УДК 519.863

М. Я. Блинкин[2], *А. В. Гасников*[1,2], *С. С. Омельченко*[1], *И. В. Усик*[3]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт экономики транспорта и транспортной политики, НИУ ВШЭ
[3]Балтийский федеральный университет им. И. Канта

Эволюционный вывод простейшей модели бимодального расщепления спроса на городские передвижения

В работе предлагается простейшая динамическая модель бимодального расщепления спроса на городские передвижения, удовлетворяемого соответственно поездкам на личных автомобилях и на общественном транспорте. Отличительной особенностью предлагаемого в статье подхода является учет эволюционной составляющей в механизме расщепления.

Ключевые слова: расщепление спроса на передвижения, закон Ципфа–Парето, принцип сжимающих отображений.

M. Y. Blinkin[2], *A. V. Gasnikov*[1,2], *S. S. Omelchenko*[1], *I. V. Usik*[3]

[1]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
[2]National Research University «Higher School of Economics»
[3]Immanuel Kant Baltic Federal University

Toy model for traffic flow splitting

In this paper, we desribe the problem of splitting the traffic flow to public vs private. Based on the assumptions of the price evaluation of personal time of each person and of the functions of the cost of private and public transport, it was proposed an iterative procedure is proposed, which defines the percentage of people who choose private transport daily. Besides, the theorem it formulated and proved which says that this iterative process converges to a unique fixed point. The results are tested in the numerical experiment.

Key words: splitting of traffic flow, Zipf's law, contraction mapping.

1. Введение

Расщепление спроса на ежедневные трудовые передвижения, удовлетворяемого соответственно поездкам на личных автомобилях и на общественном транспорте (*Modal Split*), базируется на стандартной (и вполне правдоподобной) гипотезе, согласно которой горожанин выбирает способ передвижения по критерию минимума обобщенной цены поездки (*Generalized Cost*), складывающейся из двух компонент:

- денежных затрат на совершение поездки (*Monetary Cost*),
- «немонетарных затрат» (*Non-Monetary Cost*), исчисляемых как произведение времени поездки на цену единицы времени горожанина (*Value of Time*), вообще говоря, сугубо индивидуальную для каждого.

Денежные затраты на совершение поездки трактуются в практике транспортного планирования как «траты из кармана» (*Out of Pocket Price*). Для общественного транспорта это плата за проезд на тех или иных маршрутах и видах транспорта. Для автомобильной поездки – траты на моторное топливо и парковочные платежи; условно-постоянные компоненты затрат (амортизация транспортного средства, налоги и т.п.) в учет обычно не берутся, так как они слабо влияют на ежедневные решения горожанина по выбору способа совершения поездки. Способы оценки времени поездки на одно и то же расстояние различаются для общественного транспорта и личного автомобиля принципиальным образом. Для общественного транспорта это время можно считать фиксированным: применительно к внеуличным видами транспорта это очевидный факт, для наземного транспорта, работающего в общем потоке транспортных средств, неизбежные задержки в движении, обусловленные плотностью трафика, учтены в маршрутных расписаниях. Для автомобильных поездок ключевым обстоятельством является зависимость времени поездки от плотности трафика, то есть в конечном итоге от количества претендентов на пользование улично-дорожной сетью.

В данной статье будет предложена эволюционная модель поведения жителей простейшего города (с достаточно большим числом жителей), состоящего всего из двух условных районов: селитебного (спального) и делового (рабочего). У каждого горожанина-автомобилиста для совершения ежедневной трудовой поездки есть возможность воспользоваться как личным автомобилем, так и общей для всех линией (маршрутом) общественного транспорта. В отличие от многих других работ по данной тематике (см., например, [2]) в данной статье мы сделаем акцент не только на описание равновесного расщепления горожан по выбору способа передвижения (на личном транспорте или общественном), но и на том, как в реальном времени может происходить процесс «нащупывания» этого равновесия. Таким образом, исследуется вопрос устойчивости равновесия.

2. Простейшая эволюционная модель расщепления

Итак, рассматривается город, состоящий из двух районов: спального и рабочего. Каждый день жители города (все они живут в спальном районе, а работают, естественно, в рабочем) ездят на работу. Каждый из них имеет личный автомобиль. Кроме того, в городе имеется развитая сеть общественного транспорта. Таким образом, каждый житель имеет две альтернативные возможности для ежедневных трудовых поездок: личный автомобиль и общественный транспорт.

Ежедневные потери пользователей личного транспорта, оценивающих единицу (минуту) своего времени в $p \geq 1$ рублей, могут быть рассчитаны следующим образом:

$$A_p\left(x\right) = a + pT\left(x\right),$$

где $a > 0$ характеризует постоянные затраты (цена топлива и т.п.), $x \in [0,1]$ – доля жителей города, использующих личный автомобиль, $T\left(x\right)$ – функция, характеризующая то, как пользователи транспортной сети оценивают свои временные затраты. Обычно (см., например, [2]) $T\left(x\right)$ выбирают вида BPR-функций [1], т.е. $T\left(x\right) = T_0 + \gamma x^4$.

