УДК 519.174.7

О. А. Костина[1], *А. М. Райгородский*[1,2]

[1]Московский государственый университет имени М. В. Ломоносова
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

О новых нижних оценках хроматического числа сферы

Настоящая работа посвящена исследованию хроматического числа сферы $\chi(S_r^{n-1})$. В работе приводятся новые нижние оценки данной величины при разных радиусах. Эти оценки сопоставляются с известными ранее, указываются значения радиусов сферы, при которых новые оценки оказываются лучше результатов предыдущих исследователей.

Ключевые слова: хроматическое число сферы, линейно-алгебраический метод, теорема Франкла–Уилсона, проблема Нельсона–Хадвигера, дистанционные графы.

O. A. Kostina[1], *A. M. Raigorodskii*[1,2]

[1]Lomonosov Moscow State University
[2]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

On the new lower bounds of the chromatic number of sphere

The paper is devoted to the study of the chromatic number of sphere $\chi(S_r^{n-1})$. The paper contains the new lower bounds of this value for different radii. These bounds are ompared with those obtained earlier. We also give such values of sphere radii that the new bounds appear to be better than the results obtained in previous research.

Key words: chromatic number of sphere, linear-algebraic method, Frankl–Wilson theorem, Nelson–Hadwiger problem, distance graphs.

1. Введение и формулировка результата

В 1981 году Эрдеш предложил задачу отыскания *хроматического числа сферы* $S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ радиуса $r \geqslant \frac{1}{2}$, т.е. величины $\chi(S_r^{n-1})$, равной наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки сферы, чтобы расстояние между любыми двумя точками одного цвета не равнялось единице (см. [1])[1]. С одной стороны, эта задача тесно связана с классической проблемой Нелсона–Хадвигера об отыскании *хроматического числа пространства*, т.е. величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, определение которой полностью аналогично определению числа $\chi(S_r^{n-1})$, данному выше (см. [7] – [5]). С другой стороны, эта задача находится в русле не менее классических исследований плотнейших упаковок и редчайших покрытий сфер и, таким образом, примыкает к проблематике дискретной геометрии и теории кодирования (см. [8] – [12]).

Практически сразу после постановки задачи Эрдешем Ловас доказал, что при любом $r > \frac{1}{2}$ и при любом n выполнено неравенство $\chi(S_r^{n-1}) \geqslant n$ (см. [13]); при этом очевидно, что $\chi(S_{1/2}^{n-1}) = 2$. В то же время ясно, что $\chi(S_r^{n-1}) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n)$, а про последнюю величину известно, благодаря Ларману и Роджерсу (см. [8]), что она не больше, чем $(3 + o(1))^n$. Наконец, из работы Роджерса [8] следует неравенство $\chi(S_r^{n-1}) \leqslant (2r + o(1))^n$, и это более сильная оценка при $r < 1.5$. Тем не менее обе верхние оценки экспоненциальны, тогда как нижняя оценка линейна.

Указанную проблему устранил Райгородский, доказавший в [12], [13] следующую теорему.

[1]Расстояние вычисляется в евклидовой метрике во всем $\mathbb{R}^n$, в котором расположена сфера.

Теорема 1. *Если* $r \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \left(2\left(\frac{1}{8r^2}\right)^{\frac{1}{8r^2}}\left(1-\frac{1}{8r^2}\right)^{1-\frac{1}{8r^2}}+o(1)\right)^n.$$

Если $r \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}+o(1)\right)^n.$$

Теорема показывает, что при каждом $r > \frac{1}{2}$ хроматическое число сферы растет не линейно, а экспоненциально. Однако зазоры между верхними и нижними оценками достаточно велики, даже если смотреть только на величины $c_1(r)$ и $c_2(r)$ в имеющихся неравенствах типа

$$(c_1(r)+o(1))^n \leqslant \chi(S_r^{n-1}) \leqslant (c_2(r)+o(1))^n.$$

В своей недавней совместной работе [17] авторы настоящей статьи улучшили теорему 1. А именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $r \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$. *Пусть* $c \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right]$, $a = [cn]$. *Положим* $p_0 = p_0(r,c,n)$ *равным* $\frac{a(n-a)}{2nr^2}$. *Пусть* $p = p(r,c,n)$ *— минимальное простое число, строго большее, чем* p_0. *Имеют место два случая.*

