в полном прообразе $(h_P^k)^{-1}(e)$, то каждая его координата является некоторым корнем из единицы степени k, то есть, $x_n \in \sqrt[k]{1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Используя эти наблюдения, нетрудно видеть, что h_P^k является m-кратным отображением. При этом ясно, что справедлива оценка $m \leqslant k$.

Предложение доказано. $\square$

В дальнейшем мы займемся определением кратностей предельных отображений h_P^k. Для этого найдем мощности полных прообразов $(h_P^k)^{-1}(e)$, где $k \in \mathbb{N}$ (см. также [51, утверждения 15,17,18]).

Предложение 3.2.2. *Если k является простым числом, которое встречается бесконечно много раз в последовательности P, то предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий, указанных в формулировке предложения, полный прообраз $(h_P^k)^{-1}(e)$ состоит в точности из одного единичного элемента e. Для этого возьмем элемент

$$z = (z_1, z_2, \ldots) \in (h_P^k)^{-1}(e).$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $z_n^k = 1$.

По предположению, для любого заданного $n \in \mathbb{N}$ найдется натуральное число m, такое что $m \geqslant n$ и отображение f_m^{m+1} в обратной последовательности (3.1) с $M = P$ является возведением в k-ую степень. Следовательно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} z_n = f_n^m(f_m^{m+1}(z_{m+1})) &= \\ = f_n^m(z_{m+1}^k) &= \\ = f_n^m(1) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку эти равенства верны для всех $n \in \mathbb{N}$, то получаем, что $z = e$. Таким образом, показано равенство

$$\operatorname{card}(h_P^k)^{-1}(e) = 1.$$

Предложение 3.2.1 позволяет сделать вывод о том, что предельное отображение h_P^k является гомеоморфизмом.

□

Следующая лемма очевидна (ср. [51, факт 16]).

Лемма 3.2.1. *Если $k = l \cdot m$ для некоторых чисел $l, m \in \mathbb{N}$, то справедливо равенство отображений*

$$h_P^k = h_P^l \circ h_P^m.$$

Используя предложение 3.2.2 и лемму 3.2.2, получаем

Предложение 3.2.3. *Если каждый простой делитель числа $k \in \mathbb{N}$ встречается бесконечно много раз в последовательности P, то предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является гомеоморфизмом.

Зафиксируем произвольное число $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим корень n-ой степени из единицы

$$\xi_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

где, как обычно, i — мнимая единица. Множество корней n-ой степени из единицы является мультипликативной циклической группой

$$\sqrt[n]{1} = \{1, \xi_n, \xi_n^2, \ldots, \xi_n^{n-1}\}$$

с порождающим элементом ξ_n.

Для $m \in \mathbb{N}$ зададим эндоморфизм этой группы формулой

$$\psi_m : \sqrt[n]{1} \longrightarrow \sqrt[n]{1} : \xi_n^j \longmapsto \xi_n^{jm},$$

где $j \in \overline{n}$.

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.2.2. *Пусть натуральные числа n и m взаимно просты. Тогда гомоморфизм ψ_m является автоморфизмом группы корней n-ой степени из единицы.*

Таким образом, если числа n и m взаимно просты, то существует автоморфизм групп

$$\phi_m : \sqrt[n]{1} \longrightarrow \sqrt[n]{1},$$

обратный к гомоморфизму ψ_m. В этом случае, для каждого элемента $a \in \sqrt[n]{1}$ имеется в точности один элемент $b \in \sqrt[n]{1}$, чья m-ая степень равна a. Значение автоморфизма ϕ_m на элементе a равно элементу b.

Предложение 3.2.4. *Пусть k — простое число, которое либо не равняется ни одному из членов последовательности P, либо равняется лишь конечному числу членов этой последовательности. Тогда предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является k-листным накрывающим отображением.

Доказательство. По предположению существует натуральное число l, такое, что $k \neq p_n$ для всех $n \geqslant l$. Наименьшее такое число l обозначим через m.

Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть $m = 1$, то есть, простое число k не является членом последовательности P.

В этом случае каждый член p_n последовательности P взаимно прост с числом k. Рассмотрим гомоморфизм ϕ_{p_n}, который является обратным к автоморфизму групп

$$\psi_{p_n} : \sqrt[k]{1} \longrightarrow \sqrt[k]{1} : z \longmapsto z^{p_n}.$$

Тогда для каждой точки $z \in \mathbb{S}^1$ выполняется равенство

$$(\phi_{p_n}(z))^{p_n} = z.$$

Для каждого корня k-ой степени из единицы ξ_k^j, где $j \in \overline{k}$, с помощью указанных выше автоморфизмов построим элемент

$$(\xi_k^j, \phi_{p_1}(\xi_k^j), \phi_{p_2} \circ \phi_{p_1}(\xi_k^j), \ldots).$$

Легко видеть, что он принадлежит полному прообразу $(h_P^k)^{-1}(e)$. При этом ясно, что мы получаем k различных элементов множества $(h_P^k)^{-1}(e)$. Следовательно, с одной стороны, имеет место неравенство

$$\operatorname{card}(h_P^k)^{-1}(e) \geqslant k.$$

Но, с другой стороны, в силу предложения 3.2.1, справедливо обратное неравенство

$$\operatorname{card}(h_P^k)^{-1}(e) \leqslant k.$$

Делаем вывод, что в рассматриваемом случае предельное отображение

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является k-листным накрывающим отображением.

Второй случай. Пусть $m > 1$. Рассмотрим последовательность простых чисел

$$Q = (p_m, p_{m+1}, \ldots),$$

которая эквивалента последовательности P. Тогда, как отмечалось в §3.1, существует изоморфизм топологических групп

$$\rho : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_Q.$$

Заметим, нетрудно видеть, что в качестве указанного изоморфизма можно взять левый сдвиг, задаваемый формулой

$$\rho((x_1, x_2, \ldots)) = (x_m, x_{m+1}, \ldots),$$

где $(x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma_P$.

Легко видеть, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_P \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "h_P^k"'] & \Sigma_Q \arrow[d, "h_Q^k"] \\
\Sigma_P \arrow[r, "\rho"] & \Sigma_Q
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

коммутативна, то есть, справедливо равенство отображений

$$\rho \circ h_P^k = h_Q^k \circ \rho.$$

Согласно первому случаю, предельное отображение h_Q^k является k-листным накрывающим отображением.

Гомоморфизм, обратный к изоморфизму ρ, обозначим через

$$\tau : \Sigma_Q \longrightarrow \Sigma_P.$$

Из коммутативности диаграммы (3.4) вытекают следующие равенства для полных прообразов:

$$
\begin{aligned}
(h_P^k)^{-1}(e) &= (h_P^k)^{-1}(\tau(e)) = \\
&= \tau((h_Q^k)^{-1}(e)).
\end{aligned}
$$

Но гомоморфизм τ инъективен, и имеет место равенство

$$\mathrm{card}(h_Q^k)^{-1}(e) = k.$$

Поэтому справедливо аналогичное равенство

$$\mathrm{card}(h_P^k)^{-1}(e) = k.$$

Следовательно, принимая во внимание предложение 3.2.1, делаем вывод о том, что предельное отображение h_P^k является k-листным накрывающим отображением. Что и требовалось доказать.

$\square$

Как отмечалось выше, теорема 3.2.1 вытекает очевидным образом из приведенных выше предложений. Из них также получаем следующее утверждение, которое содержится в [105, лемма 4.1].

Следствие 3.2.1. *Пусть* P *— произвольная последовательность простых чисел и* $k \in \mathbb{N}$. *Предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда каждый простой делитель числа k *встречается бесконечно много раз в последовательности* P.

С помощью несложных алгебраических и теоретико-числовых рассуждений можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 3.2.5. *Пусть* $P = (p_1, p_2, \ldots)$ *— произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число* $n \geqslant 2$. *Группа рациональных чисел* $\mathbb{Q}_P$ *является* n*-делимой тогда и только тогда, когда каждое простое число, являющееся делителем числа* n, *встречается бесконечно много раз в последовательности* P.

Следствием теоремы 3.2.1 и предложения 3.2.5 является

Теорема 3.2.2. *Пусть* P *— произвольная последовательность простых чисел и* $k \in \mathbb{N}$. *Предельное отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

является k*-листным накрывающим отображением* P*-адического соленоида* Σ_P *тогда и только тогда, когда у числа* k *нет простого делителя* q, *такого, что группа рациональных чисел* $\mathbb{Q}_P$ *является* q*-делимой .*

Используя аппроксимирующее семейство накрытий, построенное в §1.2, мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. *Пусть* P *— произвольная последовательность простых чисел и* $f : X \longrightarrow \Sigma_P$ *—* k*-листное связное накрывающее отображение на*

P-адический соленоид Σ_P, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда накрытие f изоморфно предельному отображению

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P.$$

Доказательство. Рассмотрим P-адический соленоид Σ_P в качестве предела обратного спектра:

$$\Sigma_P = \varprojlim \{\mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}.$$

В дальнейшем, для краткости, мы будем писать f_n вместо f_n^{n+1}.

Аппроксимация накрытия компактной связной группы, построенная в §1.2, доставляет следующие объекты и морфизмы.

Во-первых, имеется обратная последовательность

$$\{(X_n, e_n), \zeta_n, n \in \mathbb{N}\},$$

состоящая из связных локально линейно связных отмеченных пространств (X_n, e_n), $n \in \mathbb{N}$, и непрерывных отображений этих пространств

$$\zeta_n : X_{n+1} \longrightarrow X_n,$$

таких, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\zeta_n(e_{n+1}) = e_n.$$

Во-вторых, при этом существует последовательность непрерывных сюръективных отображений

$$\{\tau_n : X \longrightarrow X_n, n \in \mathbb{N}\}, \tag{3.5}$$

для которых при любых натуральных числах m и n, удовлетворяющих неравенству $n < m$, выполняется равенство

$$\tau_n = \zeta_n \circ \zeta_{n+1} \circ \ldots \circ \zeta_m \circ \tau_m.$$

В-третьих, имеется последовательность отображений

$$\{\eta_n : (X_n, e_n) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, 1), n \in \mathbb{N}\}, \tag{3.6}$$

являющаяся морфизмом между обратной последовательностью $\{(X_n, e_n),\, \zeta_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ и последовательностью (3.1) с $M = P$, доставляющей P-адический соленоид. Более того, каждое отображение η_n является k-листным накрывающим отображением, таким, что

$$\eta_n(e_n) = 1.$$

При этом следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, "\tau_n"'] \arrow[drr, "\tau_{n+1}"] & & \\
(X_n, e_n) \arrow[dr, "\eta_n"] & & & & (X_{n+1}, e_{n+1}) \arrow[llll, "\zeta_n"'] \arrow[dl, "\eta_{n+1}"'] \\
 & (\mathbb{S}^1, 1) & & (\mathbb{S}^1, 1) \arrow[ll, "f_n"'] & \\
(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[ur, "h_n^k"'] \arrow[uu, dashed, "\phi_n"] & & & & (\mathbb{S}^1, 1) \arrow[llll, "f_n"'] \arrow[ul, "h_{n+1}^k"] \arrow[uu, dashed, "\phi_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим предельное отображение

$$\varprojlim\{\eta_n\} : \varprojlim\{(X_n, e_n), \zeta_n, n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \Sigma_P,$$

индуцируемое морфизмом обратных последовательностей (3.6).

Применяя свойство универсальности обратного предела $\varprojlim\{(X_n, e_n), \zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$ к последовательности отображений (3.5), мы получаем непрерывное отображение

$$\varrho : X \longrightarrow \varprojlim\{(X_n, e_n), \zeta_n\}.$$

Непосредственно проверяется, что ϱ является гомеоморфизмом. Более того, этот гомеоморфизм устанавливает изоморфизм между отображениями f и $\varprojlim\{\eta_n\}$ [171, с. 10].

Хорошо известные факты о поднятии отображений из классической теории накрывающих отображений линейно связных пространств (см., например, [22]) гарантируют, что для каждого отображения h_n^k и накрывающего отображения η_n существует гомеоморфизм отмеченных пространств

$$\phi_n : (\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow (X_n, e_n),$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & (X_n, e_n) \arrow[d, "\eta_n"] \\
(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[ur, dashed, "\phi_n"] \arrow[r, "h_n^k"] & (\mathbb{S}^1, 1)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, выполняется равенство отображений

$$\eta_n \circ \phi_n = h_n^k.$$

При этом справедливо равенство $\phi_n(1) = e_n$.

В силу коммутативности двух предыдущих диаграмм, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\eta_n \circ \phi_n \circ f_n &= h_n^k \circ f_n = \\
&= f_n \circ h_{n+1}^k = \\
&= f_n \circ \eta_{n+1} \circ \phi_{n+1} = \\
&= \eta_n \circ \zeta_n \circ \phi_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ввиду единственности поднятий, делаем вывод о выполнении равенства

$$\phi_n \circ f_n = \zeta_n \circ \phi_{n+1}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, мы имеем последовательность гомеоморфизмов, являющуюся морфизмом обратных последовательностей:

$$\{\phi_n; n \in \mathbb{N}\} : \{(S^1, 1), f_n, n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \{(X_n, e_n), \zeta_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Поэтому можем рассмотреть индуцируемое этим морфизмом предельное отображение

$$\varprojlim\{\phi_n; n \in \mathbb{N}\} : \Sigma_P \longrightarrow \varprojlim\{(X_n, e_n), \zeta_n; n \in \mathbb{N}\},$$

также являющееся гомеоморфизмом.

Вдобавок, очевидно, имеет место равенство отображений

$$\varprojlim\{\eta_n\} \circ \varprojlim\{\phi_n\} = h_P^k.$$

Таким образом, отображения $\varprojlim\{\eta_n\}$ и h_P^k, а вместе с ними, и отображения f и h_P^k являются изоморфными. Что и требовалось доказать.

$\square$

Далее мы суммируем результаты о конечнолистных связных накрывающих отображениях соленоидов в следующем утверждении.

Теорема 3.2.4. *Пусть P — произвольная последовательность простых чисел и $k \in \mathbb{N}$. Если у числа k имеется простой делитель, который встречается бесконечно много раз в последовательности P, то не существует k-листного связного накрывающего отображения на P-адический соленоид. Если же у числа k нет простого делителя, который встречается бесконечно много раз в последовательности P, то отображение*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P : g \longmapsto g^k$$

является k-листным накрывающим отображением; более того, каждое связное k-листное накрывающее отображение на Σ_P эквивалентно предельному отображению h_P^k.

3.3. Периодические точки отображений возведения в степень в P-адических соленоидах

В этом параграфе изучаются топологические свойства множеств периодических точек эндоморфизмов возведения в степень элементов P-адических соленоидов. Целью параграфа является доказательство критерия плотности множества периодических точек такого эндоморфизма. Он формулируется в теоретико-числовых терминах.

Сначала мы напомним определение периодической точки отображения топологического пространства.

Определение 3.3.1. *Пусть задано произвольное топологическое пространство X и произвольное отображение $f: X \longrightarrow X$. Для числа $n \in \mathbb{N}$, композиция*

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}} : X \longrightarrow X$$

называется n-ой итерацией отображения f и обозначается через f^n. При этом полагают, что $f^1 = f$.

Определение 3.3.2. *Точка $x \in X$ называется периодической точкой отображения $f: X \longrightarrow X$, если она является неподвижной точкой некоторой итерации отображения f, то есть, если существует число $n \in \mathbb{N}$, такое, что выполняется условие*

$$f^n(x) = x.$$

В этом случае мы будем называть число n периодом точки x при действии отображения f.

Пример 3.3.1. Пусть $P = (2, 2, \ldots)$. Рассмотрим отображение

$$h_P^2 : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$$

возведения в квадрат в диадическом соленоиде и точку

$$z = (\exp\frac{2\pi i}{3}, \exp\frac{4\pi i}{3}, \exp\frac{2\pi i}{3}, \exp\frac{4\pi i}{3}, \ldots).$$

Очевидно, что z является периодической точкой отображения h_P^2 с периодом 2.

Теперь мы займемся изучением вопроса о плотности множеств периодических точек отображений h_P^k. Сразу отметим, что для всякой последовательности простых чисел P, отображение h_P^1 является тождественным на Σ_P, то есть, множество его неподвижных, а, значит, и периодических точек совпадает со всем пространством Σ_P. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что натуральное число $k \geqslant 2$. Для изучения свойств множеств периодических точек нам, вместе с последовательностью простых чисел P, удобно ввести в рассмотрение множество простых чисел

$$S(P) \subset \mathbb{N},$$

определяемое следующим образом.

Определение 3.3.3. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел. Тогда*

$$S(P) := \{\, q - \textit{простое число} \quad | \quad \exists m_q \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant m_q \Rightarrow q \neq p_n \}.$$

Иными словами, множество $S(P)$ состоит из всех простых чисел, каждое из которых либо не равняется ни одному члену последовательности P, либо равняется лишь конечному числу членов этой последовательности.

Ниже мы докажем три предложения, которые соответствуют следующим возможным случаям для мощности множества $S(P)$:

1) $S(P) = \varnothing$;

2) множество $S(P)$ бесконечно;

3) $S(P)$ — непустое конечное множество.

Предложение 3.3.1. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — последовательность простых чисел, такая, что $S(P) = \varnothing$, то есть, каждое простое число из множества $\mathbb{N}$ встречается бесконечно много раз в последовательности P. Тогда для каждого натурального числа $k \geq 2$ единичный элемент*

$e = (1, 1, \dots)$ *в P-адическом соленоиде является единственной периодической точкой отображения возведения в k-ую степень*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P : z \longmapsto z^k.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное число $k \geq 2$ и предположим, что точка

$$z = (z_1, z_2, \dots) \in \Sigma_P$$

является периодической для отображения h_P^k.

Тогда для некоторого числа $m \in \mathbb{N}$ имеем равенства

$$(h_P^k)^m(z) = h_P^{k^m}(z) = z.$$

Отсюда следует, что для каждого числа $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство

$$z_n^{k^m - 1} = 1, \tag{3.7}$$

где натуральное число $k^m \geq 2$.

Рассмотрим два случая.

Если $k^m = 2$, то из (3.7) сразу имеем требуемое равенство $z = e$.

Теперь пусть $k^m \geqslant 3$. Сначала зафиксируем произвольное число $n \in \mathbb{N}$. Затем выберем такое натуральное число l, удовлетворяющее неравенству $l > n$, что произведение

$$p_n p_{n+1} \cdots p_{l-1}$$

членов последовательности P является кратным числом для числа $k^m - 1$. В этом случае имеем равенства

$$z_n = f_n^l(z_l) = z_l^{p_n p_{n+1} \cdots p_{l-1}} = 1. \tag{3.8}$$

В силу произвольности выбора числа $n \in \mathbb{N}$, мы получаем требуемое равенство $z = e$. $\square$

Прежде чем перейти к следующему предложению, напомним формулировку классической теоремы Ферма — Эйлера о сравнениях.

Теорема Ферма — Эйлера. *Пусть натуральные числа* a *и* m *взаимно просты. Тогда имеет место сравнение*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Здесь через $\varphi(m)$ обозначено значение функции Эйлера на m. Напомним как задается эта функция на множестве натуральных чисел:

- $\varphi(1) := 1;$
- если $m > 1$ и его каноническое разложение имеет вид

$$m = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \ldots q_n^{l_n},$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — простые числа, а числа $n, l_1, l_2, \ldots, l_n \in \mathbb{N}$, то

$$\varphi(m) := q_1^{l_1-1} q_2^{l_2-1} \ldots q_n^{l_n-1} (q_1 - 1)(q_2 - 1) \ldots (q_n - 1).$$

Предложение 3.3.2. *Пусть* $P = (p_1, p_2, \ldots)$ *— последовательность простых чисел, такая, что множество* $S(P)$ *бесконечно. Тогда для каждого натурального числа* $k \geqslant 2$ *множество периодических точек отображения возведения в* k*-ую степень*

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P : z \longmapsto z^k$$

плотно в P*-адическом соленоиде* Σ_P*.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное число $k \geqslant 1$.

