МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Беклемишев Д. В.

Кривые линии

москва
МФТИ
2013

УДК
ББК

Д. В. Беклемишев
К90 Кривые линии. – М.: МФТИ, 2013. – 22 с.

Эта методическая разработка, конечно не может заменить лекции или учебник. Она написана, в основном, для того, чтобы обратить внимание студентов на некоторые моменты, которые, как показывает практика, часто проходят незамеченными.

УДК
ББК

Содержание

1. Основные понятия

1. Определение. Трудность этой темы состоит, в основном, в отсутствии установившейся терминологии. В разных источниках одному и тому же объекту дают различные названия, и наоборот, один и тот же термин может обозначать различные объекты.

Нужно четко представлять себе, что имеются три различных рода объектов, которые называют термином *кривая линия*, чаще всего пропуская уточняющие этот термин слова.

1. *Векторная функция скалярного аргумента*: каждому вещественному числу t из множества T сопоставлен единственный вектор $\mathbf{r}(t)$ из множества векторов L. Это L — множество значений функции, т.е. каждый вектор из L имеет прообраз в множестве T. Ниже мы будем предполагать, что множество T — отрезок $T = [\alpha, \beta]$. Векторы — это векторы трехмерного арифметического пространства $\mathbb{R}^3$, то есть упорядоченные тройки чисел. Можно сказать, что это — векторы в трехмерном геометрическом пространстве при фиксированной декартовой прямоугольной системе координат. Мы можем отождествить точку пространства с её радиус-вектором.

За исключением некоторых вопросов, мы не будем касаться кривых на плоскости, то есть в том случае, когда вместо $\mathbb{R}^3$ используется $\mathbb{R}^2$. Всё, сказанное о кривых в трехмерном пространстве, легко переносится на кривые на плоскости.

Векторную функцию скалярного аргумента называют также *параметризованной кривой*. В этом случае точкой параметризованной кривой следует назвать пару $(t, \mathbf{r}(t))$, где $t \in T$.

Широко используется кинематическая интерпретация векторной функции скалярного аргумента. Такая функция описывает движение точки (конца вектора $\mathbf{r}(t)$) в зависимости от времени t.

Параметризованную кривую называют *непрерывной*, *дифференцируемой*, *непрерывно дифференцируемой* и т.д., если соответствующим свойством обладают координатные функции вектора $\mathbf{r}(x(t), y(t), z(t))$. Кривая называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема, и производная $\mathbf{r}'_t$ ни при одном t не обращается в нуль. Точки дифференцируемой кривой, в которых $\mathbf{r}'_t = \mathbf{0}$, называются *особыми точками*.

2. *Годограф векторной функции* — множество её значений L. Это то, что называется кривой линией в геометрии. В математическом анализе употребляется также термин *носитель кривой* (имеется в виду параметризованная кривая). В кинематической интерпретации это — *траектория* движущейся точки.

3. *Параметрическая кривая.* Рассмотрим числовое множество (отрезок) U и функцию $t = \varphi(u)$, которая отображает U на T. Это позволяет определить векторную функцию $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}(\varphi(u))$, имеющую то же самое множество значений L. Говорят, что на кривой произведена *замена параметра*. Замена параметра переводит одну параметризованную кривую в другую параметризованную кривую с тем же носителем.

Замена параметра называется *допустимой*, если функция $t = \varphi(u)$ строго монотонна и обладает теми же свойствами непрерывности, дифференцируемости и т.д., что и рассматриваемая параметризованная кривая. Для дифференцируемых кривых дополнительно требуется, чтобы производная $\varphi'(u)$ не обращалась в нуль. Легко видеть, что для каждой допустимой замены существует обратная, также допустимая, замена параметра. Кроме того, результат последовательного выполнения допустимых замен параметра является также допустимой заменой. В силу этого, всё множество параметризованных кривых с данным носителем L распадается на классы эквивалентных между собой параметризованных кривых: все кривые одного класса получаются допустимой заменой параметра из какой-нибудь произвольно выбранной кривой этого класса. Такой класс называется *параметрической кривой*.

Проще говоря, функции $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}_1(u)$ задают одну и ту же параметрическую кривую, если $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}(\varphi(u))$, где $\varphi(u))$ — допустимая замена параметра.