1) *Пусть при данных* r,c,n *выполнено* $a-2p<0$. *Тогда*

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^a}{\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

2) *Пусть при данных* r,c,n *выполнено* $a-2p \geqslant 0$. *Тогда положим* $d = a-2p+1$ *и выберем* t *из системы неравенств*

$$(a-d+1)\left(2+\frac{d-1}{t+1}\right) \leqslant n < (a-d+1)\left(2+\frac{d-1}{t}\right).$$

В итоге

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^a C_a^{d+t} C_{n-a}^t}{C_n^{d+2t} C_n^d \sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

Конечно, из формулировок теорем 1 и 2 практически невозможно понять, какова в них зависимость от r величин c_1. Поэтому в разделе 2 мы приведем таблицу численных результатов. Но прежде сформулируем основное утверждение настоящей работы, которое, как мы увидим, опять-таки, в разделе 2, зачастую дает дальнейшие улучшения как теоремы 1, так и теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $r > \frac{1}{2}$. *Пусть* b_1, b_{-1} *таковы, что* $b_1 + b_{-1} \in (0,\ 1]$ *и* $b_{-1} < b_1$. *Пусть* $k_1 = [b_1 n]$, $k_{-1} = [b_{-1} n]$. *Положим* $p_0 = p_0(r, b_1, b_{-1}, n)$ *равным*

$$\frac{(k_1+k_{-1})\,n-(k_1-k_{-1})^2}{2nr^2}.$$

Пусть $p = p(r, b_1, b_{-1}, n)$ *— минимальное простое число, строго большее, чем* p_0. *Если при данных* r, b_1, b_{-1}, n *выполнено* $k_1 + k_{-1} - 2p < -2k_{-1}$, *то*

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{A}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}},$$

где

$$\mathcal{A} = \{(m_1, m_2):\ m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\},\quad m_1 + m_2 \leqslant n,\quad m_1 + 2m_2 \leqslant p - 1\}.$$

В следующем разделе мы осуществим сопоставление результатов теорем 1–3, а в разделе 3 приведем несколько комментариев.

2. Сопоставление оценок из теорем 1–3

Введем обозначения $c_1^i(r)$ для величин $c_1(r)$, возникающих в оценках $\chi(S_r^{n-1}) \geqslant (c_1(r) + o(1))^n$ в результате применения теорем 1, 2 и 3 соответственно. Таким образом, можно сразу сказать, что

$$c_1^1(r) = 2\left(\frac{1}{8r^2}\right)^{\frac{1}{8r^2}}\left(1 - \frac{1}{8r^2}\right)^{1-\frac{1}{8r^2}}, \quad r \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

$$c_1^1(r) = c_1^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = 1.139\ldots, \quad r \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В работе [17] показано, что величина $c_1^2(r)$ тождественно совпадает с величиной $c_1^1(r)$ при $r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\ldots$ А улучшения имеют место при всех таких r, что

$$0.707\ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} < r \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0.84\ldots$$

Здесь величина $c_1^2(r)$ строго возрастает от константы $1.139\ldots$, на которой стабилизировалась к этому времени величина $c_1^1(r)$, до константы $1.207\ldots = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. На самом деле, при бо́льших r автоматически верно $c_1^2(r) = 1.207\ldots$, поскольку заведомо $S_r^{n-1} \subset S_{r'}^n$, коль скоро $r' > r$, откуда $\chi(S_{r'}^n) \geqslant \chi(S_r^{n-1})$.

Касательно величины $c_1^3(r)$ численные эксперименты показали, что при $r \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\ldots$ эта величина меньше единицы, т.е. теорема 3 совсем не работает. Зато уже при $r = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\ldots$ имеем $c_1^3(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.154\ldots > 1.139\ldots$, и дальше теорема 3 также всегда сильнее теоремы 2. При этом величина $c_1^3(r)$ строго возрастает до $r = r_* = 0.79\ldots$ и $c_1^3(r_*) = 1.239\ldots$, после чего применимо рассуждение из предыдущего абзаца, т.е. при всех $r \geqslant r_*$ имеем $\chi(S_r^{n-1}) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n$.