Поскольку множество $S(P)$ бесконечно, то мы можем выбрать простое число $q \in S(P)$, такое, что выполняется неравенство

$$q > k. \tag{3.9}$$

Для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим n-ую проекцию

$$\pi_n : \Sigma_P \longrightarrow \mathbb{S}^1 : (z_1, z_2, \ldots) \longmapsto z_n$$

обратной последовательности (3.1) с $M = P$, пределом которой является P-адический соленоид Σ_P.

Пусть U — произвольное открытое множество из стандартной базы топологии соленоида Σ_P. Это означает, что имеет место представление

$$U = \pi_l^{-1}(V_l)$$

для некоторого числа $l \in \mathbb{N}$ и некоторого открытого подмножества V_l единичной окружности $\mathbb{S}^1$.

Напомним, что для каждого числа $n \in \mathbb{N}$, такого, что $n \geqslant l$, проекции π_n и π_l удовлетворяют соотношению

$$\pi_l = f_l^n \circ \pi_n.$$

Следовательно, для каждого числа $n \geqslant l$, справедливы равенства множеств

$$U = \pi_l^{-1}(V_l) = \pi_n^{-1}(V_n),$$

где V_n — открытое подмножество в единичной окружности $\mathbb{S}^1$, определяемое соотношением

$$V_n = (f_l^n)^{-1}(V_l).$$

Так как $q \in S(P)$, то мы можем выбрать число $n \geqslant l$, такое, что

$$p_j \neq q \tag{3.10}$$

для всех индексов $j \geq n$. Зафиксируем такое число n.

Далее выберем натуральное число m, для которого выполняется следующее условие:

$$\text{существует точка} \quad z_n \in V_n, \quad \text{такая, что} \quad z_n^{q^m} = 1. \tag{3.11}$$

Заметим, что, ввиду выполнения неравенства (3.10), для каждого индекса $j \geqslant n$ натуральные числа p_j и q^m взаимно просты.

Рассмотрим автоморфизм группы корней из единицы степени q^m

$$\psi_{p_j}: \sqrt[q^m]{1} \longrightarrow \sqrt[q^m]{1} : z \longmapsto z^{p_j}$$

и обратный к нему автоморфизм ϕ_{p_j}. В силу их определений, имеем равенство

$$(\phi_{p_j}(z))^{p_j} = z \tag{3.12}$$

для каждого комплексного числа $z \in \sqrt[q^m]{1}$.

Введем в рассмотрение последовательность

$$\zeta = (z_n^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}, \ldots, z_n^{p_{n-1}}, z_n, \phi_{p_n}(z_n), \phi_{p_{n+1}} \circ \phi_{p_n}(z_n), \ldots).$$

Учитывая (3.12), мы заключаем, что ζ является элементом соленоида Σ_P. Более того, в силу условия (3.11), имеем соотношение

$$\zeta \in U. \tag{3.13}$$

Мы утверждаем, что ζ является периодической точкой для предельного отображения h_P^k.

Действительно, так как каждый член последовательности ζ представляет собой корень из единицы степени q^m, то мы имеем равенство

$$\zeta^{q^m} = e. \tag{3.14}$$

Поскольку, в силу неравенства (3.9), числа k и q^m взаимно просты, то, по теореме Ферма — Эйлера, справедливо сравнение

$$k^{q^{m-1}(q-1)} \equiv 1 \pmod{q^m}.$$

Следовательно, ввиду (3.14), имеем равенство

$$\zeta^{k^{q^{m-1}(q-1)}-1} = e. \tag{3.15}$$

Из определения отображения h_P^k и соотношения (3.15) мы получаем следующие равенства:

$$(h_P^k)^{q^{m-1}(q-1)}(\zeta) = \zeta^{k^{q^{m-1}(q-1)}} = \zeta.$$

Таким образом, показано, что ζ является периодической точкой отображения h_P^k с периодом равным числу $q^{m-1}(q-1)$.

Наконец, принимая во внимание соотношение (3.13), а также тот факт, что множество U из базы топологии P-адического соленоида было выбрано произвольным образом, мы делаем вывод о завершении доказательства предложения. $\square$

Предложение 3.3.3. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — последовательность простых чисел, такая, что множество $S(P)$ непусто и конечно. Пусть $k \geqslant 2$.*

Если число k кратно произведению всех простых чисел, входящих в множество $S(P)$, то единичный элемент e в P-адическом соленоиде является единственной периодической точкой отображения возведения в k-ую степень

$$h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P : z \longmapsto z^k.$$

Если же найдется простое число из множества $S(P)$, которое не является делителем числа k, то множество всех периодических точек отображения h_P^k плотно в P-адическом соленоиде Σ_P.

Доказательство. Положим, что

$$S(P) = \{q_1, \ldots, q_t\},$$

где $t \in \mathbb{N}$.

Итак, пусть число k кратно произведению $q_1 \cdot \ldots \cdot q_t$.

Предположим, что последовательность комплексных чисел

$$z = (z_1, z_2, \ldots) \in \Sigma_P$$

является периодической точкой с периодом $m \in \mathbb{N}$ под действием предельного отображения h_P^k. Тогда, для каждого числа $n \in \mathbb{N}$, имеем равенство

$$z_n^{k^m - 1} = 1,$$

где натуральное число $k^m \geqslant 2$.

Ниже рассмотрим два случая.

Если $k^m = 2$, то немедленно получаем требуемое равенство $z = e$.

Если же $k^m \geqslant 3$, то мы возьмем число $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее следующему условию:

$$p_j \notin S(P) \quad \text{для всех} \quad j \geqslant n. \tag{3.16}$$

Ясно, что для каждого числа $q_j \in S(P)$, где $j \in \bar{t}$, число $k^m - 1$ не делится на простое число q_j. Следовательно, каждый простой делитель числа $k^m - 1$ равен бесконечному числу членов последовательности P.

Далее, выбираем число l, удовлетворяющее неравенству $l > n$, такое, что произведение чисел

$$p_n p_{n+1} \cdots p_{l-1}$$

кратно числу $k^m - 1$. Тогда, как в (3.8), имеем равенство $z_n = 1$. Отсюда, для каждого числа $l \leqslant n$, вытекает равенство

$$z_l = f_l^n(z_n) = 1.$$

Поскольку это справедливо для каждого числа n, удовлетворяющего условию (3.16), мы получаем равенство $z = e$.

Теперь предположим, что число $k > 1$ не делится на некоторое простое число q из множества $S(P)$. Тогда любая степень q и k взаимно просты. Повторяя аргументы из доказательства предложения 3.3.2 для этих k и q, мы убеждаемся, что множество периодических точек отображения h_P^k плотно в соленоиде Σ_P. □

Предложения 3.3.1, 3.3.2 и 3.3.3 позволяют доказать критерий плотности множеств периодических точек отображений возведения в степень в P-адических соленоидах.

Теорема 3.3.1. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Для того, чтобы* *множество периодических точек отображения возведения в степень k в P-адическом соленоиде было плотным необходимо и достаточно, чтобы существовало простое число, которое не встречается бесконечно много раз в последовательности P и не является делителем числа k.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество периодических точек плотно. Тогда, по предложению 3.3.1, множество точек $S(P)$ не является пустым.

Если множество $S(P)$ бесконечно, то, очевидно, простое число, удовлетворяющее требуемым двум условиям, существует.

Если $S(P)$ является непустым конечным множеством, то рассмотрим две возможности.

Случай, когда число k является кратным произведению всех простых чисел, входящих в множество $S(P)$, не имеет места. Иначе, по предложению 3.3.3, единица P-адического соленоида является единственной периодической точкой отображения возведения в степень k. Получаем противоречие.

Получается, что k не является кратным числом для произведения всех простых чисел, входящих в множество $S(P)$. Таким образом, искомое простое число существует.

Достаточность. Пусть существует простое число, удовлетворяющее двум свойствам из формулировки теоремы. Тогда множество $S(P)$ непусто.

В зависимости от бесконечности или конечности множества $S(P)$ остается применить соответственно предложение 3.3.2 или предложение 3.3.3 .

$\square$

3.4. Обобщенные средние на соленоидах

Этот параграф посвящен вопросу о существовании обобщенных средних на P-адических соленоидах. Наше изложение начнем с примеров обобщенных средних на диадическом соленоиде.

Пример 3.4.1. Рассмотрим отображение на декартовом квадрате диадического соленоида $\Sigma_{(2,2,\ldots)}$:

$$\mu : \Sigma_{(2,2,\ldots)} \times \Sigma_{(2,2,\ldots)} \longrightarrow \Sigma_{(2,2,\ldots)},$$

где для произвольных двух элементов

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \ldots) \in \Sigma_{(2,2,\ldots)}$$

значение μ на паре (x, y) задается формулой

$$\mu(x, y) = (x_2 y_2, x_3 y_3, \ldots).$$

Легко видеть, что отображение μ является 2-средним, или просто средним, для диадического соленоида.

Пример 3.4.2. Используя среднее μ из предыдущего примера, рассмотрим отображение

$$\nu : \Sigma_{(2,2,\ldots)} \times \Sigma_{(2,2,\ldots)} \times \Sigma_{(2,2,\ldots)} \times \Sigma_{(2,2,\ldots)} \longrightarrow \Sigma_{(2,2,\ldots)},$$

где для произвольных четырех элементов $x, y, z, w \in \Sigma_{(2,2,\ldots)}$ значение ν задается формулой

$$\nu(x, y, z, w) = \mu(\mu(x, y), \mu(z, w)).$$

Очевидно, отображение ν является 4-средним для диадического соленоида.

Как и в предыдущих параграфах, $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел. Вместе с P-адическим соленоидом Σ_P рассмотрим дискретную аддитивную группу рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$, которая изоморфна группе характеров $\widehat{\Sigma_P}$ соленоида.

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы 3.4.1. Ее доказательство будет основано на методе из статьи Крупского [104] и рассуждениях из §3.2 диссертации. Отметим, что другое доказательство теоремы 3.4.1 получается с использованием критерия Кислинга (теорема 1.1.1) и предложения 3.2.5.

Теорема 3.4.1. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует*

n-среднее на P-адическом соленоиде Σ_P в том и только том случае, когда каждый простой делитель числа n встречается бесконечно много раз в последовательности P.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3.4.1, мы напомним хорошо известный факт о том, что экспоненциальное накрывающее отображение из пространства действительных чисел $\mathbb{R}$ на единичную окружность $\mathbb{S}^1$ индуцирует инъективный непрерывный гомоморфизм

$$\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \Sigma_P,$$

задаваемый формулой

$$\theta(\alpha) = (\exp(i2\pi\alpha), \exp(i\frac{2\pi\alpha}{p_1}), \exp(i\frac{2\pi\alpha}{p_1 p_2}), \ldots), \quad \alpha \in \mathbb{R}, i^2 = -1,$$

который не является топологическим вложением. При этом образ этого гомоморфизма $\theta(\mathbb{R})$ является компонентой линейной связности P - адического соленоида Σ_P, содержащей единичный элемент $e = (1, 1, \ldots,)$ (см., например, [112, §5]).

При доказательстве теоремы 3.4.1 нам понадобится следующий результат [127, следствие 2].

Теорема 3.4.2. ***(В. Шеффер)*** *Пусть G — компактная связная топологическая группа и пусть H — локально компактная абелева топологическая группа. Тогда каждое непрерывное отображение из G в H, которое сохраняет единичные элементы, то есть переводит единичный элемент группы G в единичный элемент группы H, гомотопно в точности одному непрерывному гомоморфизму из G в H. Более того, такая гомотопия может быть выбрана со свойством сохранения единичных элементов.*

Доказательство теоремы 3.4.1.

Необходимость. Предположим, что существует n-среднее ν на P-адическом соленоиде Σ_P. Пусть простое число $p \geqslant 2$ является делителем числа n и пусть при этом имеет место факторизация $n = ps$, где s — некоторое натуральное число.

Из определения среднего на топологическом пространстве немедленно следует, что отображение

$$\mu : \Sigma_P \times \Sigma_P \times \ldots \times \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P,$$

заданное на декартовом произведении p экземпляров Σ_P формулой

$$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \nu(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \Sigma_P$ и набор $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ в качестве аргументов n-среднего ν повторяется в точности s раз, является p-средним на соленоиде Σ_P.

Поскольку P-адический соленоид Σ_P является компактной связной абелевой группой, то такими же свойствами обладает декартово произведение p экземпляров Σ_P.

Так как p-среднее μ сохраняет единичные элементы групп $\Sigma_P \times \Sigma_P \times \ldots \times \Sigma_P$ и Σ_P, то есть, справедливо равенство

$$\mu(e, e, \ldots, e) \ = \ e,$$

то, согласно теореме 3.4.2, существует непрерывный гомоморфизм топологических групп

$$\phi : \Sigma_P \times \Sigma_P \times \ldots \times \Sigma_P \to \Sigma_P$$

из декартова произведения p множителей, который гомотопен p-среднему μ.

Зафиксируем произвольный элемент $g \in \Sigma_P$ и обозначим через Γ компоненту линейной связности пространства Σ_P, в которой лежит этот элемент.

В силу гомотопности непрерывных отображений μ и ϕ, точки $g = \mu(g, g, \ldots, g)$ и $\phi(g, g, \ldots, g)$ лежат в одной и той же компоненте линейной связности Γ пространства Σ_P. Поэтому из равенств

$$\phi(g, g, \ldots, g) = \phi(g, e, \ldots, e)\phi(e, g, e, \ldots, e) \ldots \phi(e, \ldots, e, g),$$

$$\mu(g, e, \ldots, e)\mu(e, g, e, \ldots, e) \ldots \mu(e, \ldots, e, g) = (\mu(g, e, \ldots, e))^p,$$

гомотопности отображений μ и ϕ и непрерывности отображения

$$m : \Sigma_P \times \Sigma_P \times \ldots \times \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P,$$

из произведения p копий группы Σ_P, задаваемого формулой

$$m(x_1, x_2, \ldots, x_p) \ = \ x_1 x_2 \ldots x_p,$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \Sigma_P \times \Sigma_P \times \ldots \times \Sigma_P$, следует включение

$$(\mu(g, e, \ldots, e))^p \in \Gamma.$$

Оно, с помощью аналогичных аргументов, гарантирует соотношение

$$\phi(g^p, e, \ldots, e) \in \ \Gamma,$$

которое, в свою очередь, используя гомотопность отображений ϕ и μ, позволяет нам заключить, что

$$\mu(g^p, e, \ldots, e) \in \Gamma.$$

Таким образом, в силу произвольности выбора g, мы делаем вывод, что для каждого элемента $g \in \ \Sigma_P$ обе точки g и $\mu(g^p, e, \ldots, e)$ лежат в одной и той же компоненте линейной связности пространства Σ_P.

Для того, чтобы получить противоречие, предположим, что найдется число $k \in \mathbb{N}$, такое, что соотношение

$$p \neq p_j \tag{3.17}$$

выполняется для каждого индекса j, удовлетворяющего неравенству $j \geqslant k$.

Поскольку последовательность простых чисел

$$(p_k, p_{k+1}, \ldots)$$

получается из последовательности P удалением конечного числа первых членов, то имеет место изоморфизм топологических групп

$$\Sigma_P \ \backsimeq \ \Sigma_{(p_k, p_{k+1}, \ldots)}.$$

Поэтому в дальнейшем мы вправе предполагать, что в последовательности простых чисел P для каждого индекса $j \in \mathbb{N}$ выполняется условие (3.17).

Теперь (см. первый случай в доказательстве предложения 3.2.4) построим элемент $g \in \Sigma_P$, такой, что

$$g^p = e. \tag{3.18}$$

Как и ранее в этой главе, мультипликативная циклическая группа всех корней из единицы степени p будет обозначаться через $\sqrt[p]{1}$. Для ее порождающего элемента используем обозначение

$$\xi = \exp(i\frac{2\pi}{p}).$$

Для каждого члена p_j последовательности простых чисел P рассмотрим гомоморфизм

$$\psi_{p_j} : \sqrt[p]{1} \longrightarrow \sqrt[p]{1} : z \longmapsto z^{p_j},$$

где комплексное число $z \in \sqrt[p]{1}$.

Так как числа p и p_j взаимно просты, то, по лемме 3.2.2, отображение ψ_{p_j} является биективным. Как и в предыдущем параграфе, обозначим через

$$\phi_{p_j} : \sqrt[p]{1} \longrightarrow \sqrt[p]{1}$$

отображение, обратное к ψ_{p_j}. Тогда для каждого корня из единицы $z \in \sqrt[p]{1}$ справедливо равенство

$$(\phi_{p_j}(z))^{p_j} = z.$$

Поэтому последовательность комплексных чисел

$$g = (\xi, \phi_{p_1}(\xi), \phi_{p_2} \circ \phi_{p_1}(\xi), \ldots)$$

является элементом соленоида Σ_P. Заметим, что каждый член этой последовательности является элементом группы $\sqrt[p]{1}$, отличным от единицы. При этом выполняется равенство (3.18). Следовательно, имеет место соотношение

$$\mu(g^p, e, \ldots, e) \in \theta(\mathbb{R}).$$

Но, с другой стороны, ясно,что выполняется условие

$$g \notin \theta(\mathbb{R}).$$

Действительно, иначе $g = \theta(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, и существует целое число s, такое, что

$$\alpha = \frac{1}{p} + s.$$

Заметим, что при $l \longrightarrow +\infty$ выполняется свойство

$$\exp\left(i\frac{2\pi\alpha}{p_1p_2\cdots p_l}\right) \longrightarrow 1,$$

которое неверно для членов последовательности g.

Таким образом, точки g и $\mu(g^p, e, \ldots, e)$ принадлежат различным компонентам линейной связности пространства Σ_P.

Получили противоречие с наблюдением, сделанным ранее, о том, что любой элемент g лежит в одной и той же компоненте линейной связности с элементом $\mu(g^p, e, \ldots, e)$.

Тем самым необходимость условия для существования n-среднего на P-адическом соленоиде доказана.

Достаточность. Рассмотрим последовательность натуральных чисел

$$M = (m_1, m_2, \ldots),$$

такую, что для каждого индекса $j \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $m_j = np_j$.

Поскольку каждое простое число, являющееся делителем числа n, встречается бесконечно много раз в последовательности P, то нетрудно видеть, что имеет место равенство для групп рациональных чисел

$$\mathbb{Q}_P = \mathbb{Q}_M.$$

Так как группы $\mathbb{Q}_P$ и $\mathbb{Q}_M$ изоморфны группам характеров $\widehat{\Sigma}_P$ и $\widehat{\Sigma}_M$ соответственно, то имеем изоморфизм топологических групп:

$$\Sigma_P \backsimeq \Sigma_M.$$

Поэтому далее мы вправе работать с соленоидом Σ_M.

Определим отображение μ из декартово произведения n экземпляров соленоида Σ_M

$$\mu : \Sigma_M \times \Sigma_M \times \ldots \times \Sigma_M \to \Sigma_M,$$

задав его формулой

$$\mu((z_{11}, z_{12}, \ldots), (z_{21}, z_{22}, \ldots), \ldots, (z_{n1}, z_{n2}, \ldots)) =$$

$$= ((z_{12}z_{22} \ldots z_{n2})^{p_1}, (z_{13}z_{23} \ldots z_{n3})^{p_2}, \ldots).$$

Нетрудно непосредственно проверить, что μ является n-средним на соленоиде Σ_M. На этом доказательство теоремы завершено. □

Из теоремы 3.4.1 и теоремы 3.2.4 немедленно вытекает следующая

Теорема 3.4.3. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует n-среднее на P-адическом соленоиде Σ_P в том и только том случае, когда для каждого простого делителя p числа n не существуют p-листные связные накрывающие отображения на соленоид Σ_P.*

Из теоремы 3.4.1, принимая во внимание факты об изоморфизмах соленоидов и их групп характеров, получаем следующий результат.