Рассуждая о параметрических кривых всегда имеют дело с одной из ее *параметризаций* (или, как еще говорят, *параметрических представлений*) — одной из параметризованных кривых (векторных функций), которые ее определяют. Это подобно тому как в геометрии, рассуждая о свободном векторе, мы смотрим на направленный отрезок, представляющий свободный вектор — класс равных направленных отрезков; или в арифметике, когда мы имеем дело с определенной дробью вида p/q, которая представляет рациональное число — класс всех дробей вида $(np)/(nq)$, $n \in \mathbb{N}$.

Можно сказать, что нас интересуют те свойства параметризованной кривой, которые не меняются при допустимой замене параметра.

Ниже термином *кривая* мы будем называть именно *параметрическую кривую.*

2. Ориентация кривой. Множество вещественных чисел упорядочено, и порядок точек на отрезке T естественным образом переносится на точки параметризованной кривой: точка $(t_2, \mathbf{r}(t_2))$ следует за точкой $(t_1, \mathbf{r}(t_1))$, если $t_1 < t_2$. Допустимая замена параметра по определению строго возрастает или строго убывает. Возрастающая замена параметра сохраняет порядок точек, а убывающая меняет его на противоположный. Это приводит к понятию *ориентации.* Класс параметризованных кривых, получаемых одна из другой возрастающей допустимой заменой параметра называется *ориентированной параметрической кривой.* Для каждой параметрической кривой существует ровно две различных ориентации.

3. Зачем эти сложности? Конечно, значительно проще геометрическая точка зрения, при которой изучается множество точек, а для этого на нем вводится какая-нибудь параметризация. Но в математическом анализе кривая линия не цель, а средство. Например, приходится интегрировать по кривой, точки которой проходятся в определенном порядке. Вот очень характерный пример. (Обойдемся без точных определений; то, что относится к кривым, будет определено дальше.)

Носитель кривой — граница области, а область — это „круг с разрезом по радиусу“. Кривая должна проходиться как замкнутый контур. Допустим, мы начали с центра окружности (рис. 1) и движемся по радиусу, далее по окружности, и пройдя всю окружность — снова по радиусу в центр окружности.

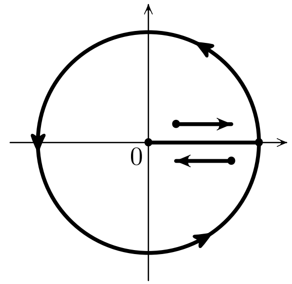

Рис. 1

Конечно, можно эту траекторию пройти как-нибудь иначе, например, не возвращаться в центр окружности по радиусу, но нужен именно этот порядок, и этот порядок сохранится при допустимых заменах параметра.

Пусть круг определен неравенством $x^2 + y^2 < 1$, а разрез проведен по радиусу $y = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Чтобы задать границу области параметрически, введем параметр $t \in [0, 2\pi + 2]$ и разделим его область определения на три отрезка $T_1 = [0, 1]$, $T_2 = [1, 2\pi + 1]$ и $T_3 = [2\pi + 1, 2\pi + 2]$. Теперь определим

$$x(t) = \begin{cases} t & t \in T_1, \\ \cos(t-1) & t \in T_2, \\ 2\pi + 2 - t & t \in T_3, \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & t \in T_1, \\ \sin(t-1) & t \in T_2, \\ 0 & t \in T_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Для большей наглядности образы отрезков T_1 и T_3 называют „верхним берегом разреза“ и „нижним берегом разреза“, но в действительности это одно и то же множество точек.

4. Дальнейшие определения. *Точкой самопересечения* параметризованной кривой называется ее точка $(t, \mathbf{r}(t))$, если существует значение параметра $t_1 \neq t$, при котором $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t)$ — векторная функция принимает одно и то же значение при двух (или более) значениях параметра. Понятно, что точка самопересечения остается таковой и после допустимой замены параметра, и мы можем говорить о точке самопересечения параметрической кривой. Но нужно иметь в виду, что понятие точки самопересечения не имеет отношения к носителю. Например, отрезок прямой линии можно параметризовать так, что полученная параметризованная кривая будет иметь точки самопересечения: $t \in [-2, 2]$