Наконец, $c_1^3(r) > c_1^1(r)$, начиная с $r = 0.67\ldots$ В итоге получается, что теорема 2 везде покрывается теоремами 1 и 3. Ниже мы приводим таблицу численных результатов. В табл. 1 жирным шрифтом выделены лучшие из двух нижних оценок.

3. Комментарии

3.1. Комментарий 1

Для хроматического числа пространства известны нижние оценки. Разумеется, они экспоненциальны, ведь $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(S_r^{n-1})$. Более того, исторически первая экспоненциальная оценка была получена в 1981 году Франклом и Уилсоном в замечательной статье [9]. И эта оценка имела вид

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} + o(1)\right)^n = (1.207\ldots + o(1))^n.$$

Иными словами, в теореме 2 нам удалось распространить метод Франкла–Уилсона на все сферы и, в частности, показать, что при $r \geqslant \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0.84\ldots$ нижняя оценка хроматического числа сферы совпадает с нижней оценкой Франкла–Уилсона хроматического числа пространства.

Таблица 1

Сопоставление оценок из теорем 1–3 при разных радиусах

r	$c_1^1(r)$	$c_1^3(r)$	$c_2(r)$
0.50000	**1.00000**	0.99999	1.00000
0.51000	**1.00075**	0.99999	1.02000
0.52000	**1.00285**	0.99999	1.04000
0.53000	**1.00608**	0.99999	1.06000
0.54000	**1.01026**	0.99999	1.08000
0.55000	**1.01525**	0.99999	1.10000
0.56000	**1.02092**	0.99999	1.12000
0.57000	**1.02718**	0.99999	1.14000
0.58000	**1.03392**	1.00024	1.16000
0.59000	**1.04107**	1.00475	1.18000
0.60000	**1.04858**	1.01316	1.20000
0.61000	**1.05638**	1.02386	1.22000
0.62000	**1.06442**	1.03589	1.24000
0.63000	**1.07267**	1.04871	1.26000
0.64000	**1.08108**	1.06200	1.28000
0.65000	**1.08962**	1.07557	1.30000
0.66000	**1.09827**	1.08930	1.32000
0.67000	**1.10700**	1.10314	1.34000
0.67600	**1.11227**	1.11147	1.35200
0.67700	**1.11315**	1.11286	1.35400
0.67800	1.11403	**1.11425**	1.35600
0.67900	1.11491	**1.11564**	1.35800
0.68000	1.11579	**1.11703**	1.36000
0.69000	1.12461	**1.13093**	1.38000
0.70000	1.13346	**1.14483**	1.40000
0.71000	1.13975	**1.15870**	1.42000
0.72000	1.13975	**1.17234**	1.44000
0.73000	1.13975	**1.18561**	1.46000
0.74000	1.13975	**1.19841**	1.48000
0.75000	1.13975	**1.21053**	1.50000
0.76000	1.13975	**1.22165**	1.52000
0.77000	1.13975	**1.23101**	1.54000
0.78000	1.13975	**1.23719**	1.56000
0.79000	1.13975	**1.23945**	1.58000

Оценка Франкла–Уилсона была улучшена в 2000 году Райгородским (см. [10]), который показал, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n$. Иначе говоря, теперь мы сумели перенести и тот метод на все сферы, причем совпадение оценок начинается уже с $0.79\ldots$

Все это говорит о том, что, по-видимому, в настоящей работе мы достигли того предела, преодоление которого возможно лишь при условии появления принципиально новых методов получения нижних оценок хроматических чисел пространств.

3.2. Комментарий 2

Видно, что теоремы 2 и 3 в некотором смысле похожи. Однако в теореме 2 рассмотрены два случая, тогда как в теореме 3 — только один. Можно было бы предположить, что и в теореме 3 имеет смысл ситуация, когда $k_1 + k_{-1} - 2p \geqslant -2k_{-1}$. А вдруг в этой ситуации возникнет улучшение?

Ответ на поставленный вопрос: и да, и нет. Да, ситуация, когда $k_1 + k_{-1} - 2p \geqslant -2k_{-1}$, имеет смысл. Но соответствующая формулировка очень громоздкая и при этом численные эксперименты показывают, что никаких улучшений она не дает. Поэтому в теореме 3 мы не стали ее выписывать. Тем не менее само утверждение представляет несомненный интерес, и теперь как раз уместно его сформулировать. Заметим, что если второй случай теоремы 2 опирался на недавние работы Пономаренко и Райгородского [20], [21], то для новой формулировки нужна совсем недавняя работа [22] тех же авторов.