Теорема 3.4.4. *Пусть $M = (m_1, m_2, \ldots)$ — произвольная последовательность натуральных чисел больше единицы и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует n-среднее на соленоиде Σ_M в том и только том случае, когда каждый простой делитель числа n делит бесконечно много членов последовательности M.*

Утверждение этой теоремы было доказано Крупским [104, теорема 2] для случая 2-средних на соленоиде Σ_M. Доказательство для произвольных n-средних дается в статье автора диссертации [148, теорема 1].

Очевидно, можно сформулировать критерий существования обобщенных средних на соленоиде Σ_M в терминах конечнолистных накрытий, аналогичный теореме 3.4.3 (см. [148, теорема 3]).

Глава 4.

Полугруппы и группы в C^*-алгебрах

Основной предмет данной главы — редуцированные полугрупповые C^*-алгебры для полугрупп рациональных чисел, называемые также алгебрами Теплица. Мы рассматриваем индуктивные последовательности, составленные из счетного числа копий одной и той же алгебры Теплица для полугруппы целых неотрицательных чисел и их $*$-гомоморфизмов. Индуктивными пределами таких последовательностей являются редуцированные полугрупповые C^*-алгебры для подполугрупп в группах характеров P-адических соленоидов.

Как известно, свойства объектов и морфизмов категорий алгебры и топологии имеют соответствующие аналоги в категориях банаховых алгебр, и наоборот (см., например, [23, 29]). В этой главе нами изучаются предельные $*$-эндоморфизмы полугрупповых C^*-алгебр и доказываются свойства этих морфизмов, которые могут рассматриваться как операторно-алгебраические аналоги свойств гомоморфизмов групп рациональных чисел и накрывающих отображений P-адических соленоидов из главы 3.

В конце данной главы структура топологической группы, которой наделена общая линейная группа, применяется для решения одной задачи аппроксимации конечного набора элементов в банаховой алгебре матриц над полем комплексных чисел.

Настоящая глава состоит из четырех параграфов. Ее содержание по параграфам приводится ниже.

В §4.1 вводятся в рассмотрение объекты, с которыми нам предстоит работать в дальнейшем. Это индуктивные последовательности алгебр Теплица со связующими инъективными $*$-гомоморфизмами, задаваемыми произвольными последовательностями натуральных чисел. Для построения индуктивных последовательностей алгебр Теплица сначала собираются необходимые сведения. Мы напоминаем определения и факты о редуцированных полугрупповых C^*-алгебрах для полугрупп рациональных чисел, а также об индуктивных последовательностях и их пределах в категориях C^*-алгебр и групп.

Следующие два параграфа посвящены полугрупповым C^*-алгебрам, которые порождены изометрическими представлениями аддитивных полугрупп неотрицательных рациональных чисел.

В §4.2 мы показываем, что эти алгебры можно рассматривать в качестве индуктивных пределов индуктивных последовательностей алгебр Теплица со связующими гомоморфизмами, задаваемыми последовательностями простых чисел, то есть, с точностью до изоморфизма, они являются пределами указанных индуктивных последовательностей.

В §4.3 нами изучаются предельные эндоморфизмы полугрупповых C^*-алгебр. Под предельным эндоморфизмом понимается $*$-гомоморфизм полугрупповой C^*-алгебры, индуцируемый морфизмом между двумя копиями одной и той же индуктивной последовательности, пределом которой служит эта алгебра. В алгебраических, теоретико-числовых и функциональных терминах нами доказываются критерии того, когда предельные эндоморфизмы являются $*$-автоморфизмами рассматриваемых полугрупповых C^*-алгебр.

В §4.4 содержится приложение свойств топологической группы обратимых матриц к задаче об аппроксимации конечного набора элементов нормированной полной матричной алгебры обратимыми матрицами с дополнительными требованиями на спектры матриц.

4.1. Сведения об алгебрах и индуктивных последовательностях

На протяжении первых трех параграфов данной главы через $P = (p_1, p_2, \ldots)$ обозначается фиксированная последовательность, составленная из произвольная простых чисел (единица не включается в множество простых чисел). Вместе с этой последовательностью мы рассматриваем аддитивную группу рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$ (см. (3.2)), изоморфную дискретной группе характеров P-адического соленоида.

Всюду далее пусть Γ обозначает либо группу целых чисел $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Q}_P$. В группе Γ, упорядоченной естественным порядком, мы рассматриваем положительный конус

$$\Gamma^+ := \Gamma \cap [0; +\infty).$$

Как обычно, комплексное гильбертово пространство всех квадратично суммируемых комплекснозначных функций на аддитивной полугруппе Γ^+ обозначается символом

$$l^2(\Gamma^+) := \left\{ f : \Gamma^+ \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{a \in \Gamma^+} |f(a)|^2 < +\infty \right\}. \tag{4.1}$$

Напомним, что для элементов f и h этого пространства их скалярное произведение задается формулой

$$\langle f, h \rangle = \sum_{a \in \Gamma^+} f(a)\overline{h(a)}.$$

Канонический ортонормированный базис в комплексном гильбертовом пространстве $l^2(\Gamma^+)$ будем обозначать через

$$\left\{ e_a \;\middle|\; a \in \Gamma^+ \right\}. \tag{4.2}$$

Напомним, что для каждого элемента $a \in \Gamma^+$ комплекснозначная функция e_a задается на полугруппе Γ^+ формулой

$$e_a(b) = \delta_{a,b},$$

где $b \in \Gamma^+$, а $\delta_{a,b}$ — символ Кронекера, то есть,

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 0, & \text{если } a \neq b; \\ 1, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим C^*-алгебру всех ограниченных линейных операторов $B(l^2(\Gamma^+))$ на гильбертовом пространстве $l^2(\Gamma^+)$. Для каждого элемента $a \in \Gamma^+$ определим изометрический оператор сдвига $V_a \in B(l^2(\Gamma^+))$, задавая его значения на векторах базиса (4.2) формулой

$$V_a(e_b) := e_{a+b} \tag{4.3}$$

при любом $b \in \Gamma^+$.

Определение 4.1.1. *Пусть Γ^+ — полугруппа всех неотрицательных чисел в группе Γ. Унитальная C^*-подалгебра в банаховой алгебре всех ограниченных линейных операторов $B(l^2(\Gamma^+))$ с естественной инволюцией, порожденная множеством изометрий*

$$\left\{ V_a \,|\, a \in \Gamma^+ \right\}, \tag{4.4}$$

обозначается через $C_r^*(\Gamma^+)$ и называется редуцированной полугрупповой C^*-алгеброй для полугруппы Γ^+, или алгеброй Теплица, порожденной полугруппой Γ^+. В случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}$ мы обозначаем алгебру $C_r^*(\mathbb{Z}^+)$ также через $\mathcal{T}$ и используем символы T и T^n вместо V_1 и V_n соответственно, где $n \in \mathbb{Z}^+$.

В C^*-алгебре $C_r^*(\Gamma^+)$ рассмотрим плотную $*$-подалгебру $\mathcal{P}(\Gamma^+)$, порождённую множеством изометрий (4.4). Инволютивная алгебра $\mathcal{P}(\Gamma^+)$ устроена довольно-таки просто. Легко видеть, что каждый моном в ней может быть записан в виде оператора $V_a V_b^*$, где $(a, b) \in \Gamma^+ \times \Gamma^+$, и что множество мономов

$$\{ \; V_a V_b^* \;|\; (a, b) \in \Gamma^+ \times \Gamma^+ \; \}$$

линейно независимо. Ниже, в том числе, в следующем параграфе при доказательстве предложения 4.2.1, нам понадобится следующее хорошо известное утверждение, доказательство которого представляет собой непосредственную проверку. Она использует очевидные действия операторов сдвига на векторах канонического базиса (4.2) гильбертова пространства квадратично суммируемых функций (4.1).

Лемма 4.1.1. *Для любого оператора* $Q \in \mathcal{P}(\Gamma^+)$ *существуют числа* $\lambda_i \in \mathbb{C}$ *и различные пары чисел* $(r_i, q_i) \in \Gamma^+ \times \Gamma^+$, $i \in \overline{n}$, *такие, что имеет место представление*

$$Q = \lambda_1 V_{r_1} V_{q_1}^* + \ldots + \lambda_n V_{r_n} V_{q_n}^*. \tag{4.5}$$

Более того, с точностью до порядка слагаемых, такое представление с нетривиальными коэффициентами единственно для каждого элемента $*$*-алгебры* $\mathcal{P}(\Gamma^+)$.

Определение 4.1.2. *Пусть* Γ^+ — *полугруппа всех неотрицательных чисел в группе* Γ, *а* B — *произвольная унитальная* C^**-алгебра. Отображение*

$$\rho : \Gamma^+ \longrightarrow B : a \longmapsto W_a$$

называется изометрическим гомоморфизмом или представлением, если для всех элементов $a, b \in \Gamma^+$ *выполняются следующие соотношения:*

$$W_a^* W_a = 1, \tag{4.6}$$

$$W_{a+b} = W_a W_b. \tag{4.7}$$

Очевидно, что отображение

$$\pi : \Gamma^+ \longrightarrow C_r^*(\Gamma^+) : a \longmapsto V_a, \tag{4.8}$$

где V_a — изометрия, определяемая формулой (4.3), удовлетворяет соотношениям (4.6), (4.7), то есть, является изометрическим гомоморфизмом.

Известно, что изометрическим гомоморфизм (4.8) обладает следующим свойством универсальности.

Теорема 4.1.1. ***(Свойство универсальности изометрического гомоморфизма)*** *Пусть* Γ^+ — *полугруппа всех неотрицательных чисел в группе* Γ, π — *изометрический гомоморфизм (4.8), а* B — *произвольная унитальная* C^**-алгебра. Пусть задан произвольный изометрический гомоморфизм*

$$\rho : \Gamma^+ \longrightarrow B.$$

Тогда существует единственный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр

$$\rho^* : C_r^*(\Gamma^+) \longrightarrow B,$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \Gamma^+ \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ C_r^*(\Gamma^+) \arrow[rr, "\rho^*"] & & B \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, выполняется равенство гомоморфизмов $\rho^* \circ \pi = \rho$. Более того, если элемент $\rho(a)$ не является унитарным для каждого положительного числа a, то $*$-гомоморфизм ρ^* инъективен.

Доказательство этого свойства содержится в статье [116, теоремы 1.3, 2.9].

Как отмечалось во введении, в теории C^*-алгебр свойство универсальности гомоморфизма (4.8) для полугруппы $\Gamma^+ = \mathbb{Z}^+$, то есть, в случае алгебры Теплица $\mathcal{T}$, известно также как теорема Кобурна и формулируется следующим образом (см.,например, [23, теорема 3.5.18]).

Теорема 4.1.2. ***(Л. Кобурн)*** *Пусть V — изометрия в унитальной C^*-алгебре B. Тогда существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм*

$$\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow B,$$

такой,что $\varphi(T) = V$. Кроме того, если $VV^* \neq 1$, то φ изометричен.

На протяжении этого и следующих двух параграфов для гомоморфизма, определенного в теореме Кобурна, используем краткую запись

$$\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow B : T \longmapsto V.$$

Непосредственным следствием теоремы Кобурна является следующая лемма. В дальнейшем, инъективные $*$-гомоморфизмы, построенные в ней, будут составляющими элементами — связующими гомоморфизмами — в индуктивных последовательностях алгебр Теплица, определяемых последовательностями натуральных чисел. Поэтому мы представим доказательство этого утверждения из статьи [151], которое не использует теорему Кобурна. Отметим также, что идея доказательства леммы используется в статьях [143, 155] при построении инъективных $*$-гомоморфизмов полугрупповых C^*-алгебр. За необходимыми сведениями из теории операторов, в частности, о прямых суммах гильбертовых пространств и операторов на них, мы отсылаем читателя, например, к книгам [24, гл.1, §5], [97, гл.2].

Лемма 4.1.2. *Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр*

$$\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \mapsto T^n.$$

Более того, гомоморфизм φ изометричен.

Доказательство. Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$. Доказательство стандартно разбивается на три шага. На первом шаге мы определим $*$-гомоморфизм τ_0 на инволютивной алгебре $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$. На втором шаге покажем, что он изометричен. На третьем шаге, пользуясь плотностью $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$ в $\mathcal{T}$, мы продолжим его до изометричного изометрического $*$-гомоморфизма, определенного на всей алгебре Теплица $\mathcal{T}$.

Прежде, чем начать «шагать», напомним только, что сопряженным к оператору правого сдвига

$$T : l^2(\mathbb{Z}^+) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}^+) : e_n \longmapsto e_{n+1}$$

является оператор левого сдвига на $l^2(\mathbb{Z}^+)$, задаваемый формулой

$$T^*(e_l) = \begin{cases} e_{l-1}, & \text{если } l \geqslant 1; \\ 0, & \text{если } l = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что справедливо равенство $(T^*)^m = (T^m)^*$, где $m \in \mathbb{Z}^+$. Обозначим этот оператор символом T^{*m}.

Шаг 1. Воспользовавшись леммой 4.1.1 о представлении элементов алгебры $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$, мы рассмотрим унитальный $*$-гомоморфизм между инволютивными алгебрами

$$\tau_0 : \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+) \longrightarrow \mathcal{T},$$

который корректно задается формулой

$$\tau_0(Q(T, T^*)) = Q(T^n, T^{*n}),$$

где в левой части равенства взят произвольный элемент

$$Q(T, T^*) = \lambda_1 T^{l_1} T^{*m_1} + \ldots + \lambda_k T^{l_k} T^{*m_k}$$

алгебры $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}, l_i, m_i \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, k$. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$\tau_0(T) = T^n.$$

Шаг 2. То, что гомоморфизм τ_0 сохраняет норму, можно аргументировать следующим образом.

Для каждого $j = 0, 1, \ldots, n-1$ введем в рассмотрение гильбертово пространство последовательностей

$$H_j = \Big\{x \in l^2(\mathbb{Z}^+) : x = \sum_{l=0}^{+\infty} \lambda_{j+nl} e_{j+nl}\Big\},$$

являющееся подпространством в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^+)$. На нем определим оператор сдвига с помощью формулы

$$S_j : H_j \longrightarrow H_j : e_{j+nl} \mapsto e_{j+n(l+1)},$$

где $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Очевидным образом строится унитарный оператор в прямую сумму гильбертовых пространств

$$U : l^2(\mathbb{Z}^+) \longrightarrow \bigoplus_{j=0}^{n-1} H_j,$$

такой, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
l^2(\mathbb{Z}^+) \arrow[r, "p(T^n{,}T^{*n})"] \arrow[d, "U"'] & l^2(\mathbb{Z}^+) \arrow[d, "U"] \\
\bigoplus_{j=0}^{n-1} H_j \arrow[r, "\bigoplus\limits_{j=0}^{n-1} p(S_j{,}S_j^*)"] & \bigoplus_{j=0}^{n-1} H_j.
\end{tikzcd}
$$

коммутативна. Из операторного равенства

$$U \circ p(T^n, T^{*n}) = \bigoplus_{j=0}^{n-1} p(S_j, S_j^*) \circ U,$$

используя стандартные свойства операторов и их норм, мы получаем равенство

$$\|p(T^n, T^{*n})\| = \|p(S_0, S_0^*)\|. \tag{4.9}$$

Также легко строится унитарный оператор

$$W : H_0 \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}^+),$$

для которого коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
H_0 \arrow[r, "p(S_0{,}S_0^*)"] \arrow[d, "W"'] & H_0 \arrow[d, "W"] \\
l^2(\mathbb{Z}^+) \arrow[r, "p(T{,}T^*)"] & l^2(\mathbb{Z}^+).
\end{tikzcd}
$$

Из равенства для композиций операторов

$$p(T, T^*) \circ W = W \circ p(S_0, S_0^*)$$

вытекает равенство для норм операторов

$$\|p(T, T^*)\| = \|p(S_0, S_0^*)\|. \tag{4.10}$$

Равенства (4.9) и (4.10) немедленно доставляют равенство

$$\|p(T^n, T^{*n})\| = \|p(T, T^*)\|,$$

которое означает требуемую изометричность оператора τ_0.

Шаг 3. Теперь, в силу плотности инволютивной подалгебры $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$ в C^*-алгебре Теплица $\mathcal{T}$, мы можем продолжить τ_0 по непрерывности до изометрического $*$-гомоморфизма, определённого на всей алгебре $\mathcal{T}$.

Наконец, единственность $*$-гомоморфизма, указанного в формулировке леммы, ясна. □

Одним из главных инструментов в нашей последующей работе будут индуктивные, или прямые, последовательности. Мы будем иметь дело с такими последовательностями в двух категориях, а именно, в категории C^*-алгебр и их $*$-гомоморфизмов, а также в категории абелевых групп и их гомоморфизмов. В дальнейшем $\mathcal{C}$ обозначает одну из этих категорий. Ниже мы напомним определения индуктивной последовательности и ее предела в категории $\mathcal{C}$.

Определение 4.1.3. *Индуктивной, или прямой, последовательностью в категории $\mathcal{C}$ называется набор $\{A_n, \varphi_n\}$, состоящий из объектов A_n и морфизмов*

$$\varphi_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$$

категории $\mathcal{C}$, где индекс n пробегает множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Для записи этой индуктивной последовательности часто используется следующая диаграмма:

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \ldots \tag{4.11}$$

Для произвольных натуральных чисел m и n, удовлетворяющих неравенству $m < n$, рассматриваются морфизмы

$$\varphi_{m,n} : \varphi_{n-1} \circ \ldots \circ \varphi_{m+1} \circ \varphi_m : A_m \longrightarrow A_n. \tag{4.12}$$

Для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ полагают также, что эндоморфизм

$$\varphi_{n,n} : A_n \longrightarrow A_n \tag{4.13}$$

является тождественным. Очевидно, что в категории $\mathcal{C}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_l \arrow[rr, "\varphi_{l,n}"] \arrow[dr, "\varphi_{l,m}"'] & & A_n \\
& A_m \arrow[ur, "\varphi_{m,n}"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна для любых чисел $l, m, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих двойному неравенству $l \leqslant m \leqslant n$, то есть, $\varphi_{m,n} \circ \varphi_{l,m} = \varphi_{l,n}$.

Морфизмы(4.12) и (4.13) принято называть *связующими морфизмами* индуктивной последовательности (4.11).

Замечание 4.1.1. Аналогично определению обратной системы в какой-либо категории, задание индуктивной последовательности (4.11) в точности означает рассмотрение ковариантного функтора из категории, ассоциированной с множеством натуральных чисел с естественным отношением порядка. (см. замечание 1.1.1).