$$x(t) = t^3 - t; \quad y(t) = t^3 - t; \quad z(t) = t^3 - t. \tag{2}$$

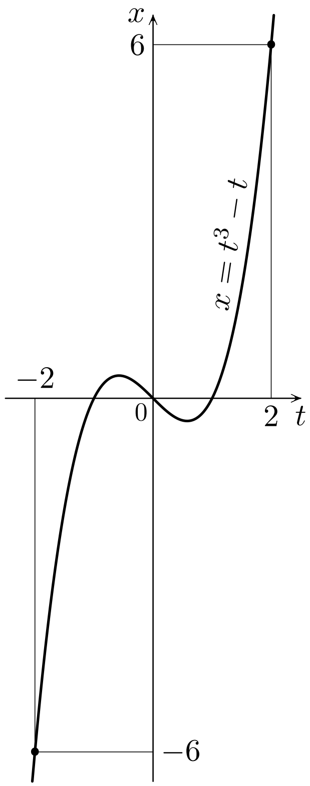

Рис. 2

Носитель этой кривой — отрезок прямой линии $-6 \leqslant x = y = z \leqslant 6$, но точка проходит его в следующем порядке: при $t \in [-2, -1/\sqrt{3}]$ координаты возрастают от -6 до $2/(3\sqrt{3})$, затем при $t \in [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, координаты убывают до $-2/(3\sqrt{3})$, и точка возвращается, и, наконец при $t \in [1/\sqrt{3}, 2]$ координаты точки возрастают до 6. Проследить за всем этим просто по графику многочлена $t^3 - t$ (рис. 2).

Пусть параметризованная кривая не имеет точек самопересечения. В этом случае она называется *простой кривой* или *простой дугой.* К этому при необходимости добавляются слова, характеризующие гладкость этой кривой. Например, „непрерывная простая дуга“ или „гладкая простая дуга“.

Если $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$, то есть начало и конец кривой являются одной точкой самопересечения, кривая называется *замкнутым контуром.* При отсутствии других точек самопересечения кривая — *простой замкнутый контур.* Например, граница круга с разрезом по радиусу (1) — контур замкнутый, но не простой.

Кривую (1) можно, и даже боле естественно, рассматривать как соединение трех кривых, являющихся отображениями отрезков T_1, T_2 и T_3. Общее определение следующее: кривая *составлена из дуг* $\mathbf{r}_i : [\alpha_i, \beta_i] \to \mathbb{R}^3$ $(i = 1, \ldots, n)$, если $\mathbf{r}_i(\beta_i) = \mathbf{r}_{i+1}(\alpha_{i+1})$ для всех $i < n$. Кривая в этом случае — отображение в $\mathbb{R}^3$ объединения отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, каждый из которых отображается соответствующей функцией.

Такая кривая непрерывна, если составляющие её дуги непрерывны. Если дуги $\mathbf{r}_i$ гладкие, то составная кривая не обязательно является гладкой. Кривая, составленная из гладких дуг, называется „кусочно гладкой“.

Возможно разбиение кривой на дуги — действие, обратное только что рассмотренному. Пусть дана кривая $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$. Точки отрезка $t_1, \ldots, t_{n-1}$ при условии $\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < \beta$ задают разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ на n частей $[t_{i-1}, t_i]$, считая $t_0 = \alpha$ и $t_n = \beta$. Такому разбиению отрезка соответствует разбиение кривой на дуги, отображающие отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ в $\mathbb{R}^3$.

В соответствии с этим, кусочно гладкой кривой называют кривую, для которой производная $\mathbf{r}'(t)$ непрерывна и отлична от нуля за исключением конечного числа точек.

5. Длина дуги кривой. Пусть дана непрерывная параметризованная кривая C, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — ее параметрическое представление. Определим, что следует понимать под длиной этой кривой. Начнем с определения вписанной в C ломаной.

Рассмотрим *разбиение* τ отрезка $[\alpha, \beta]$ — набор значений t,

$$\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, \quad \alpha = t_0 < t_1, \ldots, < t_n = \beta$$

и отметим на кривой точки $M_i = (t_i, \mathbf{r}(t_i))$ для всех $i = 0, \ldots, n$. Соединяющие их отрезки $M_{i-1}M_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ составляют ломаную, которую мы назовем *вписанной* в кривую C.

Длина этой ломаной равна

$$l_\tau = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|.$$

Если в разбиение отрезка добавляются дополнительные точки, то длина вписанной ломаной, вообще говоря, увеличивается. В общем случае она может сделаться сколь угодно большой.

Пример 1. Рассмотрим кривую на плоскости, заданную параметризацией

$$\begin{cases} x = t, & t \in (0,1], \\ y = t\sin(\pi/t), & t \in (0,1], \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Эта кривая непрерывна.