Теорема 4. *Пусть параметры $r, b_1, b_{-1}, k_1, k_{-1}, p_0, p$ выбраны так же, как в теореме 3, только теперь $k_1 + k_{-1} - 2p \geqslant -2k_{-1}$. Пусть*

$$V_n(k_{-1}, k_1) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\},\ |\{i : x_i = -1\}| = k_{-1},\ |\{i : x_i = 1\}| = k_1\}.$$

Положим $d = k_1 + k_{-1} - 2p + 1$. Пусть $\mathfrak{m} = (m_1, m_2, m_3)$,

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_{-1,1} & m_{0,1} & m_{1,1} \\ m_{-1,2} & m_{0,2} & m_{1,2} \\ m_{-1,3} & m_{0,3} & m_{1,3} \end{pmatrix},$$

причем все элементы вектора и матрицы — натуральные числа,

$$m_1+m_2+m_3 = n,\ \ m_{-1,1}+m_{0,1}+m_{1,1} = m_1,\ \ m_{-1,2}+m_{0,2}+m_{1,2} = m_2,\ \ m_{-1,3}+m_{0,3}+m_{1,3} = m_3,$$

$$m_{-1,1} + m_{-1,2} + m_{-1,3} = k_{-1},\ \ m_{0,1} + m_{0,2} + m_{0,3} = n - k_1 - k_{-1},\ \ m_{1,1} + m_{1,2} + m_{1,3} = k_1$$

и выполнено еще одно условие, для формулировки которого нам потребуются дополнительные обозначения и термины. А именно, пусть множество $\{1, \ldots, n\}$ представлено в виде объединения трех непересекающихся частей M_1, M_2, M_3, мощности которых равны m_1, m_2, m_3 соответственно. Скажем, что вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in V_n(k_{-1}, k_1)$ удовлетворяет разбиению $T(M_1, M_2, M_3)$, если

$$|\{i \in M_1 : x_i = -1\}| = m_{-1,1},\ \ |\{i \in M_1 : x_i = 0\}| = m_{0,1},\ \ |\{i \in M_1 : x_i = 1\}| = m_{1,1},$$

$$|\{i \in M_2 : x_i = -1\}| = m_{-1,2},\ \ |\{i \in M_2 : x_i = 0\}| = m_{0,2},\ \ |\{i \in M_2 : x_i = 1\}| = m_{1,2},$$

$$|\{i \in M_3 : x_i = -1\}| = m_{-1,3},\ \ |\{i \in M_3 : x_i = 0\}| = m_{0,3},\ \ |\{i \in M_3 : x_i = 1\}| = m_{1,3}.$$

Еще одно условие, которому подчиняются параметры $\mathfrak{m}, \mathfrak{M}$, состоит в том, что у любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, удовлетворяющих одному и тому же разбиению, скалярное произведение не меньше d. Положим

$$m(n, k_{-1}, k_1) = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3!} \cdot \frac{m_{-1,1}! m_{-1,2}! m_{-1,3}!}{k_{-1}!} \cdot \frac{m_{0,1}! m_{0,2}! m_{0,3}!}{(n - k_1 - k_{-1})!} \cdot \frac{m_{1,1}! m_{1,2}! m_{1,3}!}{k_1!} \cdot \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j \right),$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i, j) : i + j \leqslant n,\ i + 2j \leqslant p - 1\}.$$

Тогда

$$\chi(S_r^{n-1}) \geqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{m(n, k_{-1}, k_1)}.$$

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-03530 и гранта НШ-2964.2014.1 поддержки ведущих научных школ.