Определение 4.1.4. *Индуктивным, или прямым, пределом индуктивной последовательности (4.11) называется пара*

$$(A, \{\varphi_{n,\infty}\}),$$

состоящая из объекта A и последовательности морфизмов

$$\{\, \varphi_{n,\infty} : A_n \to A \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

категории $\mathcal{C}$, которые обладают следующим свойством универсальности:

1) *для любого числа* $n \in \mathbb{N}$ *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\varphi_{n,\infty}"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\varphi_{n+1,\infty}"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{4.14}$$

коммутативна, то есть, выполняется равенство морфизмов

$$\varphi_{n,\infty} = \varphi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n.$$

2) *для любого объекта* B *и любой последовательности морфизмов*

$$\{\, \psi_{n,\infty} : A_n \to B \,|\, n \in \mathbb{N} \,\} \tag{4.15}$$

категории $\mathcal{C}$, *таких, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\psi_{n,\infty}"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\psi_{n+1,\infty}"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{4.16}$$

коммутативна для каждого индекса $n \in \mathbb{N}$, *то есть, выполняется равенство морфизмов*

$$\psi_{n,\infty} \;=\; \psi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n, \tag{4.17}$$

в категории $\mathcal{C}$ *существует единственный морфизм*

$$\psi : A \longrightarrow B, \tag{4.18}$$

для которого при любом $n \in \mathbb{N}$ *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\varphi_{n,\infty}"'] \arrow[dr, "\psi_{n,\infty}"] & \\ A \arrow[rr, "\psi"] & & B, \end{tikzcd} \tag{4.19}$$

то есть, имеет место равенство морфизмов

$$\psi_{n,\infty} \;=\; \psi \circ \varphi_{n,\infty}. \tag{4.20}$$

Для обозначения индуктивного предела $(A, \{\varphi_{n,\infty}\})$ индуктивной последовательности $\{A_n, \varphi_n\}$, используется запись

$$(A, \{\varphi_{n,\infty}\}) = \varinjlim \{A_n, \varphi_n\}. \tag{4.21}$$

Часто просто сам объект A называют индуктивным пределом и обозначают символом из правой части равенства (4.21). Для объекта B из категории $\mathcal{C}$, который изоморфен пределу индуктивной последовательности $\{A_n, \varphi_n\}$, мы также будем использовать запись

$$B \backsimeq \varinjlim \{A_n, \varphi_n\}.$$

Заметим также, что для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $m \leqslant n$ из коммутативности диаграммы (4.16) и определений (4.12), (4.13) следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A_m \arrow[rr, "\varphi_{m,n}"] \arrow[dr, "\varphi_{m,\infty}"'] & & A_n \arrow[dl, "\varphi_{n,\infty}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

то есть, имеет место равенство морфизмов

$$\varphi_{m,\infty} \;=\; \varphi_{m,n} \circ \varphi_{n,\infty}.$$

Два индуктивных предела одной и той же последовательности (в любой категории, при условии их существования) изоморфны. Точнее говоря, если имеется два индуктивных предела $(A, \{\varphi_{n,\infty}\})$ и $(B, \{\psi_{n,\infty}\})$ одной и той же индуктивной последовательности (4.21) в категории $\mathcal{C}$, то существует в точности один изоморфизм $\psi : A \longrightarrow B$ в категории $\mathcal{C}$, для которого при любом выборе числа $n \in \mathbb{N}$ коммутативна диаграмма (4.19).

Что касается индуктивных пределов в категории C^*-алгебр справедливо следующее утверждение [122, предложение 6.2.4].

Предложение 4.1.1. ***(Индуктивные пределы C^*-алгебр)***

Для каждой индуктивной последовательности C^*-алгебр и $*$-гомоморфизмов $\{A_n, \varphi_n\}$ существует индуктивный предел $(A, \{\varphi_{n,\infty}\})$, обладающий следующими свойствами:

1) имеет место представление

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,\infty}(A_n)},$$

где замыкание берется в топологии нормы C^*-алгебры A;

2) при любом $n \in \mathbb{N}$ ядро $*$-гомоморфизма $\varphi_{n,\infty}$ представляется в виде

$$Ker(\varphi_{n,\infty}) = \left\{ a \in A_n \mid \lim_{x \to \infty} \|\varphi_{n,x}(a)\| = 0 \right\};$$

3) если B — C^*-алгебра и $\{\psi_{n,\infty}\}$ — семейство $*$-гомоморфизмов (4.15), удовлетворяющих равенству (4.17) при любом $n \in \mathbb{N}$, а ψ — единственный $*$-гомоморфизм (4.18), для которого выполняется (4.20) при каждом $n \in \mathbb{N}$, тогда справедливы следующие утверждения:

а) для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется включение

$$Ker(\varphi_{n,\infty}) \subset Ker(\psi_{n,\infty});$$

б) $*$-гомоморфизм ψ является инъективным тогда и только тогда, *когда при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеется включение*

$$Ker(\psi_{n,\infty}) \subset Ker(\varphi_{n,\infty});$$

в) $*$-гомоморфизм ψ является сюръективным тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_{n,\infty}(A_n)}.$$

Соответствующее утверждение о свойствах пределов индуктивных последовательностей в категории абелевых групп формулируется ниже.

Предложение 4.1.2. ***(Индуктивные пределы абелевых групп)***

Для каждой индуктивной последовательности абелевых групп и их гомоморфизмов $\{G_n, \varphi_n\}$ существует индуктивный предел $(G, \{\varphi_{n,\infty}\})$, обладающий следующими свойствами:

1) имеет место представление

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,\infty}(G_n);$$

2) при любом $n \in \mathbb{N}$ ядро гомоморфизма $\varphi_{n,\infty}$ представляется в виде

$$Ker(\varphi_{n,\infty}) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} Ker(\varphi_{n,m});$$

3) если B — абелева группа и $\{\psi_{n,\infty}\}$ — семейство гомоморфизмов групп (4.15), удовлетворяющих равенству (4.17) при любом $n \in \mathbb{N}$, а ψ — единственный гомоморфизм групп (4.18), для которого выполняется (4.20) при каждом $n \in \mathbb{N}$, тогда справедливы следующие утверждения:

а) гомоморфизм ψ является инъективным тогда и только тогда, когда при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$Ker(\psi_{n,\infty}) = Ker(\varphi_{n,\infty});$$

б) гомоморфизм ψ является сюрьективным тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_{n,\infty}(G_n).$$

Приведем два примера индуктивных последовательностей и их пределов в категориях C^*-алгебр и абелевых групп.

Пример 4.1.1. Рассмотрим произвольную C^*-алгебру A. Пусть $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — возрастающая последовательность ее C^*-подалгебр. Тогда у нас имеется индуктивная последовательность (4.11), в которой связующими $*$-гомоморфизмами $\varphi_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ служат естественные вложения C^*-подалгебр.

Положим

$$B := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n},$$

и пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $*$-гомомофизм

$$\psi_{n,\infty} : A_n \longrightarrow B$$

является естественным вложением. Тогда легко убедиться, что пара $(B, \{\psi_{n,\infty}\})$ является индуктивным пределом последовательности (4.11). Значит, согласно с (4.21), мы можем написать

$$(B, \{\psi_{n,\infty}\}) = \varinjlim \{\, A_n,\, \varphi_n \,\}.$$

Следующий пример показывает, что группа рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$, изоморфная группе характеров P-адического соленоида, является индуктивным пределом последовательности целых чисел.

Пример 4.1.2. Пусть, как на протяжении всего текста диссертации, $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел. Рассмотрим индуктивную последовательность в категории абелевых групп

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\tau_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\tau_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\tau_3} \ldots,$$

в которой связующие гомоморфизмы задаются формулой

$$\tau_n(m) = p_n m,$$

где $m \in \mathbb{Z}$.

Нетрудно убедиться (см., например, [117, предложение 1]), что

$$\mathbb{Q}_P \backsimeq \varinjlim\{\,\mathbb{Z},\,\tau_n\,\},$$

то есть, группа рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$ является индуктивным пределом указанной выше индуктивной последовательности групп.

Свойство универсальности индуктивных пределов позволяет ввести понятие предельного морфизма, индуцируемого морфизмом между индуктивными последовательностями.

Определение 4.1.5. *Пусть* $\{\,A_n,\,\varphi_n\,\}$ *и* $\{\,B_n,\,\psi_n\,\}$ *— индуктивные последовательности в категории* $\mathcal{C}$ *и пусть для каждого числа* $n \in \mathbb{N}$ *задан морфизм* $\tau_n : A_n \longrightarrow B_n$ *категории* $\mathcal{C}$*. Пусть для любых чисел* $m, n \in \mathbb{N}$*, удовлетворяющих неравенству* $m \leqslant n$ *выполняется соотношение*

$$\tau_n \circ \varphi_{m,n} = \psi_{m,n} \circ \tau_m,$$

то есть, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_m \arrow[r, "\varphi_{m,n}"] \arrow[d, "\tau_m"'] & A_n \arrow[d, "\tau_n"] \\
B_m \arrow[r, "\psi_{m,n}"] & B_n\,.
\end{tikzcd}$$

Тогда последовательность $\{\tau_n\}$ *называется морфизмом между индуктивными последовательностями* $\{\,A_n,\,\varphi_n\,\}$ *и* $\{\,B_n,\,\psi_n\,\}$*. При этом используется запись*

$$\{\tau_n\} : \{A_n, \varphi_n\,\} \longrightarrow \{B_n, \psi_n\,\}. \tag{4.22}$$

Пусть дан морфизм (4.22) между индуктивными последовательностями в категории $\mathcal{C}$. Используя свойство универсальности индуктивных пределов, мы легко видим, что существует единственный морфизм

$$\varinjlim\{\tau_n\} : \varinjlim\{A_n, \varphi_n\} \longrightarrow \varinjlim\{B_n, \psi_n\}. \tag{4.23}$$

в категории $\mathcal{C}$, такой, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi_{n,\infty}"] \arrow[d, "\tau_n"'] & \varinjlim\{A_n, \varphi_n\} \arrow[d, "\varinjlim\{\tau_n\}"] \\ B_n \arrow[r, "\psi_{n,\infty}"] & \varinjlim\{B_n, \psi_n\}. \end{tikzcd}$$

Определение 4.1.6. *Морфизм (4.23) называется пределом морфизма $\{\tau_n\}$, или предельным морфизмом, индуцируемым морфизмом $\{\tau_n\}$ между двумя индуктивными последовательностями.*

Далее, используя лемму 4.1.2, мы вводим в рассмотрение индуктивные последовательности алгебр Теплица, определяемые последовательностями простых чисел.

Определение 4.1.7. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел. Индуктивная последовательность*

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{T} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{T} \xrightarrow{\varphi_3} \ldots \tag{4.24}$$

со связующими $*$-гомоморфизмами

$$\varphi_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^{p_n}, n \in \mathbb{N},$$

называется индуктивной последовательностью алгебр Теплица, определяемой последовательностью P.

Замечание 4.1.2. Аналогичным образом индуктивная последовательность алгебр Теплица (4.24) может быть определена для последовательности произвольных натуральных чисел, и результаты § 4.2, § 4.3 обобщаются на такие последовательности (см. [158]).

Рассмотрение в определении 4.1.7 лишь последовательностей простых чисел основано на следующем свойстве [122, упражнение 6.7].

Пусть имеется индуктивная последовательность в категории C^*-*алгебр и* $*$-*гомоморфизмов*

$$\{\, A_n,\, \varphi_n,\, \mathbb{N}\,\} \tag{4.25}$$

и пусть при этом

$$(A, \{\varphi_{n,\infty}\}) = \varinjlim\{\, A_n,\, \varphi_n\,\}.$$

Пусть задана строго возрастающая последовательность натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

Для каждого числа $j \in \mathbb{N}$ *положим* $\psi_j := \varphi_{n_j, n_{j+1}}$.

Тогда для индуктивной последовательности C^*-*алгебр и их* $*$-*гомоморфизмов*

$$A_{n_1} \xrightarrow{\psi_1} A_{n_2} \xrightarrow{\psi_2} A_{n_3} \xrightarrow{\psi_3} \cdots \tag{4.26}$$

и ее индуктивного предела, с точностью до изоморфизма в категории C^*-*алгебр, и* $*$-*гомоморфизмов имеем равенство*

$$\varinjlim\{\, A_{n_j},\, \psi_{n_j},\, j \in \mathbb{N}\,\} = (A, \{\varphi_{n,\infty}\}).$$

Индуктивную последовательность (4.26) будем называть *подпоследовательностью* для индуктивной последовательности (4.25).

Пусть $M = (m_1, m_2, m_3, \ldots)$ — произвольная последовательность натуральных чисел и пусть задана индуктивная последовательность алгебр Теплица

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{T} \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{T} \xrightarrow{\psi_3} \ldots \tag{4.27}$$

со связующими $*$-гомоморфизмами, задаваемыми формулой

$$\varphi_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^{m_n}, n \in \mathbb{N}.$$

При этом возможны два случая: первый, когда, начиная с какого-то номера, все члены последовательности M равняются единице; второй, когда такой стабилизации нет.

Первый случай. Индуктивная последовательность алгебр Теплица, связующими $*$-гомоморфизмами которой являются лишь тождественные отображения, является подпоследовательностью для индуктивной последовательности (4.27). Значит, их индуктивные пределы совпадают и, очевидно, равны алгебре Теплица $\mathcal{T}$.

Второй случай. Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, такое, что $n \geqslant k$ и $m_n \neq 1$. Сначала мы «стянем» исходную последовательность (4.27), рассматривая ее подпоследовательность, определяемую последовательностью натуральных чисел, которая не содержит единиц. По свойству, сформулированному выше, исходная индуктивная последовательность и ее подпоследовательность имеют одинаковые индуктивные пределы. Далее, для краткости, (4.27) обозначает построенную индуктивную подпоследовательность, а M — определяющую ее последовательность натуральных чисел, все члены которой больше единицы.

Теперь мы построим новую индуктивную последовательность алгебр Теплица, определяемую последовательностью простых чисел, такую, что (4.27) будет служить ее подпоследовательностью. Говоря неформально, построение новой последовательности представляет собой «растяжение» индуктивной последовательности (4.27).

Начнем построение с разложения членов последовательности M на простые множители. Рассмотрим разложение натурального числа m_1 на простые множители:

$$m_1 = p_1 \ldots p_s,$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — простые числа. Для $n = 1, \ldots, s$ положим

$$\varphi_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^{p_n}.$$

Далее рассмотрим разложение на простые множители числа m_2 :

$$m_2 = q_1 \ldots q_t,$$

и для каждого из чисел $n = s + k$, где $k = 1, \ldots, t$, положим

$$\varphi_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^{q_k}.$$

Продолжая таким образом процесс построения, мы получим индуктивную последовательность алгебр Теплица

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{T} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{T} \xrightarrow{\varphi_3} \ldots, \qquad (4.28)$$

определяемую последовательностью простых чисел

$$P = (p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t, \ldots).$$

В результате построения мы имеем возрастающую последовательность натуральных чисел

$$1 < 1 + s < 1 + s + t < \ldots.$$

При этом между связующими $*$-гомоморфизмами последовательностей (4.27) и (4.28) выполняются соотношения

$$\psi_1 = \varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_1 = \varphi_{1,1+s},$$

$$\psi_2 = \varphi_{s+t} \circ \cdots \circ \varphi_{1+s} = \varphi_{1+s,1+s+t},$$

и так далее.

Поэтому индуктивная последовательность (4.27) является подпоследовательностью индуктивной последовательности (4.28). Следовательно, имеется изоморфизм их индуктивных пределов

$$\varinjlim \{ \mathcal{T},\, \psi_n \} = \varinjlim \{ \mathcal{T},\, \varphi_n \}.$$

Таким образом, для нахождения пределов индуктивных последовательностей алгебр Теплица, определяемых последовательностями натуральных чисел, можно, как и в случае соленоидов, ограничиться рассмотрением последовательностей, состоящих только простых чисел. Этим мы и займемся в следующем параграфе.

4.2. Пределы индуктивных последовательностей алгебр Теплица и их морфизмы

В этом параграфе мы изучаем пределы индуктивных последовательностей алгебр Теплица, определяемых последовательностями простых чисел, и вводим в рассмотрение предельные $*$-эндоморфизмы этих объектов. Основным результатом параграфа является предложение 4.2.1 о строении пределов. В нем утверждается, что предел индуктивной последовательности алгебр Теплица, определяемой последовательностью простых чисел $P = (p_1, p_2, \ldots)$, в категории C^*-алгебр изоморфен редуцированной полугрупповой алгебре $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$.

Предложение 4.2.1 является частным случаем теоремы 1.6 из [116] о непрерывности функтора из категории упорядоченных абелевых групп в категорию C^*-алгебр, сопоставляющего группе Γ алгебру Теплица $C_r^*(\Gamma^+)$. Действительно, упорядоченная группа $\mathbb{Q}_P$ является пределом (в категории упорядоченных абелевых групп) индуктивной последовательности, состоящей из групп целых чисел и их гомоморфизмов умножения на числа p_n (см. пример 4.1.2).

Мы дадим независимое от [116, теорема 1.6] доказательство указанного утверждения.

Предложение 4.2.1. *Пусть* $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$ *— индуктивная последовательность алгебр Теплица, определяемая последовательностью простых чисел* $P = (p_1, p_2, \ldots)$*. Тогда существует изоморфизм*

$$\varinjlim \{\mathcal{T}, \varphi_n\} \ \simeq\ C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

в категории C^**–алгебр и* $*$*-гомоморфизмов.*

Доказательство. Пользуясь теоремой Кобурна, мы определяем последовательность $*$-гомоморфизмов полугрупповых C^* - алгебр с помощью следующих формул:

$$
\begin{gathered}
\psi_{1,\infty} : \mathcal{T} \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) : T \longmapsto V_1; \\
\psi_{n,\infty} : \mathcal{T} \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) : T \longmapsto V_{\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}}
\end{gathered}
\tag{4.29}
$$

при натуральном $n \geqslant 2$.

Далее, мы утверждаем, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ диаграмма (см. диаграмму (4.14))

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\psi_{n,\infty}"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "\psi_{n+1,\infty}"] \\
& C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) &
\end{tikzcd}
$$

является коммутативной.

Действительно, зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$. В силу свойства единственности $*$-гомоморфизма в теореме Кобурна, которым обладают гомоморфизмы (4.29), для доказательства заявленного соотношения

$$
\psi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n = \psi_{n,\infty} \tag{4.30}
$$

нам достаточно установить лишь равенство значений $*$-гомомофизмов в обеих частях (4.30) на одном операторе правого сдвига T. То есть, показать, что

$$
\psi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n(T) = \psi_{n,\infty}(T).
$$

Но справедливость последнего соотношения доставляет цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
\psi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n(T) &= \psi_{n+1,\infty}(T^{p_n}) = \\
&= (\psi_{n+1,\infty}(T))^{p_n} = \\
&= (V_{\frac{1}{p_1 \cdots p_n}})^{p_n} = V_{\frac{p_n}{p_1 \cdots p_n}} = \\
&= \psi_{n,\infty}(T).
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы можем воспользоваться свойством универсальности индуктивных пределов в категории C^*-алгебр и $*$-гомоморфизмов. Значит, существует единственный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр

$$\psi : \varinjlim\{\mathcal{T}, \varphi_n\} \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+),$$

такой, что диаграмма (см. диаграмму (4.19))

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T} \arrow[dl, "\varphi_{n,\infty}"'] \arrow[dr, "\psi_{n,\infty}"] & \\
\varinjlim\{\mathcal{T}, \varphi_n\} \arrow[rr, "\psi"] & & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)
\end{tikzcd}$$

коммутативна для любого числа $n \in \mathbb{N}$.

Утверждается, что $*$-гомоморфизм ψ является изоморфизмом в категории C^*-алгебр и $*$-гомоморфизмов.

Во-первых, используя пункт 3б) из предложения 4.1.1 о пределах индуктивных последовательностей C^*-алгебр, мы видим, что инъективность гомоморфизма ψ вытекает из инъективности всех гомоморфизмов $\psi_{n,\infty}$.

