

Отзыв научного руководителя на диссертацию
Курносова Артёма Дмитриевича
«Обратные задачи, связанные с независимостью
и доминированием в графах»,
представленную к защите на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертационная работа А. Д. Курносова посвящена задачам о размере и количестве независимых и доминирующих множеств вершин графов. Естественным образом возникая как в прикладных задачах, так и в теории графов, независимые и доминирующие множества являются активным объектом исследования теории графов с середины прошлого века. В частности, в прикладной теории коммуникационных сетей важную роль играют *связные доминирующие множества* как множества узлов сети, посредством которых удобно осуществлять маршрутизацию. Понятие *независимого множества* естественным образом возникает в задачах о раскрасках графов (ибо раскраска есть не что иное, как разбиение вершин графа на независимые множества). На языке независимых множеств могут быть сформулированы некоторые важные задачи комбинаторной теории чисел, теории корректирующих кодов, статистической физики. Важнейшие виды задач, связанных с независимыми и доминирующими множествами — получение оценок максимального размера таких множеств, а также перечисление как всех таких множеств, так и максимальных (по мощности или по включению). В диссертации А. Д. Курносова исследование проводится часто в терминах *обратных задач* теории графов, т.е. задач построения графов с заданными значениями соответствующих инвариантов, однако, в большинстве случаев можно переформулировать результаты в виде, более традиционном для экстремальной теории графов.

Большая по объёму часть работы А. Д. Курносова посвящена задачам на деревьях и двудольных графах. Деревья являются относительно простым, но вместе с тем, одним из важнейших классов графов. В частности, например, задача о минимальном количестве вершин в доминирующем множестве произвольного связного графа, порождающем связный подграф, эквивалентна вопросу о наибольшем количестве листьев в остовном дереве графа. При этом многие обратные задачи, связанные с деревьями, до сих пор не решены, что способствует неугасающему интересу исследователей к деревьям не только как инструменту в информатике и математическом моделировании, но и как объекту теоретических исследований.

Диссертация А.Д. Курносова содержит, помимо традиционных введения с обзором литературы, и заключения, шесть основных разделов; последние три раздела диссертации уместно считать главными, они содержат наиболее интересные с моей точки зрения находки автора, демонстрируют математическую интуицию автора и способность к скупулёзному анализу и качественному оформлению текста.

В первом разделе диссертации рассматриваются задачи минимизации, связанные с *перечислением* независимых множеств (в остальных разделах везде речь идёт об оценке максимального размера множеств). А.Д. Курносовым получена двусторонняя оценка количества вершин в двудольном графе с заданным числом независимости.

Второй и третий разделы диссертации содержат важные для последующих разделов вспомогательные утверждения относительно числовых последовательностей, реализуемых как степени вершин графов. В частности, вводятся и исследуются специальные операции по преобразованию графа в духе т.н. операции 4-сдвига, широко известной локальной операции, сохраняющей степенную последовательность графа.

Четвёртый раздел работы посвящён исследованию числа независимости деревьев с заданными степенями вершин. А.Д. Курносовым получены точные нижняя и верхняя оценки числа независимости (α) у деревьев с заданной последовательностью степеней вершин. Устанавливается связь между множеством соответствующих экстремальных деревьев и множеством деревьев, на которых достигается максимум количества вершин, смежных с листьями; соотношение между этими двумя множествами деревьев подробно описывается. Одним из важных достижений диссертации является утверждение о достижимости всех промежуточных значений числа α между двумя «крайностями», при этом А.Д. Курносовым разработан вычислительно эффективный способ построения соответствующих последовательностей деревьев, некоторые подробности которого вынесены автором диссертационной работы в Приложение.

Вопросы, рассматриваемые в пятом разделе диссертации по характеру аналогичны четвёртому разделу, но на сей раз рассматривается задача об оценке *числа доминирования* γ (минимального размера доминирующего множества). А.Д. Курносовым доказываются точные нижняя и верхняя оценки γ у деревьев с фиксированными степенями вершин. Нижняя оценка была ранее известна в другой форме и с более трудным доказательством. Несомненной заслугой А.Д. Курносова стало существенное упрощение как вида, так и техники доказательства оценки, а также конструктивность этой оценки. Весьма интересными являются утверждения пятого раздела, касающиеся взаимному положению трёх множеств деревьев с предписанными степенями вершин: реализующих минимум α , реализующих максимум γ , а также реализующих максимум количества смежных с листьями вершин. Часто оказывается, что эти классы существенно пересекаются, но важность работы А.Д. Курносова в степени детализации, с которой эти пересечения описаны. Аналогично четвёртому разделу, А.Д. Курносовым приводится вычислительно эффективная процедура построения последовательности реализаций всех промежуточных значений γ .

Шестой раздел диссертации посвящён нижним оценкам числа связного доминирования в связных графах, близких к регулярным. В качестве таких графов рассмотрены, во-первых, графы, в которых большинство вершин имеют равные степени, а во-вторых, класс бирегулярных графов с листьями (то есть все вершины имеют степень либо 1, либо k при некотором k).

В ряде случаев А.Д. Курносову удалось получить точную нижнюю оценку числа связного доминирования, а также установить весьма интересные эффекты типа «фазового перехода», когда малое изменение параметров класса графов приводит к существенному изменению поведения числа связного доминирования на этом классе.

Диссертация является достойным исследованием в области теории графов, результаты диссертации опубликованы в рецензируемых изданиях и представляют интерес для специалистов в области теории графов и её приложений. Диссертационная работа А.Д. Курносова «Обратные задачи, связанные с независимостью и доминированием в графах» полностью соответствует требованиям *Положения о присуждении учёных степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ*, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Научный руководитель,
кандидат физико-математических наук, доцент



А.Б. Дайняк