$\sin(\pi/t) = \pm 1$, если $\pi/t = 2\pi k \pm \pi/2$ где $k \in \mathbb{N}$, то есть при $t = 2/(4k \pm 1)$. Для любого четного числа $2n$ построим ломаную, соединяющую точки со значениями параметра $2/(4k \pm 1)$, $k = 2, \ldots, n+1$. Именно, точку $x = -y = t = 2/7$ соединим с точкой $x = y = t = 2/9$, ее соединим с точкой $x = -y = t = 2/11$, потом — с точкой $x = y = t = 2/13$ и так далее. Последнюю из построенных точек соединяем с началом координат.

Длина каждого звена ломаной больше удвоенной ординаты ее левого конца, то есть $4/(4k+1)$ или $4/(4k-1)$. Так как $4/(4k-1) > 1/k$, сумма длин только тех звеньев, которые кончаются в точках с $t = 4/(4k-1)$ больше, чем

$$v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Как известно, эта последовательность бесконечно возрастает при $n \to \infty$. Таким образом, множество длин вписанных ломаных в данном случае не ограничено.

Определение. Если у кривой C множество длин вписанных ломаных ограничено, то кривая называется *спрямляемой*, а точная верхняя грань этого множества называется *длиной дуги* C. В противном случае длину считают бесконечной.

Нет смысла повторять здесь относящиеся к этому понятию теоремы, но некоторые обстоятельства стоит подчеркнуть.

Обычная ошибка студентов при формулировании этого определения состоит в том, что вершины вписанной ломаной

выбираются не в соответствии с разбиением отрезка $[\alpha, \beta]$, а произвольным образом указываются на носителе кривой. Можно получить определение, равносильное исходному, если оговориться, что порядок вершин на носителе должен определяться отношением порядка точек, определяемым на носителе существующей параметризацией. Полностью забыть о параметризации кривой нельзя.

Действительно, в курсе доказывается, что длина кривой не меняется при допустимой замене параметра, но нужно обратить внимание на то, что при недопустимой замене она может измениться. Это хорошо видно на уже рассмотренном примере кривой (2): отрезок между точками, соответствующими $t_1 = -1/\sqrt{3}$ и $t_2 = 1/\sqrt{3}$, проходится трижды. Поскольку его длина равна $4/3$, длина кривой (2) на $8/3$ больше, чем длина кривой

$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t, \qquad t \in [-6, 6],$$

имеющей тот же носитель, что и (2).

Еще один пример такого рода — кривые

$$x(t) = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

и

$$x(t) = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad t \in [0, 4\pi].$$

Заметим, что, несмотря на сходство формул, одна кривая не получается из другой допустимой заменой параметра.

Мы привыкли связывать понятие длины не с параметрической кривой, а с носителем. Длина носителя простой дуги (или простого замкнутого контура) по определению равна длине соответствующей кривой. В остальных случаях длина носителя, если возможно, находится разделением кривой на простые дуги.

2. Строение кривой в окрестности точки

В этом разделе мы рассмотрим подробнее строение гладкой кривой в окрестности какой-либо ее точки. Гладкая кривая по определению непрерывно дифференцируема и производная $\mathbf{r}'(t)$ ни в одной точке не обращается в нуль. Для получения наиболее значительных результатов мы сделаем дополнительные предположения: существование непрерывных второй и третьей производных от $\mathbf{r}(t)$, и соответственно те же предположения относительно допустимой замены параметра $u = \varphi(t)$. Будут сделаны и некоторые другие предположения, например, мы потребуем, чтобы в рассматриваемой точке $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ были неколлинеарны.

1. Касательная и соприкасающаяся плоскость. Итак, рассмотрим параметрическую кривую, заданную дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, причем $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ для всех t. Функции $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}_1(\tau)$ задают одну и ту же кривую, если $\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}(\varphi(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, где $\varphi(\tau))$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, производная которой не обращается в нуль.