Во-вторых, в силу пункта 3в) из предложения 4.1.1, сюръективность гомоморфизма ψ эквивалентна равенству

$$C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \;=\; \overline{\bigcup_{j=1}^{+\infty} \psi_{j,\infty}(\mathcal{T})}. \tag{4.31}$$

Для доказательства (4.31) сначала покажем, что для плотной подалгебры $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_P^+)$ в алгебре $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ имеет место включение множеств

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}_P^+) \;\subset\; \bigcup_{j=1}^{+\infty} \psi_{j,\infty}(\mathcal{T}). \tag{4.32}$$

С этой целью, в алгебре $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_P^+)$ мы зафиксируем произвольный элемент Q и, пользуясь леммой 4.1.1, запишем его в виде выражения (4.5):

$$Q = \lambda_1 V_{r_1} V_{q_1}^* + \ldots + \lambda_n V_{r_n} V_{q_n}^*.$$

Мы заявляем, что для оператора $V_{r_1} V_{q_1}^*$ из этого выражения имеет место включение

$$V_{r_1}V_{q_1}^* \in \psi_{j,\infty}(\mathcal{T}). \tag{4.33}$$

для некоторого индекса $j \in \mathbb{N}$. Для этого запишем рациональные числа r_1 и q_1 в виде обыкновенных дробей

$$r_1 = \frac{t}{n_1 \dots n_k}, \qquad q_1 = \frac{s}{n_1 \dots n_l},$$

где $t, s \in \mathbb{Z}$, $k, l \in \mathbb{N}$. Тогда для операторов V_{r_1} и $V_{q_1}^*$ получаем следующие представления:

$$\begin{aligned} V_{r_1} &= \psi_{k+1,\infty}(T^t); \\ V_{q_1}^* &= \psi_{l+1,\infty}(T^{*s}). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Далее, для определённости, положим, что выполняется неравенство $k \leqslant l$, и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[rr, "\varphi_{k+1,l+1}"] \arrow[dr, "\psi_{k+1,\infty}"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "\psi_{l+1,\infty}"] \\ & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) & \end{tikzcd} \tag{4.35}$$

Используя представления (4.34) и коммутативность диаграммы (4.35), мы имеем равенства для операторов:

$$\begin{aligned} V_{r_1}V_{q_1}^* &= \psi_{k+1,\infty}(T^t)\psi_{l+1,\infty}(T^{*s}) = \\ &= (\psi_{l+1,\infty} \circ \varphi_{k+1,l+1})(T^t)\psi_{l+1,\infty}(T^{*s}) = \\ &= \psi_{l+1,\infty}(\varphi_{k+1,l+1}(T^t)T^{*s}). \end{aligned}$$

Значит, нами получено заявленное соотношение (4.33) при $j = l + 1$.

Аналогичным образом, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ найдется оператор S_i из алгебры Теплица $\mathcal{T}$ и число $c_i \in \mathbb{N}$, такие, что имеем представление

$$\lambda_i V_{r_i} V_{q_i}^* = \psi_{c_i,\infty}(S_i). \tag{4.36}$$

Далее, введем в рассмотрение натуральное число c, определяемое формулой

$$c := \max\{c_1, \ldots, c_n\}.$$

Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. В диаграмме (4.35) положим

$$k + 1 = c_i \quad \text{и} \quad l + 1 = c.$$

Тогда, принимая во внимание коммутативность этой диаграммы, мы получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \psi_{c_i,\infty}(S_i) = \psi_{c,\infty} \circ \varphi_{c_i,c}(S_i) = \\ = \psi_{c,\infty}(\varphi_{c_i,c}(S_i)). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Теперь, подставив сначала (4.37) в (4.36) для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, n$, а затем полученные выражения в сумму (4.5), мы пользуемся аддитивностью оператора $\psi_{c,\infty}$. В итоге получается равенство для операторов

$$Q = \psi_{c,\infty}(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{c_i,c}(S_i)).$$

Следовательно, мы показали, что имеет место включение

$$Q \in \psi_{c,\infty}(\mathcal{T}).$$

Итак, произвольный элемент Q инволютивной алгебры $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_P^+)$ содержится в образе алгебры Теплица под действием некоторого оператора $\psi_{j,\infty}$. Таким образом, соотношение (4.32) доказано.

Осталось заметить, что, так как алгебра $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_P^+)$ плотна в полугрупповой C^*-алгебре $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$, мы получаем требуемое равенство (4.31).

Тем самым предложение доказано.

$\square$

Учитывая предложение 4.2.1, мы будем говорить, что пара

$$\left(C_r^*(\mathbb{Q}_P^+), \{\psi_{n,\infty} : \ n \in \mathbb{N}\ \}\right),$$

или просто сама полугрупповая C^*-алгебра $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$, является индуктивным пределом индуктивной последовательности алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, определяемой последовательностью простых чисел P.

Замечание 4.2.1. Полугрупповые алгебры вида $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ служат пределами некоторых индуктивных систем алгебр Теплица над произвольными направленными множествами. Изучению таких систем, а также свойств пределов индуктивных систем C^*-алгебр над произвольными частично упорядоченными множествами, посвящены статьи [142, 154, 156–158]. В них, в частности, развиваются идеи, тесно связанные с предложением 4.2.1.

Далее, зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим изометрический гомоморфизм, задаваемый формулой

$$\rho_k : \mathbb{Q}_P^+ \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) : a \longmapsto V_{ka}. \tag{4.38}$$

По свойству универсальности изометрического гомоморфизма существует единственный $*$-эндоморфизм

$$\rho_k^* : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+),$$

такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}_P^+ \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho_k"] & \\ C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \arrow[rr, "\rho_k^*"] & & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \end{tikzcd} \tag{4.39}$$

коммутативна.

Покажем, что гомоморфизм ρ_k^* является предельным эндоморфизмом.

Для этого определим морфизм между двумя копиями одной и той же индуктивной последовательности (4.24) алгебр Теплица, определяемой последовательностью простых чисел. Используя лемму 4.1.2, мы введем в рассмотрение последовательность отображений $\left\{ \phi_n^k \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, состоящую из одних и тех же унитальных $*$-гомоморфизмов

$$\phi_n^k : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^k. \tag{4.40}$$

Напомним, что для каждой пары чисел $m, n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $m < n$, определен связующий гомоморфизм

$$\varphi_{m,n} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$$

для индуктивной последовательности (4.24) с помощью формулы (4.12). Кроме того, для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ имеется тождественный гомоморфизм алгебр

$$\varphi_{n,n} = id_{\mathcal{T}}.$$

Далее, для произвольной пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющих неравенству $m \leqslant n$, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r, "\varphi_{m,n}"] \arrow[d, "\phi_m^k"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\phi_n^k"] \\ \mathcal{T} \arrow[r, "\varphi_{m,n}"] & \mathcal{T} \end{tikzcd} \tag{4.41}$$

Из леммы 4.1.2 следует, что диаграмма (4.41) коммутативна, то есть, имеет место равенство гомоморфизмов

$$\phi_n^k \circ \varphi_{m,n} = \varphi_{m,n} \circ \phi_m^k.$$

Таким образом, мы делаем вывод, что у нас имеется морфизм

$$\{\phi_n^k : n \in \mathbb{N}\} : \{\mathcal{T}, \varphi_n\} \longrightarrow \{\mathcal{T}, \varphi_n\}$$

между двумя копиями одной и той же индуктивной последовательности (4.24). А это, в свою очередь значит, что существует единственный $*$ - гомоморфизм

$$\varinjlim \{\phi_n^k : n \in \mathbb{N}\} : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+),$$

такой, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r, "\psi_{n,\infty}"] \arrow[d, "\phi_n^k"'] & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \arrow[d, "\varinjlim\{\phi_n^k : n\in\mathbb{N}\}"] \\
\mathcal{T} \arrow[r, "\psi_{n,\infty}"] & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)
\end{tikzcd}
\tag{4.42}
$$

коммутативна для любого числа $n \in \mathbb{N}$.

Определение 4.2.1. *Гомоморфизм* C^**-алгебр*

$$\varinjlim \left\{ \phi_n^k \,|\, n \in \mathbb{N} \right\} : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

будем называть предельным эндоморфизмом полугрупповой C^**-алгебры* $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ *и обозначать символом* ϕ_P^k.

Предложение 4.2.2. *Для каждого числа* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство* $*$*-гомоморфизмов*

$$\phi_P^k \;=\; \rho_k^*.$$

Доказательство. Прежде всего мы утверждаем, что для каждого рационального числа $a \in \mathbb{Q}_P^+$ эндоморфизм ϕ_P^k отображает оператор сдвига V_a в оператор V_{ka}. Для того, чтобы показать это, мы зафиксируем в полугруппе $\mathbb{Q}_P^+$ произвольный элемент a и рассмотрим его представление в виде обыкновенной дроби

$$a = \frac{m}{p_1 \dots p_l},$$

где $m \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$.

В таком случае, используя определение $*$-гомоморфизма $\psi_{l+1,\infty}$ (см.(4.29)), мы можем написать, что

$$V_a = \psi_{l+1,\infty}(T^m). \tag{4.43}$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму (4.42), в которой число n заменено на число $l+1$. Используя соотношение (4.43), коммутативность диаграммы

(4.42), а также определения (4.40) и (4.29), мы получаем заявленное свойство:

$$\begin{aligned}\phi_P^k(V_a) &= \phi_P^k \circ \psi_{l+1,\infty}(T^m) = \\ &= \psi_{l+1,\infty} \circ \phi_{l+1}^k(T^m) = \\ &= \psi_{l+1,\infty}(T^{km}) = \\ &= V_{ka}.\end{aligned}$$

Теперь совпадение $*$-гомоморфизма ρ_k^* из диаграммы (4.39) с предельным $*$-эндоморфизмом ϕ_P^k вытекает из единственности $*$-гомоморфизма в свойстве универсальности изометрического гомоморфизма (4.8) для полугруппы рациональных чисел $\Gamma^+ = \mathbb{Q}_P^+$.

Предложение доказано. $\square$

4.3. Предельные $*$-автоморфизмы полугрупповых C^*-алгебр

Данный параграф посвящен теоретико-множественным свойствам предельных $*$-эндоморфизмов полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. Точнее говоря, здесь обсуждаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти эндоморфизмы были биективными, то есть, $*$-изоморфизмами алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ в себя, или $*$-автоморфизмами.

Итак, пусть задана произвольная последовательность простых чисел $P = (p_1, p_2, \ldots)$. Зафиксируем произвольное число $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим предельный $*$-эндоморфизм

$$\phi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+).$$

Напомним, что он индуцируется морфизмом $\{\phi_n^k : n \in \mathbb{N}\}$ между двумя копиями одной и той же индуктивной последовательности алгебр Теплица, определяемой последовательностью P:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\phi_1^k"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\phi_2^k"] & \mathcal{T} \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\phi_1^k"] & \cdots & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \arrow[d, "\phi_P^k"] \\
\mathcal{T} \arrow[r, "\varphi_1"] & {} \arrow[r, "\varphi_2"] & \mathcal{T} \arrow[r, "\varphi_3"] & \cdots & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)
\end{tikzcd}
\tag{4.44}
$$

Начнем с формулировки утверждения, которое является непосредственным следствием предложения 4.2.2 и инъективности $*$-гомоморфизма ρ_k^*, индуцированного изометрическим представлением (4.38) полугруппы $\mathbb{Q}_P^+$.

Предложение 4.3.1. *Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ предельный эндоморфизм ϕ_P^k является инъективным.*

Замечание 4.3.1. Предложение 4.3.1 может быть доказано без использования предложения 4.2.2. Для этого нужно воспользоваться свойствами $*$-гомоморфизмов, участвующих в определении предельного эндоморфизма ϕ_P^k, и пунктом 3б) из предложения 4.1.1 о пределах индуктивных последовательностей C^*-алгебр.

Теперь мы обсудим условия, которым должно удовлетворять натуральное число k, для того, чтобы предельный эндоморфизм ϕ_P^k был $*$-автоморфизмом. Прежде всего заметим, что ϕ_P^1 — тождественный $*$-гомоморфизм. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что $k \geqslant 2$.

Предложение 4.3.2. *Пусть каждый простой делитель числа k встречается бесконечно много раз в последовательности простых чисел P. Тогда предельный эндоморфизм*

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

является $*$-автоморфизмом.

Доказательство. Легко видеть, что, если натуральное число k удовлетворяет указанному в формулировке условию, то полугрупповой гомоморфизм

$$\mathbb{Q}_P^+ \longrightarrow \mathbb{Q}_P^+ : q \longmapsto kq$$

является изоморфизмом. Следовательно, образ $*$-гомоморфизма ρ_k^*, индуцированного изометрическим представлением (4.38) полугруппы $\mathbb{Q}_P^+$ (см. диаграмму (4.39)), содержит инволютивную алгебру $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_P^+)$, которая плотна в C^*-алгебре $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. Значит, ρ_k^* является $*$-автоморфизмом. В силу предложения 4.2.2 предельный эндоморфизм φ_P^k также является $*$-автоморфизмом.

Предложение доказано. $\square$

Замечание 4.3.2. Предыдущее утверждение может быть доказано с использованием техники индуктивных последовательностей по аналогии с доказательством предложения 4.2.2. Это делается следующим образом.

Ввиду предложения 4.3.1 нам достаточно показать сюръективность эндоморфизма φ_P^k. Она, ввиду пункта 3в) из предложения 4.1.1, эквивалентна равенству (4.31), которое, в свою очередь, вытекает из соотношения (4.32). При этом, конечно, образ $\varphi_j^k(\mathcal{T})$ в (4.31) и (4.32) следует заменить на множество $\psi_{j,\infty} \circ \varphi_j^k(\mathcal{T})$.

Для доказательства соотношения (4.32) мы зафиксируем произвольный элемент Q в инволютивной алгебре $\mathcal{P}(\mathbb{Q}_P^+)$ и рассмотрим его представление в виде линейной комбинации (4.5). Пусть в этом представлении

$$r_1 \; = \; \frac{t}{p_1 \dots p_m},$$

где $t \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \mathbb{N}$.

Поскольку каждый простой множитель числа k встречается бесконечно много раз в последовательности простых чисел P, то существуют такие натуральные числа a и $s > m$, что верно равенство

$$r_1 \; = \; \frac{ak}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s}.$$

Далее, непосредственно проверяется, что выполняется равенство

$$V_{r_1} \; = \; \psi_{s+1,\infty} \circ \varphi_{s+1}^k(T^a). \tag{4.45}$$

Аналогично, существуют два числа $b, l \in \mathbb{N}$, такие, что справедливо равенство

$$V_{q_1}^* = \psi_{l,\infty} \circ \varphi_l^k(T^{*b}). \tag{4.46}$$

Положим $c_1 := \max\{s+1, l\}$.

Используя равенства (4.45),(4.46) и коммутативность диаграмм (4.35), (4.41), мы имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 V_{r_1} V_{q_1}^* &= \lambda_1 \psi_{s+1,\infty}(\varphi_{s+1}^k(T^a))\psi_{l,\infty}(\varphi_l^k(T^{*b})) = \\
&= \lambda_1 \psi_{c_1,\infty} \circ \varphi_{s+1,c_1}(\varphi_{s+1}^k(T^a))\psi_{c_1,\infty} \circ \varphi_{l,c_1}(\varphi_l^k(T^{*b})) = \\
&= \lambda_1 \psi_{c_1,\infty}((\varphi_{s+1,c_1} \circ \varphi_{s+1}^k)(T^a)(\varphi_{l,c_1} \circ \varphi_l^k)(T^{*b})) = \\
&= \lambda_1 \psi_{c_1,\infty}((\varphi_{c_1}^k \circ \varphi_{s+1,c_1})(T^a)(\varphi_{c_1}^k \circ \varphi_{l,c_1})(T^{*b})) = \\
&= \psi_{c_1,\infty} \circ \varphi_{c_1}^k(\lambda_1 \varphi_{s+1,c_1}(T^a)\varphi_{l,c_1}(T^{*b})).
\end{aligned}$$

Введем обозначение для оператора из правой части предыдущей формулы:

$$S_1 := \lambda_1 \varphi_{s+1,c_1}(T^a)\varphi_{l,c_1}(T^{*b}).$$

Тогда, подставляя S_1 в выражение выше, мы можем переписать его покороче в виде

$$\lambda_1 V_{r_1} V_{q_1}^* = \psi_{c_1,\infty} \circ \varphi_{c_1}^k(S_1).$$

Таким же образом для других слагаемых в представлении (4.5) мы получаем аналогичные соотношения

$$\lambda_i V_{r_i} V_{q_i}^* = \psi_{c_i,\infty} \circ \varphi_{c_i}^k(S_i),$$

в которых операторы S_i принадлежат алгебре Теплица $\mathcal{T}$.

Потом полагаем, что $c := \max\{c_1, \dots, c_n\}$.

Затем, для каждого индекса $i = 1, \dots, n$, воспользовавшись коммутативностью диаграмм (4.35) и (4.41), мы имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\lambda_i V_{r_i} V_{q_i}^* &= \psi_{c_i,\infty} \circ \varphi_{c_i}^k(S_i) = \\
&= \psi_{c,\infty} \circ \varphi_{c_i,c}(\varphi_{c_i}^k(S_i)) = \\
&= \psi_{c,\infty}(\varphi_{c_i,c} \circ \varphi_{c_i}^k(S_i)) = \\
&= \psi_{c,\infty}(\varphi_c^k \circ \varphi_{c_i,c}(S_i)) = \\
&= \psi_{c,\infty} \circ \varphi_c^k(\varphi_{c_i,c}(S_i)).
\end{aligned}$$

Подставляя правую часть предыдущего выражения в линейную комбинацию (4.5), мы получаем формулу

$$Q = \psi_{c,\infty} \circ \varphi_c^k(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{c_i,c}(S_i)),$$

которая немедленно гарантирует соотношение

$$Q \in \psi_{c,\infty} \circ \varphi_c^k(\mathcal{T}).$$

Дальнейшие рассуждения ясны. $\square$

Теперь докажем утверждение, обратное к предложению 4.3.2. Для этого сначала мы исследуем случай, когда k является простым числом, совпадающим лишь с конечным числом членов последовательности P.

С этой целью мы рассмотрим две подалгебры в полугрупповой C^*-алгебре $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$, которые порождены одним и тем же множеством изометрий

$$\mathcal{S} := \{V_{kq} : q \in \mathbb{Q}_P^+\}.$$

Это $*$-подалгебра $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ и C^*-подалгебра $C^*(\mathcal{S})$, порожденные $\mathcal{S}$. Алгебра $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ является плотным подмножеством в $C^*(\mathcal{S})$ относительно топологии, задаваемой нормой, то есть, справедливо равенство

$$\overline{\mathcal{P}(\mathcal{S})} = C^*(\mathcal{S}). \tag{4.47}$$

Ясно, что для образа $\mathrm{Im}\varphi_P^k$ предельного эндоморфизма φ_P^k имеет место равенство

$$\mathrm{Im}\varphi_P^k = C^*(\mathcal{S}). \tag{4.48}$$

Предложение 4.3.3. *Пусть k — простое число, которое не встречается бесконечно много раз в последовательности P. Тогда предельный эндоморфизм*

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

не является сюръективным.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $m = 1$. Иными словами, простое число k не является членом последовательности P.