Литература

1. *Erdős P., Graham R. L.* Problem proposed at the 6th Hungarian combinatorial conference // Eger. July. 1981.
2. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. 1944. V. 4. P. 140–144.
3. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.
4. *Raigorodskii A. M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. 2014. V. 625. P. 93–109.
5. *Raigorodskii A. M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory. 2013. P. 429–460.
6. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. 2001. Т. 56. № 1. С. 107–146.
7. *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics. Bolyai Series Budapest. J. Bolyai Math. Soc. 2002. V. 11. P. 649–666.
8. *Rogers C. A.* Covering a sphere with spheres. Mathematika, 1963. V. 10. P. 157–164.
9. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter // Geometric Aspects of Functional Analysis. Berlin: Springer–Verlag, 1991. P. 138–144.
10. *Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И.* О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. № 1. С. 3–25.
11. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. М: Мир, 1990.
12. *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Радио и связь, 1979.
13. *Lovaśz L.* Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere // Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 317–323.
14. *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24.
15. *Райгородский А. М.* О хроматических числах сфер в евклидовом пространстве // Доклады РАН. 2010. № 2, Т. 432. С. 174–177.
16. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinatorica. 2012. N 1. T. 32. P. 111–123.
17. *Костина О. А., Райгородский А. М.*, О нижних оценках хроматического числа сферы // Доклады РАН. 2015. Т. 463, № 6
18. *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. N 1. P. 357–368
19. *Райгородский А. М.* О хроматическом числе пространства // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, N 2. С. 147–148.
20. *Пономаренко Е. И., Райгородский А. М.* Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения // Доклады РАН. 2014. Т. 454, № 3. С. 268–269.
21. *Пономаренко Е. И., Райгородский А. М.* Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения // Проблемы передачи информации. 2013. Т. 49, № 4. С. 98–104.
22. *Пономаренко Е.И., Райгородский А. М.* Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 1. С. 138–147.

References

1. *Erdős P., Graham R. L.* Problem proposed at the 6th Hungarian combinatorial conference. Eger. July. 1981.
2. *Hadwiger H.* A covering theorem for Euclidean space. Portugaliae Math. 1944. V. 4. P. 140–144. (in German).
3. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.
4. *Raigorodskii A. M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters. Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. 2014. V. 625. P. 93–109.
5. *Raigorodskii A. M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters. Thirty Essays on Geometric Graph Theory. 2013. P. 429–460.
6. *Raigorodskii A. M.* Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces. Russian Mathematical Surveys. 2001. V. 56, N 1. P. 107–146.
7. *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems. Paul Erdős and his Mathematics. Bolyai Series Budapest. J. Bolyai Math. Soc. 2002. V. 11. P. 649–666.
8. *Rogers C. A.* Covering a sphere with spheres. Mathematika, 1963. V. 10. P. 157–164.
9. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter. Geometric Aspects of Functional Analysis. Berlin: Springer–Verlag, 1991. P. 138–144.
10. *Kabatyanskii G. A., Levenshtein V. I.* On bounds to packings on the sphere and in space. Problems of information transmission. 1978. N 1. P. 3–25. (in Russian).
11. *Convey J., Sloane N. J. A.*, Sphere packings, lattices and groups. M.: Mir, 1990. (in R.).
12. *MacWilliams F. J., Sloane N. J. A.* The theory of error-correcting codes. M.: Radio i svyaz, 1979. (in Russian).
13. *Lovaśz L.* Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere. Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 317–323.
14. *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space. Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24.
15. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in Euclidean spaces. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. 2010. N 2, V. 432. P. 174–177.
16. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$. Combinatorica. 2012. N 1, T. 32. P. 111–123.
17. *Kostina O. A., Raigorodskii A. M.*, On the lower bounds of the chromatic number of sphere. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. 2015. V. 463, N 6.
18. *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences. Combinatorica. 1981. N 1. P. 357–368
19. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic number of space. Russian Mathematical Surveys. 2000. V. 55, N 2. P. 147–148.
20. *Ponomarenko E. I., Raigorodskii A. M.* An improvement of the Frankl-Wilson theorem on the number of edges in a hypergraph with forbidden intersections of edges. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. 2014. V. 454, N 3. P. 268–269.
21. *Ponomarenko E. I., Raigorodskii A. M.* New estimates in the problem of the number of edges in a hypergraph with forbidden intersections. Problems of Information Transmission. 2013. V. 49, N 4. P. 98–104.
22. *Ponomarenko E. I., Raigorodskii A. M.* New upper bounds for the independence numbers of graphs with vertices in $\{-1, 0, 1\}^n$ and their applications to problems of the chromatic numbers of distance graphs. Mathematical Notes. 2014. V. 96, N 1. P. 138–147.

Поступила в редакцию 16.05.2015.