Если пренебречь бесконечно малыми второго порядка, то в окрестности точки $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ мы можем приблизить функцию $\mathbf{r}(t)$ линейным многочленом

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'(t_0)\Delta t, \quad \Delta t = t - t_0,$$

который определяет прямую линию, так как кривая гладкая, и $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Эта прямая называется *касательной*. Касательная не зависит от выбора параметра, так как вектор $\mathbf{r}'_{1\tau}$ коллинеарен $\mathbf{r}'_t$. Действительно,

$$\mathbf{r}'_{1\tau} = \mathbf{r}'_t t'_\tau.$$

Если пренебречь бесконечно малыми третьего порядка, то в окрестности точки $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ мы можем приблизить функцию $\mathbf{r}(t)$ многочленом

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t_0)\Delta t^2. \tag{3}$$

Точки, в которых векторы $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}'_0$ и $\mathbf{r}''(t_0) = \mathbf{r}''_0$ коллинеарны, называются *точками распрямления* и в дальнейшем не рассматриваются.

Плоскость с уравнением

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0 u + \mathbf{r}''_0 v, \tag{4}$$

называется *соприкасающаяся* плоскостью исходной кривой в точке $\mathbf{r}_0$. Начальная точка $M_0(\mathbf{r}_0)$ и направляющие векторы $\mathbf{r}'_0$ и $\mathbf{r}''_0$ составляют внутреннюю систему координат этой плоскости.

Соприкасающаяся плоскость не меняется при допустимой замене параметра. Действительно,

$$\mathbf{r}''_{1\tau\tau}(\tau) = \mathbf{r}''_{tt}(t'_\tau)^2 + \mathbf{r}'_t t''_{\tau\tau}. \tag{5}$$

Поэтому при замене параметра вектор второй производной умножается на положительный множитель и получает приращение, коллинеарное касательной. Это означает, что при любом выборе параметра конец этого вектора (отложенного от точки на кривой) лежит в одной и той же полуплоскости соприкасающейся плоскости. Назовем эту полуплоскость *положительной*.

Кривая, определяемая уравнением (3), лежит в соприкасающейся плоскости и определяется в ее внутренней системе координат уравнением $u^2 = 2v$. Такой вид имеет уравнение параболы, если начало координат на параболе, одна из осей ее касается, а вторая ось параллельна оси параболы. Оно является каноническим уравнением, если система координат декартова прямоугольная.

В отличие от касательной, парабола меняется при замене параметра. Действительно, внутренняя система координат соприкасающейся плоскости меняется, а уравнение $u^2 = 2v$ остается неизменным. Значит, это уравнение в новой системе координат определяет новую параболу.

2. Натуральный параметр. Постараемся выбрать в соприкасающейся плоскости декартову прямоугольную систему координат, естественно связанную с кривой в окрестности выбранной точки. Для этого выберем на кривой параметр s так, чтобы

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\right| \equiv 1.$$

(Дифференцирование по s вместо штриха будем обозначать точкой сверху.) Тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) = 2(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = 0,$$

и вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ ортогонален $\dot{\mathbf{r}}$.

Такой выбор параметра всегда возможен. Действительно, при замене параметра

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Поэтому, если на кривой выбран некоторый параметр $t \in [\alpha, \beta]$, то необходимо (и достаточно), чтобы $|s'_t| = |\mathbf{r}'_t|$. Сохраняя ориентацию кривой, положим

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|.$$

В качестве $s(t)$ выберем ту первообразную функции $|\mathbf{r}'_t|$, которая удовлетворяет условию $s(\alpha) = 0$. Легко видеть, что эта функция строго монотонная и дважды непрерывно дифференцируемая, а значит такая замена является допустимой.

Параметр s называется *натуральным* параметром. Натуральный параметр определен однозначно. Действительно, если s и $s_1 = \varphi(s)$ два натуральных параметра, то $|\mathbf{r}'_s| = |\mathbf{r}'_{s_1}|\,|\varphi'(s)| = 1$, и $\varphi'(s) = 1$, если ориентация кривой не менялась. Следовательно, $s_1 = s + C$, а $C = 0$, если оба параметра равны нулю в начальной точке кривой.

В курсе доказывается, что при выборе в качестве параметра переменной длины дуги длина вектора производной тождественно равна единице. Это выясняет геометрический смысл натурального параметра.

3. Кривизна кривой. Перейдем к натуральному параметру. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ ортогонален $\dot{\mathbf{r}}$, но длина его, вообще говоря,

отлична от 1. Величина

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}(s_0)|$$

называется *кривизной* кривой в данной точке, а вектор

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k}\ddot{\mathbf{r}}$$

— вектором главной нормали. Его длина равна 1, и он направлен в положительную полуплоскость соприкасающейся плоскости.