Мы утверждаем, что справедливо соотношение

$$V_{\frac{1}{p_1}} \notin \mathrm{Im}\phi_P^k. \tag{4.49}$$

Для того, чтобы показать это, возьмем произвольный элемент

$$Q \in \mathcal{P}(\mathcal{S}).$$

Нетрудно видеть, что, аналогично тому, как для элементов $*$-алгебры $\mathcal{P}(\Gamma^+)$ имеет место представление (4.5), элемент Q может быть записан в следующем виде:

$$Q = \lambda_1 V_{kr_1} V_{kq_1}^* + \ldots + \lambda_n V_{kr_n} V_{kq_n}^*,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $r_i, q_i \in \mathbb{Q}_P^+, i = 1, \ldots, n$. При этом пары чисел (r_i, q_i) различны и удовлетворяют неравенствам

$$q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n.$$

Используя (4.3), мы приходим к следующей оценке для норм элементов пространств $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{Q}_P^+))$ и $l^2(\mathbb{Q}_P^+)$:

$$\begin{aligned} \|V_{\frac{1}{p_1}} - Q\| \geqslant \|(V_{\frac{1}{p_1}} - Q)e_{kq_n}\| = \\ = \|e_{kq_n + \frac{1}{p_1}} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{k(q_n - q_i + r_i)}\|. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Очевидно, что для индексов векторов канонического базиса гильбертова пространства $l^2(\mathbb{Q}_P^+)$ выполнены следующие условия:

$$kq_n + \frac{1}{p_1} \neq k(q_n - q_i + r_i),$$

где $i = 1, \ldots, n$. Они, в свою очередь, влекут ортогональность векторов

$$e_{kq_n + \frac{1}{p_1}} \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{k(q_n - q_i + r_i)}$$

в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Q}_P^+)$, то есть, для скалярного произведения этих векторов имеем равенство

$$\langle e_{kq_n+\frac{1}{p_1}}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{k(q_n-q_i+r_i)} \rangle = 0. \tag{4.51}$$

Поэтому, используя соотношения (4.50) и (4.51), мы получаем следующую оценку снизу для нормы разности операторов в пространстве $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{Q}_P^+))$:

$$\|V_{\frac{1}{p_1}} - Q\| \geqslant 1.$$

Она означает, что оператор $V_{\frac{1}{p_1}}$ не является точкой прикосновения множества $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ относительно топологии, задаваемой нормой.

Таким образом, ввиду равенств (4.47) и (4.48), мы получили соотношение (4.49), как и утверждалось. Случай 1 доказан.

Случай 2. Пусть $m \geqslant 2$ является наибольшим натуральным числом l, таким,что выполняется равенство $k = p_l$.

Положим $q := p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$.

Для сведения наших аргументов к первому случаю доказательства, мы рассмотрим последовательность простых чисел

$$P_m = (p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots),$$

для которой простое число k не является ее членом. Затем, мы определим изометрический гомоморфизм, который задается формулой

$$\beta : \mathbb{Q}_P^+ \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_{P_m}^+) : a \longmapsto V_{qa}.$$

Напомним, здесь символ V_{qa} обозначает изометрию в $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{Q}_{P_m}^+))$, определяемую формулой (4.3).

По свойству универсальности изометрического гомоморфизма π для полугруппы рациональных чисел $\mathbb{Q}_P^+$, существует единственный инъективный

$*$-гомоморфизм C^*-алгебр β^*, такой,что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}_P^+ \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \arrow[rr, "\beta^*"] & & C_r^*(\mathbb{Q}_{P_m}^+)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, выполняется равенство отображений $\beta^* \circ \pi = \beta$.

Так как легко видеть, что подгруппа рациональных чисел

$$q\mathbb{Q}_P := \{\, qa \,|\, a \in \mathbb{Q}_P \,\}$$

совпадает с группой $\mathbb{Q}_{P_m}$, то $*$-гомоморфизм β^* является изоморфизмом полугрупповых C^*-алгебр $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ и $C_r^*(\mathbb{Q}_{P_m}^+)$.

Далее, мы определим отображение

$$\varphi_{P_m} : C_r^*(\mathbb{Q}_{P_m}^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_{P_m}^+)$$

как $*$-гомоморфизм, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "\varphi_P^k"'] & C_r^*(\mathbb{Q}_{P_m}^+) \arrow[d, "\varphi_{P_m}"] \\
C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \arrow[r, "\beta^*"] & C_r^*(\mathbb{Q}_{P_m}^+)
\end{tikzcd} \tag{4.52}$$

Ясно, что этот $*$-гомоморфизм задаётся как композиция $*$-гомоморфизмов формулой

$$\varphi_{P_m} := \beta^* \circ \varphi_P^k \circ (\beta^*)^{-1},$$

где, как обычно, $(\beta^*)^{-1}$ — $*$-изоморфизм, обратный к β^*.

Легко проверить, что для каждого элемента $a \in \mathbb{Q}_{P_m}^+$ справедливо равенство операторов

$$\varphi_{P_m}(V_a) = V_{ka}.$$

Следовательно, принимая во внимание единственность $*$-гомоморфизма в свойстве универсальности изометрического гомоморфизма (4.8) для полугруппы рациональных чисел

$$\Gamma^+ = \mathbb{Q}^+_{P_m},$$

мы получаем равенство гомоморфизмов $\varphi_{P_m} = \varphi^k_{P_m}$. В последней формуле $*$-гомоморфизм

$$\varphi^k_{P_m} : C^*_r(\mathbb{Q}^+_{P_m}) \longrightarrow C^*_r(\mathbb{Q}^+_{P_m})$$

является предельным эндоморфизмом, определяемым диаграммой (4.44), в которой $P = P_m$, а связующие $*$-гомоморфизмы φ_n, $n \in \mathbb{N}$, задаются формулой

$$\varphi_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^{p_{m+n}}.$$

В силу первого случая доказательства, так как простое число k не является членом последовательности P_m, мы заключаем, что отображение φ_{P_m} не является сюръективным. Из этого факта и коммутативности диаграммы (4.52) немедленно вытекает, что предельный эндоморфизм φ^k_P не является сюръективным. Что и требовалось доказать. $\square$

Воспользовавшись единственностью $*$-гомоморфизма из свойства универсальности изометрического гомоморфизма, мы немедленно получаем следующее утверждение.

Лемма 4.3.1. *Пусть $k = l \cdot m$ для некоторых натуральных чисел l и m. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & C^*_r(\mathbb{Q}^+_P) \arrow[dr, "\varphi^k_P"] & \\
C^*_r(\mathbb{Q}^+_P) \arrow[ur, "\varphi^l_P"] \arrow[rr, "\varphi^k_P"] & & C^*_r(\mathbb{Q}^+_P)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть, справедливо равенство гомоморфизмов

$$\varphi^k_P \;=\; \varphi^k_P \circ \varphi^l_P.$$

Из леммы 4.3.1 и предложения 4.3.3 вытекает

Предложение 4.3.4. *Если у натурального числа k есть простой делитель, который не встречается бесконечно много раз в последовательности P, то предельный эндоморфизм*

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

не является сюръективным.

В следующей теореме мы суммируем предыдущие результаты.

Теорема 4.3.1. *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и k — натуральное число больше единицы. Для того, чтобы предельный эндоморфизм*

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

был $*$-автоморфизмом необходимо и достаточно, чтобы каждый простой делитель числа k встречался бесконечно много раз в последовательности P.

Из теоремы 4.3.1 и из приведенных в предыдущих разделах фактов о делимых группах и о существовании обобщенных средних на топологических группах вытекает

Теорема 4.3.2. *Для последовательности простых чисел P и натурального числа $k \geqslant 2$ следующие условия эквивалентны:*

1) *предельный эндоморфизм*

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

является $*$-автоморфизмом;

2) *группа рациональных чисел Q_P является k-делимой группой;*

3) *на P-адическом соленоиде Σ_P существует k-среднее.*

Замечание 4.3.3. Необходимость условия, указанного в теореме 4.3.1, может быть доказана посредством результатов об алгебрах Теплица, которые представлены ниже в диаграмме (4.53), и результатов о P-адических соленоидах. За деталями этих результатов мы отсылаем читателя к [64], [116], [119] и к [137], [51], [147], соответственно. Далее мы приводим набросок такого доказательства.

Пусть $P = (p_1, p_2, \dots)$ — произвольная последовательность простых чисел и k — натуральное число больше единицы. Пусть предельный эндоморфизм полугрупповой C^*-алгебры

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+),$$

определяемый диаграммой (4.44), является $*$-автоморфизм.

В категории C^*-алгебр имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) & \xrightarrow{\varphi_P^k} & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \\
\Big\downarrow{\psi} & & \Big\downarrow{\psi} \\
C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)\big/_K & \xrightarrow{\varphi} & C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)\big/_K \\
\Big\downarrow{\iota} & & \Big\downarrow{\iota} \\
C(\widehat{\mathbb{Q}}_P) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & C(\widehat{\mathbb{Q}}_P)
\end{array} \tag{4.53}$$

Здесь K — коммутаторный идеал алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$, ψ — естественный $*$-гомоморфизм на фактор-алгебру. Отображения φ, ι и $\widetilde{\varphi}$ являются изоморфизмами C^*-алгебр, $\widehat{\mathbb{Q}}_P$ — компактная группа, дуальная к дискретной группе $\mathbb{Q}_P$, а $C(\widehat{\mathbb{Q}}_P)$ — это коммутативная C^*-алгебра всех комплекснозначных непрерывных функций на $\widehat{\mathbb{Q}}_P$.

Рассмотрим функтор спектра (см., например, [30, гл.4, §1])

$$\mathcal{UCBA} \longrightarrow \mathcal{CT}op,$$

то есть, контравариантный функтор из категории унитальных коммутативных банаховых алгебр и их непрерывных унитальных гомоморфизмов в категорию компактных топологических пространств и их непрерывных отображений. Он сопоставляет унитальной банаховой алгебре $C(\widehat{\mathbb{Q}}_P)$ её спектр, то есть, пространство мультипликативных функционалов, или, эквивалентно, пространство максимальных идеалов (см., например, [29, с. 35]), которые гомеоморфны компактному пространству $\widehat{\mathbb{Q}}_P$.

Напомним, что компактная группа $\widehat{\mathbb{Q}}_P$ топологически изоморфна P-адическому соленоиду Σ_P.

В данной ситуации изоморфизм $\widetilde{\varphi}$ индуцирует изоморфизм топологических групп

$$\Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P : g \longmapsto g^k, \tag{4.54}$$

являющийся эндоморфизмом возведения в степень

Наконец, мы рассмотрим контравариантный функтор из категории компактных групп в категорию дискретных групп, действие которого на объектах и морфизмах задается следующими формулами:

$$\begin{gathered} G \longmapsto \widehat{G}; \\ \{\sigma : G_1 \to G_2\} \longmapsto \{\widehat{\sigma} : \widehat{G}_2 \to \widehat{G}_1 : \chi \mapsto \chi \circ \sigma\}. \end{gathered}$$

Здесь $\widehat{G}$ — группа характеров компактной группы G, σ — морфизм компактных групп, а $\chi : G_2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ — характер компактной группы G_2.

Изоморфизму (4.54) этот функтор сопоставляет изоморфизм

$$\mathbb{Q}_P \longrightarrow \mathbb{Q}_P : q \longmapsto kq$$

в категории дискретных групп.

Либо на этой стадии обсуждения, либо на предыдущей стадии, работая с изоморфизмом (4.54), делается вывод о том, что каждый простой делитель натурального числа k встречается бесконечно много раз в последовательности простых чисел P.

Теперь рассмотрим примеры, соответствующие различным последовательностям простых чисел P.

Пример 4.3.1. Возьмем n различных простых чисел $p_1, \ldots, p_n, n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим периодическую последовательность

$$P = (p_1, \ldots, p_n, p_1, \ldots, p_n, \ldots),$$

составленную из этих чисел, и соответствующие ей группу рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$ и полугруппу неотрицательных чисел $\mathbb{Q}_P^+$.

Предельный эндоморфизм

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

является $*$-автоморфизмом тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные целые числа $m_1, \ldots, m_n$, что каноническое разложение числа k имеет вид

$$k = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{m_n}.$$

При этом, если $n = 1$ и $p_1 = 2$, то мы имеем постоянную последовательность чисел

$$P = (2, 2, \ldots)$$

и группу диадических рациональных чисел

$$\mathbb{Q}_{(2,2,\ldots)} = \left\{ \frac{m}{2^n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

В этом случае предельный эндоморфизм

$$\varphi_{(2,2,\ldots)}^k : C_r^*(\mathbb{Q}_{(2,2,\ldots)}^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_{(2,2,\ldots)}^+)$$

является $*$-автоморфизмом тогда и только тогда, когда k равняется какой-нибудь степени числа 2.

Пример 4.3.2. Рассмотрим последовательность простых чисел

$$P = (2, 2, 3, 2, 3, 5, 2, 3, 5, 7, \ldots),$$

в которой каждое простое число из множества всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ встречается бесконечно много раз.

В этом случае группа рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$ совпадает с группой всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда каждый предельный эндоморфизм

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}^+),$$

вне зависимости от числа k, является $*$-автоморфизмом редуцированной полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}^+)$ для полугруппы всех неотрицательных рациональных чисел.

Пример 4.3.3. Возьмем последовательность всех простых чисел

$$P = (2, 3, 5, 7, \ldots).$$

Тогда для любого натурального числа $k \geqslant 2$ предельный эндоморфизм

$$\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

не является $*$-автоморфизмом.

Замечание 4.3.4. Нетрудно показать, что для числа $k \in \mathbb{N}$ $*$-эндоморфизм алгебры Теплица $\mathcal{T}$, задаваемый формулой

$$\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^k,$$

является $*$-автоморфизмом тогда и только тогда, когда $k = 1$.

4.4. Приложение структуры топологической группы обратимых матриц

В этом параграфе естественная структура топологической группы на множестве обратимых матриц применяется для аппроксимации матриц. Мы показываем, что несколько произвольных квадратных матриц могут быть возмущены такими обратимыми матрицами, которые вместе с матричным произведением значений некоторых функций на них удовлетворяют требованию простоты их спектров.

Как обычно, на протяжении всего параграфа $M_n(\mathbb{C})$ — полная матричная алгебра всех квадратных матриц порядка n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $GL_n(\mathbb{C})$ — полная линейная группа всех обратимых матриц из $M_n(\mathbb{C})$. Любая норма на $M_n(\mathbb{C})$ порождает одну и ту же топологию. Снабжая $M_n(\mathbb{C})$ этой топологией, мы будем говорить о пространстве квадратных матриц. При этом $GL_n(\mathbb{C})$ является топологической группой. Мы будем говорить, что квадратная матрица из $M_n(\mathbb{C})$ имеет *простой спектр*, если множество ее собственных значений состоит из n попарно различных комплексных чисел. Как хорошо известно, множество $GL_n(\mathbb{C})$ и его подмножество, состоящее из всех обратимых матриц с простыми спектрами, являются открытыми и плотными подмножествами в пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

Напомним, что произвольное отображение $f : X \longrightarrow Y$ между двумя топологическими пространствами называется *открытым,* если для каждого открытого множества O в пространстве X его образ $f(O)$ является открытым множеством в Y.

Результатами этого параграфа являются следующее утверждение и его обобщение, формулируемое в конце параграфа.

Теорема 4.4.1. *Пусть заданы отображения*

$$f_1, f_2 : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}),$$

среди которых хотя бы одно является открытым. Пусть $\|\cdot\|$ *— произвольная норма на пространстве квадратных матриц* $M_n(\mathbb{C})$*. Тогда для любых матриц* A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ *и любого действительного числа* $\varepsilon > 0$ *существуют обратимые матрицы* A_ε, $B_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ *с простыми спектрами, такие, что выполняются неравенства*

$$\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon, \qquad \|B - B_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

и при этом произведение матриц $f(A_\varepsilon)g(B_\varepsilon)$ *имеет простой спектр.*

Доказательство. Для определенности предположим, что функция

$$f_1 : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

является открытым отображением.

Зафиксируем две произвольные матрицы $A,\ B \in M_n(\mathbb{C})$ и действительное число $\varepsilon > 0$.

Поскольку множество всех обратимых матриц с простыми спектрами плотно в пространстве всех квадратных матриц $M_n(\mathbb{C})$, то найдутся две обратимые матрицы

$$\tilde{A}, B_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{C})$$

с простыми спектрами, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$\left\|A - \tilde{A}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|B - B_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Так как множество всех обратимых матриц с простыми спектрами открыто в $M_n(\mathbb{C})$, мы можем рассмотреть открытый шар

$$B(\tilde{A}; r) = \left\{ X \in M_n(\mathbb{C}) \ \middle| \ \|\tilde{A} - X\| < r \right\},$$

состоящий из обратимых матриц с простыми спектрами, радиус которого удовлетворяет неравенству

$$0 < r < \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Далее, введем в рассмотрение гомеоморфизм правого сдвига на элемент $f_2(B_\varepsilon)$ в топологической группе $GL_n(\mathbb{C})$:

$$R : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) : X \longmapsto X f_2(B_\varepsilon),$$

В частности, R является открытым отображением.

Так как композиция двух открытых отображений

$$R \circ f_1 : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

является открытым отображением, образ шара

$$(R \circ f_1)(B(\tilde{A}; r))$$

является непустым открытым множеством в пространстве $GL_n(\mathbb{C})$. Поэтому существует обратимая матрица

$$C \in R(f_1(B(\tilde{A}; r))),$$

обладающая простым спектром.

По определению гомеоморфизма правого сдвига R, мы имеем равенства для множеств в группе $GL_n(\mathbb{C})$

$$R(f_1(B(\tilde{A}; r))) = f_1(B(\tilde{A}; r)) f_2(B_\varepsilon) =$$

$$= \left\{ f_1(X) f_2(B_\varepsilon) \,|\, X \in B(\tilde{A}; r) \right\}.$$

Следовательно, существует некоторая обратимая матрица

$$A_\varepsilon \in B(\tilde{A}; r),$$

которая обладает простым спектром, и имеет место представление

$$C = f(A_\varepsilon) g(B_\varepsilon).$$

Ясно, что обратимые матрицы A_ε и B_ε являются искомыми. Тем самым утверждение доказано. □

Поскольку операции левого и правого сдвига на любой элемент и операция взятия обратного элемента являются гомеоморфизмами для любой топологической группы, то из предложения 4.4.1 немедленно получается следующее утверждение.

Следствие 4.4.1. *Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная норма на пространстве квадратных матриц $M_n(\mathbb{C})$. Тогда для любых матриц $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют обратимые матрицы $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ с простыми спектрами, такие, что выполняются неравенства*

$$\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon, \qquad \|B - B_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

и при этом произведение матриц $A_\varepsilon B_\varepsilon^{-1}$ имеет простой спектр.

Замечание 4.4.1. Свойство, сформулированное в следствии 4.4.1, используется в статье [129] для оценки тензорного ранга матрицы, которая является обратной к матрице, представимой в виде суммы двух кронекеровых произведений матриц. Произведения матриц вида AB^{-1} и $A^{-1}B$ с различными спектральными свойствами возникают при изучении тензорных рангов элементов линейных пространств, представляющих из себя тензорные произведения трех конечномерных линейных пространств (см., например, [40,41]).Используя структуру топологической группы в полной линейной группе можно доказать лемму 3 из статьи [40], в которой доказательство этой леммы имеет алгебраический характер. В статье [153] следствие 4.4.1 применяется к изучению топологических свойств тензорного ранга.

Мы завершаем наше изложение формулировкой утверждения, которое является естественным обобщением предложения 4.4.1. Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству предложения 4.4.1.

Теорема 4.4.2. *Пусть заданы отображения*

$$f_1, f_2, \dots, f_k : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}),$$

где $k \geqslant 2$*, среди которых хотя бы одно является открытым. Пусть* $\|\cdot\|$ *— произвольная норма на пространстве квадратных матриц* $M_n(\mathbb{C})$*. Тогда для любого набора матриц* $A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{C})$ *и любого действительного числа* $\varepsilon > 0$ *существуют обратимые матрицы*

$$A_{1\varepsilon}, A_{2\varepsilon}, \dots, A_{k\varepsilon} \in GL_n(\mathbb{C})$$

каждая из которых имеет простой спектр, и при этом еще выполняются следующие два условия:

1) $\|A_1 - A_{1\varepsilon}\| < \varepsilon$, $\|A_2 - A_{2\varepsilon}\| < \varepsilon, \dots, \|A_k - A_{k\varepsilon}\| < \varepsilon$,

2) произведение обратимых матриц

$$f_1(A_{1\varepsilon})f_2(A_{2\varepsilon})\dots f_k(A_{k\varepsilon})$$

имеет простой спектр.