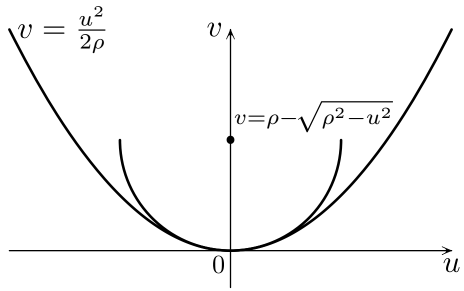

Рис. 3

Это означает, что базис $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}_0$, $\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_0}{|\ddot{\mathbf{r}}_0|}$ — ортонормированный, и уравнение соприкасающейся параболы, соответствующей натуральному параметру, при таком базисе — каноническое. Уравнение (3) запишется как

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}\Delta s + \frac{1}{2}k\,\mathbf{n}\Delta s^2,$$

и мы видим, что парабола имеет уравнение $v = \frac{1}{2}ku^2$ или $u^2 = 2\rho v$, где $\rho = 1/k$. Коэффициент ρ называется *радиусом кривизны*.

Для объяснения этого названия сравним параболу $v = u^2/(2\rho)$ и окружность радиуса ρ, проходящую через вершину параболы (рис. 3): $u^2 + (v-\rho)^2 = \rho^2$. Та полуокружность, которая проходит через начало координат — это график функции

$v = \rho - \sqrt{\rho^2 - u^2}$. Разложим эту функцию по формуле Тейлора

$$v = \rho - \rho\left(1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{\rho^2} + o(u^2)\right) = \frac{1}{2}\frac{u^2}{\rho} + o(u^2). \qquad (6)$$

Отсюда видно, что окружность и парабола отличаются друг от друга на бесконечно малую не менее, чем третьего порядка относительно $u = \Delta s$.

Окружность с уравнением $u^2 + (v - \rho)^2 = \rho^2$, где ρ — радиус кривизны, называется *соприкасающейся* окружностью, а ее центр — *центром кривизны.* Итак, пренебрегая бесконечно малыми третьего порядка, можно считать, что точка движется по окружности радиуса ρ, лежащей в соприкасающейся плоскости.

Выясним геометрический (кинематический) смысл кривизны. То, что на кривой выбран натуральный параметр $s \in \in [0, S]$, означает, что конец вектора $\mathbf{r}(s)$ проходит кривую с линейной скоростью, равной 1. При этом, как мы видели, с точностью до бесконечно малых третьего порядка можно считать, что точка кривой движется по соприкасающейся окружности. Ее угловая скорость $\overrightarrow{\omega}$ направлена перпендикулярно плоскости вращения, то есть соприкасающейся плоскости. Так как $|\overrightarrow{\omega}|\rho = |\mathbf{t}| = 1$, мы видим, что

$$|\overrightarrow{\omega}| = k.$$

Пренебрегая малыми третьего порядка, мы считаем движение точки круговым. При этом вектор $\mathbf{t}$ поворачивается, оставаясь перпендикулярным радиусу, и угловая скорость его вращения равна угловой скорости вращения радиуса, то есть $\overrightarrow{\omega}$. Заметим, что вектор $\mathbf{t}$ поворачивается в сторону положительной полуплоскости соприкасающейся плоскости, то есть по направлению к вектору $\mathbf{n}$. Это значит, что направление его вращения видно против часовой стрелки из того полупространства, в которое направлено векторное произведение $[\mathbf{t}, \mathbf{n}]$.

Вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}]$ называется *вектором бинормали.* Он имеет длину 1 и направлен перпендикулярно соприкасающейся плоскости, образуя правую тройку с $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$. Так как $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}$ и

$\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{n}$, мы видим, что

$$k\mathbf{b} = [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = \overrightarrow{\omega}.$$

Итак,

вектор $k\mathbf{b}$ может интерпретироваться как угловая скорость вращения касательной при движении точки по кривой с линейной скоростью, равной 1.

Еще одна геометрическая интерпретация кривизны может быть получена так. Найдем расстояние от конца вектора $\mathbf{r}(s_0 + + \Delta s)$ до касательной. Оно равно

$$h = \frac{|[\mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}_0, \mathbf{t}]|}{|\mathbf{t}|} = \\ = \left|\left[\frac{1}{2}k\mathbf{n}\Delta s^2 + o(\Delta s^2), \mathbf{t}\right]\right| = \frac{1}{2}k\Delta s^2 + o(\Delta s^2). \qquad (7)$$

Этот же результат можно усмотреть и из формулы (6).

4. Вычисления при произвольном выборе параметра. Вычисления при натуральном параметре, конечно, просты, но переход к натуральному параметру, как правило затруднителен. Поэтому полезны следующие формулы.

1. *Нормальная* плоскость. Радиус-вектор начальной точки $\mathbf{r}_0$, нормальный вектор $\mathbf{r}'_0$. Уравнение

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = 0.$$

2. Соприкасающаяся плоскость. Радиус-вектор начальной точки $\mathbf{r}_0$, направляющие векторы $\mathbf{r}'_0$ и $\mathbf{r}''_0$. Уравнение

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0) = 0.$$

3. Вектор бинормали:

$$\mathbf{b} = \frac{[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|}.$$

4. Вектор главной нормали $\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{t}]$. Значит,

$$\mathbf{n} = \frac{[[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0], \mathbf{r}'_0]}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|\,|\mathbf{r}'_0|} = \frac{\mathbf{r}''_0|\mathbf{r}'_0|^2 - \mathbf{r}'_0(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0)}{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|\,|\mathbf{r}'_0|}.$$

5. *Спрямляющая* плоскость. Радиус-вектор начальной точки $\mathbf{r}_0$, направляющие векторы $\mathbf{r}'_0$ и $[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]$. Уравнение:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, [\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]) = 0 \qquad \text{или} \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0.$$

6. Для вычисления кривизны найдем еще раз расстояние h, полученное в (7), используя векторы $\mathbf{r}'_0$ и $\mathbf{r}''_0$.

$$h = \frac{|[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0]|}{|\mathbf{r}'_0|} =$$

$$= \frac{|[(1/2)\mathbf{r}''_0 \Delta t^2 + o(\Delta t^2), \mathbf{r}'_0]|}{|\mathbf{r}'_0|} = \frac{1}{2} \frac{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|}{|\mathbf{r}'_0|} \Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Найденное h совпадает с (7) потому что речь идет о расстоянии до касательной от одной и той же точки, координаты которой представлены как функции параметров s и t:

$$k \Delta s^2 + o(\Delta s^2) = \frac{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|}{|\mathbf{r}'_0|} \Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Разделим обе части равенства на Δs^2 и перейдем к пределу при $\Delta s \to 0$. При этом необходимо учесть, что

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\mathbf{r}'_t|}.$$

В результате мы получим

$$k = \frac{|[\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0]|}{|\mathbf{r}'_0|^3}.$$

Для плоской кривой, заданной уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$ эта формула принимает вид

$$k = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

7. Центр кривизны. Его радиус-вектор получается как

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_0 + \rho \mathbf{n}.$$

Получим координаты центра кривизны для плоской кривой, заданной уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Мы найдем нормальный вектор $\mathbf{n}$, если повернем касательный вектор $\mathbf{r}'(x', y')$

на прямой угол и разделим на его длину. Но необходимо выбрать направление поворота так, чтобы угол между повернутым вектором и вектором $\mathbf{r}''(x'', y'')$ был острым. Рассмотрим вектор $\mathbf{a}$ с координатами $(\sigma(-y'), \sigma x')$, где $\sigma = \pm 1$. Очевидно, что $(\mathbf{r}', \mathbf{a}) = 0$. Потребуем, чтобы $(\mathbf{r}'', \mathbf{a})$ было положительно: $\sigma(-y'x'' + x'y'') > 0$. Это определяет σ как $\sigma = \operatorname{sgn}(y''x' - x''y')$. Вектор $\mathbf{a}$ необходимо пронормировать, то есть разделить на $(x'^2 + y'^2)^{1/2}$, умножить на радиус кривизны $\rho = 1/k$, и отложить полученный вектор от точки с радиус-вектором $\mathbf{r}(x, y)$. Это позволяет написать следующие координаты центра кривизны:

$$x_c = x + \frac{-y'\sigma(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|y''x' - x''y'|(x'^2 + y'^2)^{1/2}}$$

$$y_c = y + \frac{x'\sigma(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|y''x' - x''y'|(x'^2 + y'^2)^{1/2}}.$$

Очевидные упрощения приводят к формулам

$$x_c = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'}$$

$$y_c = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'}.$$

5. Формулы Френе. Лучи, направленные по векторам $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ составляют трехгранный угол, называемый *трехгранником Френе*. Часто так же называют и ортонормированный базис, составленный из этих векторов. Векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ зависят от параметра, и трехгранник поворачивается при движении точки. Поэтому его называют также *сопровождающим трехгранником*. Формула

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = k\mathbf{n} \tag{8}$$

— это разложение производной $\mathbf{t}'_s$ по векторам $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$. Получим разложения производных от остальных векторов.