Заключение

В диссертации исследованы свойства отображений компактных групп, многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций на компактных группах и $*$-гомоморфизмов полугрупповых C^*-алгебр. Все намеченные цели достигнуты и все поставленные задачи решены.

Одной из мотиваций для начала изучения вопросов, рассматриваемых в диссертационной работе, явилась содержательная теория многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций и полиномиальных накрытий, порождаемых такими многочленами. В диссертации с целью приложения к этой теории доказана теорема о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на произвольные связные компактные группы. Эта теорема является центральным результатом диссертационной работы. Решение задачи подъема групповой структуры на накрывающее пространство группы имеет свою естественную мотивацию и самостоятельный интерес. При доказательстве теоремы о накрывающей группе для заданного накрытия $p : X \longrightarrow G$ по ряду Ли группы G построено семейство конечнолистных накрытий групп этого ряда. Это семейство аппроксимирует накрывающее отображение p. К каждому накрытию построенного семейства применима теорема Понтрягина о накрывающей группе.

Теорема о накрывающей группе позволила продолжить автору диссертации изучение тесной связи, существующей между конечнолистными накрывающими отображениями и многочленами Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций, которое было начато в предыдущих работах ряда математиков. В диссертации доказано, что всякое конечнолистное накрывающее отображение из произвольного компактного пространства на связную компактную абелеву группу эквивалентно полиномиальному накрытию, порождаемому сепарабельным многочленом Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами. Для изучения таких многочленов в работе введено понятие непрерывного многообразия Вейерштрасса, которое определяется корнями многочленов Вейерштрасса. Показано, что связное накрывающее пространство компактной связной абелевой группы гомеоморфно такому многообразию, определяемому корнями двучленов, коэффициентами которых являются характеры группы.

В работе получены приложения доказанной теоремы к изучению вопросов о структуре конечнолистных накрывающих отображений на компактные связные абелевы группы и к проблеме существования обобщенных средних на этих группах.

В диссертации исследованы свойства предельных морфизмов для двух интересных классов объектов в категории компактных групп и в категории C^*-алгебр. Этими объектами являются соответственно P-адические соленоиды и полугрупповые C^*-алгебры для полугрупп рациональных чисел.

Для произвольных P-адических соленоидов изучены свойства эндоморфизмов возведения в степень. Доказано, что каждое конечнолистное накрывающее отображение из связного топологического пространства на P-адический соленоид эквивалентно такому эндоморфизму. При этом использовано аппроксимирующее семейство накрытий, построенное при доказательстве теоремы о накрывающей группе. Получены обобщения некоторых ранее известных фактов об эндоморфизмах возведения в степень элементов диадических соленоидов. Исследован вопрос о плотности множеств периодических точек эндоморфизмов возведения в степень.

В диссертации редуцированные полугрупповые C^*-алгебры для полугрупп рациональных чисел рассмотрены в качестве пределов индуктивных последовательностей алгебр Теплица, определяемых последовательностями простых чисел. При изучении предельных эндоморфизмов этих C^*-алгебр найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы такие эндоморфизмы были $*$-автоморфизмами. Указанные критерии формулируются в алгебраических, теоретико-числовых и функциональных терминах.

С использованием естественной структуры топологической группы обратимых матриц в диссертации решена задача об аппроксимации элементов полной матричной алгебре.

Результаты работы ставят новые интересные задачи и указывают перспективные направления в развитии идей, содержащихся в диссертации.

Большой интерес представляет собой направление, связанное с изучением многочленов Вейерштрасса, задающих полиномиальные накрывающие отображения для компактных связных абелевых групп. В частности, естественно ставится задача нахождения вида многочленов Вейерштрасса для накрытий конкретных групп. К этой тематике относится работа Бардакова и Веснина [3]. Здесь, по-видимому, главные роли должны сыграть теория двойственности Понтрягина — ван Кампена и теория групп кос.

Другим направлением исследования является изучение пределов индуктивных систем C^*-алгебр над частично упорядоченными множествами и их $*$-автоморфизмов. Помимо самостоятельного интереса, потребность в изучении таких объектов мотивирована также важной ролью, которую играют индуктивные системы алгебр локальных наблюдаемых над частично упорядоченными множествами в аксиоматике алгебраической квантовой теории поля.

Результаты диссертации могут найти дальнейшие приложения при исследовании отображений компактных групп, в теории многочленов Вейерштрасса над коммутативными банаховыми алгебрами, в теории C^*-алгебр и в алгебраической квантовой теории поля.

Указатель обозначений

Предметный указатель

Литература

[1] Александров, П. С. Несколько моментов в развитии Московской школы общей топологии за последние полвека / П. С. Александров // Успехи матем. наук. — 1980. — Т. 35. — №4(214). — С. 217—221.

[2] Аухадиев, М. А. Операторный подход к квантованию полугрупп / М. А. Аухадиев, С. А. Григорян, Е. В. Липачева // Матем. сб. — 2014. — Т. 205. — №3. — С. 15—40.

[3] Бардаков, В. Г. Многочлены Вейерштрасса сингулярных кос и зацеплений / В. Г. Бардаков, А. Ю. Веснин // Чебышевский сб. – 2005. — Т. 6. — №2. — С. 36–51.

[4] Богатый, С. А. Классификация обобщенных соленоидов / С. А. Богатый, О. Д. Фролкина // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. — Вып. XXVI. — М.: МГУ, 2005. — С. 31–59.

[5] Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли. Глава IX. Компактные вещественные группы Ли / Н. Бурбаки. — М.: Мир, 1986. — 174 с.

[6] Вейль, А. Интегрирование в топологических группах и его применения / А. Вейль. — М.: Изд-во Иностр. лит-ры, 1950. — 222 с.

[7] Горин, Е. А. Группа кос и алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами / Е. А. Горин, В. Я. Лин // Успехи матем. наук. — 1969. — Т. 24. — №2. — С. 225–226.

[8] Горин, Е. А. Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос / Е. А. Горин, В. Я. Лин // Матем. сб. — 1969. — Т. 78. — №4. — С. 579–610.

[9] Горин, Е. А. Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора – ван Кампена / Е. А. Горин // Матем. сб. — 1970. — Т. 82. — №2. — С. 260–272.

[10] Горин, Е. А. Несколько примеров, связанных с алгебраическими уравнениями в алгебрах функций / Е. А. Горин // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 200. — №2. — С. 273–276.

[11] Горин, Е. А. О некоторых алгебраических уравнениях с голоморфными коэффициентами / Е. А. Горин // Успехи матем. наук. — 1972. — Т. 27. — №3. — С. 197–198.

[12] Горин, Е. А. Алгебраические уравнения в коммутативных банаховых алгебрах и смежные вопросы / Е. А. Горин // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1978. — Т. 81. — С. 58—61.

[13] Григорян, С. А. C^*-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением / С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов // Сиб. матем. журн. — 2010. — Т. 51. — №1. — С. 16–25.

[14] Григорян, С. А. Сети градуированных C^*-алгебр над частично упорядоченными множествами / С. А. Григорян, Е. В. Липачева, А. С. Ситдиков // Алгебра и анализ. — 2018. — Т. 30. — №6. — С. 1–19.

[15] Жиков, В. В. К проблеме существования почти периодических решений дифференциальных и операторных уравнений / В. В. Жиков // Труды ВЕЛИ. — Владимир, 1969. — Т. 8. — С. 94–188.

[16] Зюзин, Ю. В. Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами на однородных пространствах / Ю. В. Зюзин // Вести Моск. ун-та. – 1972. — №1. — С. 51–53.

[17] Зюзин, Ю. В. Неразветвленные алгебраические расширения коммутативных банаховых алгебр / Ю. В. Зюзин, В. Я. Лин // Матем. сб. — 1973. — Т. 91. — №3. — С. 402–420.

[18] Зюзин, Ю. В. Неприводимые голоморфные сепарабельные полиномы на букетах круговых колец / Ю. В. Зюзин // Успехи матем. наук. – 1974. — Т. 29. — №5. — С. 221–222.

[19] Зюзин, Ю. В. Неприводимые сепарабельные полиномы с голоморфными коэффициентами на некотором классе комплексных пространств / Ю. В. Зюзин // Матем. сб. — 1977. — Т. 102. — №4. — С. 569–591.

[20] Лин, В. Я. Косы Артина и связанные с ними группы и пространства / В. Я. Лин // Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 17. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. — М., 1979. — С. 159–227.

[21] Липачева, Е. В. Автоморфизмы некоторых подалгебр алгебры Теплица / Е. В. Липачева, К. Г. Овсепян // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57. — №3. — С. 666–674.

[22] Масси, У. С. Алгебраическая топология. Введение / У. С. Масси, Дж. Столлингс. — М.: Мир, 1977. — 344 с.

[23] Мёрфи, Дж. C^*-алгебры и теория операторов / Дж. Мёрфи. — М.: Факториал, 1997. — 336 с.

[24] Наймарк, М. А. Нормированные кольца / М. А. Наймарк. — М.: Наука, 1968. — 664 с.

[25] Немыцкий, В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. — ОГИЗ Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1947. — 448 с.

[26] Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. — М.: Наука, 1984. — 520 с.

[27] Стинрод, Н. Основания алгебраической топологии / Н. Стинрод, С. Эйленберг. — М.: Госиздат физ.-мат. лит-ры, 1958. — 403 с.

[28] Фукс, Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2 / Л. Фукс. — М.: Мир, 1977. — 416 с.

[29] Хелемский, А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах / А. Я. Хелемский. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — 288 с.

[30] Хелемский, А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии / А. Я. Хелемский. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

[31] Хьюитт, Э. Абстрактный гармонический анализ. Том 1 / Э. Хьюитт, К. Росс. — М.: Наука, 1975. — 654 с.

[32] Чирка, Е. М. Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в C^n / Е. М. Чирка // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 167. — №1. — С. 38—40.

[33] Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. / Б. В. Шабат. — М.:Наука, 1976. — 464 с.

[34] Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. — М.: Мир, 1986. — 751 с.

[35] Aarts, J. M. The classification of solenoids / J. M. Aarts, R. J. Fokkink // Proc. Amer. Math. Soc. — 1991. — V. 111. — P. 1161–1163.

[36] Aarts, J. M. Mappings on the dyadic solenoid / J. M. Aarts, R. J. Fokkink // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 2003. — V. 44. — №4. — P. 697–699.

[37] Adji, S. Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups / S. Adji, M. Laca, M. Nilsen, I. Raeburn // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — V. 122. — P. 1133–1141.

[38] Alexandroff, P. Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension / P. Alexandroff // Ann. Math. — 1929. — V. 30. — P. 101–187.

[39] Araki, H. Mathematical theory of quantum fields / H. Araki. — Oxford University Press, 2009. — 236 p.

[40] Atkinson, M. D. On the maximal multiplicative complexity of a family of bilinear forms / M. D. Atkinson, N. M. Stephens // Linear Algebra and Appl. — 1979. — V. 27. — P. 1–8.

[41] Atkinson, M. D. Bounds on the ranks of some 3-tensors / M. D. Atkinson, S. Lloyd // Linear Algebra and Appl. — 1980. — V. 31. — P. 19–31.

[42] Aukhadiev, M. A. An inverse semigroup approach to the C^*-algebras and crossed products of cancellative semigroups / M. A. Aukhadiev // Noncommut. Geom. — 2018. — V. 12. — P. 693–731.

[43] Aumann, G. Über Räume mit Mittelbildungen / G. Aumann // Math. Ann. — 1944. — V. 119. — P. 210–215.

[44] Bing, R. H. A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc / R. H. Bing // Canad. J. Math. — 1960. — V. 12. — P. 209–230.

[45] Bohr, H. Algebraic equations with almost-periodic coefficients / H. Bohr and D. A. Flanders // Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser. — 1937. — V. 15. — P. 1–49.

[46] Bohr, H. Algebraic functions of analytic almost periodic functions / H. Bohr and D. A. Flanders // Duke Math. J. — 1938. — V. 4. — №4. — P. 779–787.

[47] Brownlowe, N. Two families of Exel-Larsen crossed products / N. Brownlowe, I. Raeburn // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — V. 398. — P. 68–79.

[48] Brunetti, R. Advances in algebraic quantum field theory, mathematical physics studies / R. Brunetti, C. Dappiaggi, K. Fredenhagen, J. Yngvason, (eds.) — Springer International Publishing, Berlin, 2015. — 453 p.

[49] Bucur, I. Introduction to the Theory of Categories and Functors / I. Bucur and A. Deleanu, with the collaboration of P. J. Hilton. — Pure and Applied Mathematics, Vol. XIX, Wiley — Interscience Publ., London — New York — Sydney, 1968. — 224 p.

[50] Charatonik, J. J. Means on arc-like continua / J. J. Charatonik // Problems from Topology Proceedings. Ed. by E. Pearl. — arXiv:math/0312456v1, 2003. — P. 197–200.

[51] Charatonik, J. J. On covering mappings on solenoids / J. J. Charatonik, P. P. Covarrubias // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — V. 130. — P. 2145–2154.

[52] Clark, A. A generalization of Hagopian's theorem and exponents / A. Clark // Topol. Appl. — 2002. — V. 117. — P. 273–283.

[53] Coburn, L. A. The C^*-algebra generated by an isometry / L. A. Coburn // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 73. — №5. — P. 722–726.

[54] Coburn, L. A. The C^*-algebra generated by an isometry. II / L. A. Coburn // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 137. — P. 211–217.

[55] Coburn, L. A. C^*-algebras of operators on a half-space / L. A. Coburn, R. G. Douglas // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1971. — V. 40. — P. 59–68.

[56] Coburn, L. A. C^*-algebras of operators on a half-space II. Index theory / L. A. Coburn, R. G. Douglas, D. G. Schaeffer, and I. M. Singer // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1971. — V. 40. — P. 69–79.

[57] Countryman, R. S. (Jr.) On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed / R. S. (Jr.) Countryman // Pacific. J. Math. — 1967. — V. 20. — №3. — P. 433–448.

[58] van Dantzig, D. Über metrisch homogene Räume / D. van Dantzig, B. L. van der Waerden // Abh. Math. Seminar Hamburg. — 1928. — V. 6. — P. 367–376.

[59] van Dantzig, D. Über topologisch homogene Kontinua / D. van Dantzig // Fund. Math. — 1930. — V. 15. — P. 102–125.

[60] van Dantzig, D. Zur topologischen Algebra, III, Brouwersche und Cantorsche Gruppen / D. van Dantzig // Compositio Math. — 1936. — V. 3. — P. 408–426.

[61] Deckard, D. On matrices over the ring of continuous functions on a Stonian space / D. Deckard and C. Pearcy // Proc. Amer. Math. Soc. — 1963. — V. 14. — P. 322–328.

[62] Deckard, D. On algebraic closure in function algebras / D. Deckard and C. Pearcy // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — V. 15. — P. 259–263.

[63] Douglas, R. G. On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quater-plane / R. G. Douglas, R. Howe // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — V. 158. — P. 203–217.

[64] Douglas, R. G. On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries. / R. G. Douglas // Acta Math. — 1972. — V. 128. — P. 143–152.

[65] Dydak, J. Overlays and group actions / J. Dydak // Topology Appl. — 2016. — V. 207. — P. 22–32.

[66] Eckmann, B. Räume mit Mittelbildungen / B. Eckmann // Comment. Math. Helv. — 1954. — V. 28. — P. 329–340.

[67] Eckmann, B. Generalized means / B. Eckmann, T. Ganea, P. J. Hilton // Studies in Math. Anal., Stanford Univ. Press, 1962. — P. 82–92.

[68] Eckmann, B. Social choice and topology, a case of pure and applied mathematics / B. Eckmann // Expos. Math. — 2004. — V. 22 — P. 385–393.

[69] Eda, K. Finite-sheeted covering maps over 2-dimensional connected, compact Abelian groups / K. Eda and V. Matijević // Topology Appl. — 2006. — V. 153. — P. 1033–1045.

[70] Eda, K. Covering maps over solenoids which are not covering homomorphisms / K. Eda and V. Matijević // Fund. Math. — 2013. — V. 221. — P. 69–82.

[71] Eda, K. Existence and uniqueness of group structures on covering spaces over groups / K. Eda and V. Matijević // Fund. Math. — 2017. — V. 238. — P. 241–267.

[72] Feinstein, J. F. Extensions of endomorphisms of $C(X)$ / J. F. Feinstein, T. J. Oliver // Proc. Amer. Math. Soc. — 2007. — V. 135. — №1. — P. 109–117.

[73] Fort, M. K. Jr. Images of Plane Continua / M. K. Jr. Fort // Amer. J. Math. — 1959. — V. 81. — №3. — P. 541–546.

[74] Fox, R. H. On shape / R. H. Fox // Fund. Math. – 1972. – V. 74. – P. 47–71.

[75] Fox, R. H. Shape theory and covering spaces / R. H. Fox // Lecture Notes in Math. Topology Conference Virginia Polytechnic Institute, 1973 (ed. R. F. Dickman, P. Fletcher, eds.) — Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1974. — V. 375 — P. 71–90.

[76] Grove, K. Diagonalizing Matrices over $C(X)$ / K. Grove, G. K. Pedersen // J. Functional Analysis. — 1984. — V. 59. — P. 65–89.

[77] Haag, R. An algebraic approach to quantum field theory / R. Haag, D. Kastler // J. Math. Phys. — 1964. — V. 5. — №7. — P. 848–861.

[78] Haag, R. Local quantum physics: fields, particles, algebras / R. Haag. — 2nd. rev and enlarged ed. — Springer Texts and Monographs in Physics, 1996. — 390 p.

[79] Hansen, V. L. Embedding finite covering spaces into trivial bundles / V. L. Hansen // Math. Ann. — 1978. — V. 236. — P. 239–243.

[80] Hansen, V. L. Polynomial covering spaces and homomorphisms into braid groups / V. L. Hansen // Pacific J. Math. — 1979. — V. 81. — P. 399–410.

[81] Hansen, V. L. Coverings defined by Weierstrass polynomials / V. L. Hansen // J. Reine Angew. Math. — 1980. — V. 314. — P. 29–39.

[82] Hansen, V. L. Algebra and Topology of Weierstrass polynomials / V. L. Hansen // Exposition. Math. — 1987. — V. 5. — P. 267–274.

[83] Hansen, V. L. A model for embedding finite coverings defined by principle bundles into bundules of manifolds / V. L. Hansen // Topology Appl. — 1988. — V. 28. — P. 1–9.

[84] Hansen, V. L. The characteristic algebra of a polynomial covering map / V. L. Hansen // Math. Scand. — 1989. — V. 64. — P. 219–225.

[85] Hansen, V. L. Braids and coverings: selected topics. London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 18 / V. L. Hansen. — Cambridge University Press, Cambridge, 1989. — 202 p.

[86] Hansen, V. L. Weierstrass polynomials for links / V. L. Hansen // Contributions to Algebra and Geometry. — 1998. — V. 39. — P. 359–365.

[87] Hansen, V. L. Groups, coverings and Galois theory / V. L. Hansen, P. Petersen // Can. J. Math. — 1991. — V. 43. — №6. — P. 1281–1293.

[88] Hatori, O. On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another / O. Hatori, T. Miura // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 128. — P. 239–242.

[89] Hofmann, K. H. The structure of compact groups: a primer for the student, a handbook for the expert / K. H. Hofmann, S. A. Morris. — 2nd rev. ed. — De Gruyter studies in mathematics 25, Walter de Gruyter. Berlin, New York, 2006. — 858 p.