Для этого напомним сначала, что компоненты произвольного вектора в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — это его скалярные произведения на соответствующие базисные векторы. По определению ортонормированного базиса $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ при $i \neq j$, и $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$. Дифференцируя эти равенства, получаем

$$(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j) + (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j') = 0 \quad \text{и} \quad 2(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_i) = 0,$$

то есть производная каждого вектора ему ортогональна, а, например, компонента производной первого вектора по второму отличается знаком от компоненты производной второго вектора по первому.

Принимая во внимание эти соображения и равенство (8), мы можем написать

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = k\mathbf{n},$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} = -k\mathbf{t} + \varkappa\mathbf{b},$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s} = -\varkappa\mathbf{n}.$$

Эти формулы называются *формулами Френе*. Единственный незнакомый нам объект в этих формулах — это функция $\varkappa = \varkappa(s)$, называемая *кручением* кривой. Кручение определяется третьей производной от радиус-вектора точки по параметру, если, конечно, эта производная существует. Оно характеризует отклонение точки от исходной соприкасающейся плоскости, при ее смещении по кривой на Δs. Действительно, рассмотрим расстояние от точки с радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$ до плоскости, соприкасающейся с кривой в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$. Оно равно

$$p = \frac{|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{b})|}{|\mathbf{b}|} = \left| \left(\Delta s\mathbf{t} + \frac{1}{2}\Delta s^2 k\mathbf{n} + \frac{1}{6}\Delta s^3 \mathbf{r}'''_{sss}(s_0) + o(\Delta s^3), \mathbf{b} \right) \right|,$$

или после упрощений

$$p = \frac{1}{6}\Delta s^3 |(\mathbf{v}, \mathbf{b})| + o(\Delta s^3),$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{r}'''_{sss}(s_0) = (k\mathbf{n})'_s = \dot{k}\mathbf{n} + k\dot{\mathbf{n}} = \dot{k}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t} + \varkappa k\mathbf{b}$. При подстановке два первых слагаемых дадут нулевые члены, и

$$p = \frac{|\varkappa| k}{6}\Delta s^3 |(\mathbf{b}, \mathbf{b})| + o(\Delta s^3) = \frac{|\varkappa| k}{6}\Delta s^3 + o(\Delta s^3). \qquad (9)$$

Обратим внимание на то, что кручение, в отличие от кривизны, может принимать отрицательные значения. Его знак показывает, в какую сторону от соприкасающейся плоскости смещается точка кривой.

Чтобы получить выражение кручения через произвольный параметр вычислим еще раз то же расстояние с учетом знака:

$$\pm p = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|} = \frac{(\mathbf{r}''', \mathbf{r}', \mathbf{r}'')}{6|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}\Delta t^3 + o(\Delta t^3).$$

Разделим равенство

$$\frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}\Delta t^3 + o(\Delta t^3) = \varkappa k \Delta s^3 + o(\Delta s^3)$$

на Δs^3 и перейдем к пределу при $\Delta s \to 0$ также, как это делалось при вычислении кривизны:

$$\varkappa k = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|\,|\mathbf{r}'|^3}.$$

Окончательно

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{k|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|\,|\mathbf{r}'|^3} = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|^2}.$$

6. Кривизна и кручение характеризуют кривую в целом. Это означает, что задание непрерывно дифференцируемых функций $k = k(s) > 0$ и $\varkappa = \varkappa(s)$ для $s \in [0, S]$ определяет кривую с точностью до положения в пространстве.

Объясним, откуда это следует. Если к формулам Френе мы добавим равенство $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}$, то получится система из четырех векторных уравнений, выражающих производные от четырех векторов как линейные комбинации этих векторов с коэффициентами — заданными функциями. Такая система есть сокращенная запись объединения трех систем линейных дифференциальных уравнений (для каждой из компонент).

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается теорема (теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем), согласно которой существует и притом единственное решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$ рассматриваемой системы уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{t}(0) = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}_0$, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}_0$, где $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{b}_0$ могут быть заданы произвольно.

Начальные условия задают положение в пространстве трехгранника Френе, соответствующего начальной точке. После этого кривая определяется кривизной и кручением однозначно.