[90] Honma, D. On characterization of compact Hausdorff space X for which certain algebraic equation is solvable in $C(X)$ / D. Honma, T. Miura // Tokyo J. Math. — 2007. — V. 30. — P. 403–416.

[91] Hopf, H. Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen / H. Hopf // Comment. Math. Helv. — 1940. — V. 13. — №1. — P. 119–143.

[92] Hu, S.-T. Homotopy theory / S.-T. Hu. — Academic Press, New York and London, 1959. — 347 p.

[93] Hurder, S. Wild solenoids / S. Hurder, O. Lukina // Trans. Amer. Math. Soc. — 2019. — V. 371. — №7. — P. 4493–4533.

[94] Jiang, B. No embeddings of solenoids into surfaces / B. Jiang, S. Wang, H. Zheng // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — V. 136. — №10. — P. 3697–3700.

[95] Kadison, R. V. Diagonalizing matrices over operator algebras / R. V. Kadison // Bull. Amer. Math. Soc. — 1983. — V. 8. — P. 84–86.

[96] Kadison, R. V. Diagonalizing matrices / R. V. Kadison // Amer. J. Math. — 1984. — V. 106. — №6. — P. 1451-–1468.

[97] Kadison, R. V. Fundamentals of the theory of operator algebras. V. I,II / R. V. Kadison, J. R. Ringrose. — London: Acad. Press, 1986. — 1074 p.

[98] van Kampen, E. R. On almost periodic functions of constant absolute value / E. R. van Kampen // J. London Math. Soc. — 1937. — V. 12. — №1. — P. 3–6.

[99] Kawamura, K. On the existence of continious (approximate) roots of algebraic equations / K. Kawamura, T. Miura // Topology Appl. — 2007. — V. 154. — №2. — P. 434–442.

[100] Kawamura, K. On the root closedness of continuous function algebras / K. Kawamura, T. Miura // Topology Appl. — 2009. — V. 156. — №3. — P. 624–628.

[101] Kawamura, K. Higher dimensional compacta with algebraically closed function algebras / K. Kawamura // Tokyo J. Math. — 2009. — V. 32. — №2. — P. 441–445.

[102] Keesling, J. The group of homeomorphisms of a solenoid / J. Keesling // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 172. — P. 119–131.

[103] Kolmogorov, A. N. Sur la notion de la moyenne / A. N. Kolmogorov // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (ser. 6) — 1930. — V. 12. — P. 388–391.

[104] Krupski, P. Means on solenoids / P. Krupski // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — V. 131. — P. 1931–1933.

[105] Kwapisz, J. Homotopy and dynamics for homeomorphisms of solenoids and Knaster continua / J. Kwapisz // Fundam. Math. — 2001. — V. 168. — P. 251–278.

[106] Li, X. Semigroup C^*-algebras and amenability of semigroups / X. Li // J. Funct. Anal. — 2012. — V. 262. — P. 4302–4340.

[107] Li, X. Nuclearity of semigroup C^*-algebras and the connection to amenability X. Li // Adv.Math. — 2013. — V. 244. — P. 626–662.

[108] Li, X. Semigroup C^*-algebras / X. Li // arxiv:1707.05940v1 [math.OA] — 2017. — 105 p.

[109] Lipacheva, E. V. Embedding semigroup C^*-algebras into inductive limits / E. V. Lipacheva // Lobachevskii J. Math. — 2019. — V. 40. — №5. — P. 667–675.

[110] Mardešić, S. Classifying overlay structures of topological spaces / S. Mardešić, V. Matijević // Topology Appl. — 2001. — V. 113. — P. 167–209.

[111] Matijević, V. Classifying finite-sheeted coverings of paracompact spaces / V. Matijević // Revista Mat. Comput. — 2003. — V. 16. — P. 311–327.

[112] McCord, M. C. Inverse limit sequences with covering maps / M. C. McCord // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — V. 114. — P. 197–209.

[113] Miura, T. On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras / T. Miura, K. Niijima // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — V. 131. — P. 2869–2876.

[114] Møller, J. M. On polynomial coverings and their classification / J. M. Møller // Math. Scand. — 1980. — V. 47. — p. 116–122.

[115] Moore, T. T. On Fox's theory of overlays / T. T. Moore // Fund. Math. — 1978. — V. 99. — P. 205–211.

[116] Murphy, G. J. Ordered groups and Toeplitz algebras / G. J. Murphy // J. Oper.Theory. — 1987. — V. 18. — P. 303–326.

[117] Murphy, G. J. Simple C^*-algebras and subgroups of Q / G. J. Murphy // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — V. 107. — P. 97–100.

[118] Murphy, G. J. Ordered groups and crossed products of C^*-algebras / G. J. Murphy // Pacific J. Oper. Math. — 1991. — V. 2. — P. 319–349.

[119] Murphy, G. J. Toeplitz operators and algebras / G. J. Murphy // Math. Z. — 1991. — V. 208. — P. 355–362.

[120] Murphy, G. J. Crossed products of C^*-algebras by semigroups of automorphisms / G. J. Murphy // Proc. Lond. Math. Soc. — 1994. — V. 3. — P. 423–448.

[121] Pedersen, G. K. C^*-algebras and their automorphism groups / G. K. Pedersen. — London, New York, San Francisco: Academic Press, 1979. — 416 p.

[122] Rordam, M. An introduction to K-theory for C^*-algebras. London Math. Soc. Student Texts 49 / M. Rordam, F. Larsen, N. Lausten. — Cambridge Univ. Press, 2000. — 242 p.

[123] Ruzzi, G. Homotopy of posets, net-cohomology and superselection sectors in globally hyperbolic space-times / G. Ruzzi // Rev. Math. Phys. — 2005. — V. 17. — №9. — P. 1021–1070.

[124] Ruzzi, G. A new light on nets of C^*-algebras and their representations / G. Ruzzi, E. Vasselli // Comm. Math. Phys. — 2012. — V. 312. — №3. — P. 655—694.

[125] Ruzzi, G. The $C_0(X)$-algebra of a net and index theory / G. Ruzzi, E. Vasselli // J. Functional Anal. — 2014. — V. 267. — №1. — P. 112–143.

[126] Ruzzi, G. The K-homology of nets of C^*-algebras / G. Ruzzi, E. Vasselli // J. Geometry and Phys. — 2014. — V. 86. — P. 476–491.

[127] Scheffer, W. A. Maps between topological groups that are homotopic to homomorphisms / W. A. Scheffer // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 33. — P. 562–567.

[128] Spanier, E. H. Algebraic topology / E. H. Spanier. — McGraw-Hill, New York, 1966. — 548 p.

[129] Tyrtyshnikov, E. E. Tensor ranks for the inversion of tensor-product binomials / E. E. Tyrtyshnikov // J. Comput. Appl. Math. — 2010. — V. 234. — №11. — P. 3170–3174.

[130] Vasselli, E. Presheaves of symmetric tensor categories and nets of C^*-algebras / E. Vasselli // J. Noncommut. Geometry. — 2015. — V. 9. — №1. — P. 121–159.

[131] Vietoris, L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen / L. Vietoris // Math. Ann. — 1927. — V. 97. — P. 454–472.

[132] Walther, A. Algebraische Funktionen von fastperiodischen Funktionen / A. Walther // Monatshefte fur Mathematik und Physik. — 1933. — V. 40. — P. 444–457.

[133] Weierstrass, K. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen Veränderlichen sich beziechende Sätze / K. Weierstrass // Mathematische Werke, II. — Berlin: Mayer und Müller, 1895. — P. 135–188.

[134] Whyburn, G. T. Analytic topology / G. T. Whyburn. — Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 28, Providence, 1942. — 281 p.

[135] Williams, R. F. A note on unstable homeomorphisms / R. F. Williams // Proc. Amer. Math. Soc. — 1955. — V. 6. — P. 308–309.

[136] Williams, R. F. One-dimensional nonwandering sets / R. F. Williams // Topology. — 1967. — V. 6. — P. 473–487.

[137] Youcheng, Z. Covering mapping on solenoids and their dynamical properties / Z. Youcheng // Chinese Sci. Bull. — 2000. — V. 45. — P. 1066–1070.

[138] Zame, W. R. Covering spaces and the Galois theory of commutative Banach algebras / W. R. Zame // J. Funct. Anal. — 1984. — V. 55. — P. 151–175.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи из списков RSCI, Scopus, WoS

[139] Гумеров, Р. Н. Многочлены Вейерштрасса и накрытия компактных групп / Р. Н. Гумеров // Сибирский матем. журнал. — 2013. — Т. 54. — №2. — С. 320–324. — Пер. на англ.: Sib. Math. J. — 2013. — V. 54.— №2. — P. 243–246.

[140] Гумеров, Р. Н. Характеры и накрытия компактных групп / Р. Н. Гумеров // Изв. Вузов. Матем. — 2014. — Т. 58. — №4. — С. 11–17. — Пер. на англ.: Russ. Math. — 2014. — V. 58. — №4. — P. 7–13.

[141] Гумеров, Р. Н. Предельные автоморфизмы C^*-алгебр, порожденных изометрическими представлениями полугрупп рациональных чисел /

Р. Н. Гумеров // Сибирский матем. журнал. — 2018. — Т. 59. — №1. — С. 95–109. — Пер. на англ.: Sib. Math. J. — 2018. — V. 59.— №1. — P. 73–84.

[142] Гумеров, Р. Н. Об индуктивных пределах систем C^*-алгебр / Р. Н. Гумеров, Е. В. Липачева, Т. А. Григорян // Изв. Вузов. Матем. — 2018. — Т. 62. — №7. — С. 79–85. — Пер. на англ.: Russ. Math. — 2018. — V. 62. — №7. — P. 68–73.

[143] Гумеров, Р. Н. Нормальные расширения полугрупп и вложения полугрупповых C^*-алгебр / Р. Н. Гумеров // Труды МФТИ. — 2020. — Т. 12. — №1. — С. 74–82.

[144] Гумеров, Р. Н. О накрывающих группах / Р. Н. Гумеров // Изв. Вузов. Матем. — 2020. — Т. 64. — №3. — С. 85–91.

[145] Grigorian, S. A. Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, A. V. Kazantsev // Lobachevskii J. Math. — 2000. — V. 6. — P. 39–46.

[146] Grigorian, S. A. On a covering group theorem and its applications / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov // Lobachevskii J. Math. — 2002. — V. 10. — P. 9–16.

[147] Gumerov, R. N. On finite-sheeted covering mappings onto solenoids / R. N. Gumerov // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — V. 133. — P. 2771–2778.

[148] Gumerov, R. N. On the existence of means on solenoids / R. N. Gumerov // Lobachevskii J. Math. — 2005. — V. 17. — P. 43–46.

[149] Grigorian, S. A. On the structure of finite coverings of compact connected groups / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov // Topology Appl. — 2006. — V. 153. — P. 3598–3614.

[150] Gumerov, R. N. Approximation by matrices with simple spectra / R. N. Gumerov, S. I. Vidunov // Lobachevskii J. Math. — 2016. — V. 37. — №3 — P. 240–243.

[151] Gumerov, R. N. On norms of operators generated by shift transformations arising in signal and image processing on meshes supplied with semigroup structures / R. N. Gumerov // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 2016. — V. 158. — 012042. — Режим доступа: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012042.

[152] Gumerov, R. N. Coverings of solenoids and automorphisms of semigroup C^*-algebras / R. N. Gumerov // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seria Fiziko-Matematicheskie Nauki. — 2018. — V. 160. — №2. — P. 275–286.

[153] Gumerov, R. N. A low-rank approximation of tensors and the topological group structure of invertible matrices / R. N. Gumerov, A. S. Sharafutdinov // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. — 2018. — V. 160. — №4. — P. 788–796.

[154] Gumerov, R. N. Inductive limits for systems of Toeplitz algebras / R.N. Gumerov // Lobachevskii J. Math. — 2019. — V. 40. — №4. — P. 469–478.

[155] Grigorian, S. A. On extensions of semigroups and their applications to Toeplitz algebras / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva // Lobachevskii J. Math. — 2019. — V. 40. — №12.— P. 2052–2061.

[156] Gumerov, R. N. On a topology and limits for inductive systems of C^*-algebras over partially ordered sets / R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva, T. A. Grigoryan // Int. J. Theor. Phys.(2019). — Published: 05 March 2019. — Режим доступа: https://doi.org/10.1007/s10773-019-04048-0.

[157] Gumerov, R. N. Inductive systems of C^*-algebras over posets: a survey / R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva // Lobachevskii J. Math. — 2020. — V. 41. — №4. — P. 641–651.

[158] Gumerov, R. N. Inductive sequences of Toeplitz algebras and limit automorphisms / R. N. Gumerov // Lobachevskii J. Math. — 2020. — V. 41. — №4. — P. 634–640.

Список прочих публикаций

[159] Гумеров, Р. Н. Средние на компактных группах / Р. Н. Гумеров // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 25. Казанск. матем. общ-во. Матер. межд. научной конф. «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 26 сентября — 1 октября 2004 года). — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва. Изд-во КГУ, 2004. — С. 97–98.

[160] Гумеров, Р. Н. Динамические свойства накрывающих отображений соленоидов / Р. Н. Гумеров // Тезисы докладов межд. конф. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвящ. 100–летию академика С. М. Никольского (Москва, МИРАН им. В. А. Стеклова, 23–29 мая 2005). — Москва, 2005. — с. 92.

[161] Гумеров, Р. Н. Свойства отображений соленоидов / Р. Н. Гумеров // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 30. Казанск. матем. общ-во. Матер. седьмой межд. Казанск. летней научной школы — конф. «Теория функций, ее прилож. и смежные вопросы» (Казань, 27 июня – 4 июля 2007 года). — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва. Изд-во КГУ, 2005. — С. 53–54.

[162] Гумеров, Р. Н. О накрытиях компактных групп / Р. Н. Гумеров // Тезисы докладов межд. конф. «Александровские чтения — 2006», посвящ. 110–летию со дня рождения академика П. С. Александрова (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, мех.-мат. фак-т, 30 мая — 2 июня 2006). – М.: Интернет — Ун-т Информ. Технологий, 2006. — С. 14.

[163] Гумеров, Р. Н. Динамика компактных групп / Р. Н. Гумеров // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 35. Казанск. матем. общ-во. Матер. восьмой межд. Казанск. летней научной школы — конф. «Теория функций, ее прилож. и смежные вопросы» (Казань, 27 июня — 4 июля 2007 года). — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва. Изд-во КГУ, 2007. — С. 87.

[164] Гумеров, Р. Н. Аппроксимация накрывающих отображений. Учеб.-метод. пособие / Р. Н. Гумеров. — Казань: КГУ, 2008. — 17 с.

[165] Гумеров, Р. Н. Конечнолистные накрытия соленоидов. Учеб.-метод. пособие. / Р. Н. Гумеров. — Казань: К(П)ФУ, 2014. — 17 с.

[166] Гумеров, Р. Н. О свойствах отображений топологических групп / Р. Н. Гумеров // Материалы Одиннадцатой Международной Казанской летней школы — конференции «Теория функций, ее прилож. и смежные вопросы». Труды матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 46. — Казань: К(П)ФУ, 2013. — С. 170–171.

[167] Гумеров, Р. Н. Об одной задаче матричной аппроксимации / Р. Н. Гумеров, С. И. Видунов // Материалы десятой международной конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 24–29 сентября 2014). — Казань: К(П)ФУ, 2014. — С. 240–241.

[168] Гумеров, Р. Н. Аппроксимация матрицами с простыми спектрами: топологический подход к задачам, возникающим в анализе данных и в теории тензорных рангов / Р. Н. Гумеров, С. И. Видунов // Материалы Двенадцатой Международной Казанской летней школы — конференции «Теория функций, ее прилож. и смежные вопросы». Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского, Т. 51. — Казань: К(П)ФУ, 2015. — С. 164–166.

[169] Grigorian, S. A. On covering groups of compact solenoids / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, A. V. Kazantsev // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 5. Мат-лы межд. науч. конф. «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 1–3 октября 2000). — Казань: Уни-пресс, 2000. — С. 240–241.

[170] Gumerov, R. N. On finite-sheeted covering mappings onto solenoids / R. N. Gumerov // https://arXiv:math/0312288v1. — 2003. — 8 p.

[171] Grigorian, S. A. On the structure of finite coverings of compact connected groups / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov // https://arxiv.org/pdf/math/0403329.pdf. — 2004. — 17 p.

[172] Gumerov, R. N. Covering spaces of compact groups / R. N. Gumerov // Abstracts of talks of the Tenth Prague Topological Symposium (Prague, August 13–19, 2006). — Elsevier, 2006. – P. 33–34.

[173] Gumerov, R. N. Matrices with simple spectra and Weierstrass polynomials arising in estimations of tensor ranks / R. N. Gumerov // Abstracts of talks of the International Mathematical Conference (Ufa, September 27–30, 2016). — Ufa: RITS BashSU, 2016. — P. 48–49.

[174] Gumerov, R. N. Weierstrass continuous varieties arising from coverings of compact groups and tensor approximation problems / R. N. Gumerov // Материалы международной конференции «Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии», посвященной юбилеям П. А. и А. П. Широковых. — Казань: К(П)ФУ, изд-во Академии наук РТ, 2016. — с. 47–48.

[175] Gumerov, R. N. Limit automorphisms of semigroup C^*-algebras / R. N. Gumerov // Abstracts of talks of the International Mathematical Conference on Function Theory dedicated to the centenary of corresponding member of USSR Academy of Sciences A. F. Leont'ev (Ufa, May 24–24, 2017). — Ufa, Russia: RITS BashSU, 2017. — P. 186.

[176] Gumerov, R. N. Chaotic coverings of solenoids and automorphisms of semigroup C^*-algebras / R. N. Gumerov // Abstracts of talks of the International conference «Probability Theory and Math. Stat.» (Kazan, November 7–10, 2017). — Kazan: KFU, 2017. — P. 10.

[177] Gumerov, R. N. Weierstrass polynomials and the structure of finite-sheeted covering mappings onto compact groups / R. N. Gumerov // Тезисы докладов Международной конференции «Комплексный анализ и геометрия» (Уфа, 23–26 мая 2018), отв. ред. З. Ю. Фазуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2018. — С. 17–18.

[178] Gumerov, R. On inductive systems of C^*-algebras arising in algebraic quantum field theory / R. Gumerov, E. Lipacheva, T. Grigoryan // Abstracts of talks of the 14-th Biennial IQSA Conference «Quantum Structures – 2018» (Kazan, July 16–20, 2018). — Kazan: KFU, 2018. — P. 29.

[179] Gumerov, R. On inductive limits for systems of C^*-algebras / R. Gumerov, E. Lipacheva, T. Grigoryan // Abstracts of talks of the International Conference dedicated to the 100th anniversary

of M. Djrbashyan (Yerevan, Armenia, October 22–24, 2018). — http://math.sci.am/sites/default/files/Djrbashyan-100.pdf — P. 32.

[180] Gumerov, R. N. Inductive limits for systems of Toeplitz algebras and their automorphisms / R. N. Gumerov // Abstracts of talks of the International Conference «Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis» (Dolgoprudny, June 17–21, 2019). — Dolgoprudny, Russia, 2019. — P. 36.

[181] Gumerov, R. N. On inductive systems of semigroup C^*-algebras / R. N. Gumerov // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвященной 125–летию со дня рождения основателя каф. алгебры Казанского унив-та чл.-корр. АН СССР Н. Г. Чеботарева и 75–летию со дня рождения зав. каф. акад. АН РТ М. М. Арсланова (Казань, 24–28 июня 2019). — Казань: К(П)ФУ, 2019. — С. 44–45.