Ежедневные потери пользователей общественного транспорта, оценивающих единицу (минуту) своего времени в $p \geq 1$ рублей, могут быть рассчитаны следующим образом:

$$B_p\left(x\right) \equiv b_1 + pb_2,$$

где $b_1 > 0$ характеризует постоянные затраты (цена билета и т.п.), а $b_2 > 0$ можно понимать как время, потерянное в пути. В отличие от автомобильной поездки для общественного транспорта считается, что b_2 не зависит от x (метро, электропоезда, выделенные полосы и т.п.).

Будем считать, что жителей в городе много. Число, характеризующее во сколько каждый из них оценивает минуту своего времени (потерянного в пути), лежит в диапазоне от 1 руб/мин до $p_{\max} = 10$ руб/мин. Введем зависимость $x\left(p\right)$ – доля жителей города, оценивающих одну минуту своего времени не меньше чем в p рублей. Эта зависимость

[1] Функции данного типа были введены на основе обширных эмпирических обследований американским Bureau of Public Roads (BPR) и много лет применяются в работах по транспортному планированию и теории транспортного потока [2].

естественным образом восстанавливается [3] из рангового закона распределения населения по доходу Ципфа–Парето (см. приложение). Обычно эту зависимость считают степенной $x(p) = p^{-\eta}$, где η выбирают из диапазона 1–2.

Наложим теперь физически правдоподобные ограничения. Во-первых, будем считать, что денежная цена автомобильной поездки (постоянные затраты) дороже, чем в случае общественного транспорта:

$$b_1 < a. \tag{1}$$

Данное предположение не так очевидно, как это представляется на первый взгляд. К примеру, в Москве до введения платной парковки в 2013 году «Out of Pocket Price» автомобильной поездки была заметно ниже цены пересадочной поездки «метро + трамвай». Понятно, что в таких условиях общественный транспорт предпочитало в основном «безлошадное» население. Ограничение (1) автоматически выполняется немедленно после введения платной парковки даже по самому щадящему тарифу.

Во-вторых, будем считать, что «на автомобиле всегда быстрее»:

$$T(1) < b_2. \tag{2}$$

Для справедливости этого предположения принципиально наличие поправочного коэффициента, связывающего времена, потерянные на личном и общественном транспорте (важно считать эти времена не равноценными). Понятно, что в условиях затора, практически неизбежного при x, близких к единице, время поездки на метро заведомо будет меньше, чем на автомобиле $T(1) > b_2$. Вопрос, однако, заключается в том, что время, проведенное соответственно в вагоне общественного транспорта и в собственном автомобиле, трудно считать равноценным. Другими словами, в данной работе под b_2 понимается время, потерянное в пути на общественном транспорте, приведенное к масштабу времени, потерянному в автомобильной поездке. Такое приведение увеличивает «физическое» время ввиду различной комфортности перемещений.

Добавим для аккуратности, что для горожан с наиболее высокой ценой времени обобщенная цена автомобильной поездки всегда ниже, чем на общественном транспорте:

$$a + p_{\max} T(1) < b_1 + p_{\max} b_2. \tag{3}$$

Предположим, наконец, что для горожан с наиболее низкой ценой времени дело обстоит прямо противоположным образом: даже при самой низкой загрузке улично-дорожной сети обобщенная цена поездки на общественном транспорте ниже, чем у автомобильной поездки:

$$a + T(0) > b_1 + b_2. \tag{4}$$

Определим зависимость $p(x)$, как корень уравнения $A_p(x) = B_p$, т.е.

$$p(x) = \frac{a - b_1}{b_2 - T(x)}.$$

При условиях (1) – (4) выписанная формула корректно определяет монотонную гладкую зависимость $p(x) \in (1, p_{\max})$ при $x \in [0, 1]$.

Представим себе такую динамику (повторяющуюся изо дня в день). Каждый житель в $(k+1)$-й день смотрит на то, какая доля жителей x^k использовала личный автомобиль в k-й день. Считаем, что такая информация (статистика) по вчерашнему дню общедоступна (например, благодаря каким-нибудь интернет-сервисам, скажем, Яндекс.Пробки). Исходя из этой информации каждый житель, оценивающий минуту своего времени в p рублей, оценивает (экстраполируя ситуацию вчерашнего дня на день сегодняшний, за неимением точной информации о x^{k+1}) свои затраты от двух возможных альтернатив: $A_p\left(x^k\right)$ –

личный транспорт и B_p – общественный транспорт. Мы считаем всех жителей рациональными, поэтому из двух альтернатив каждый житель выбирает ту, которая приносит ему наименьшие затраты. Таким образом, происходит формирование x^{k+1}.

Из описанного выше ясно, что жители города в $(k+1)$-й день, оценивающие единицу своего времени в $p\left(x^k\right) < p \le p_{\max}$ рублей, предпочтут в этот день личный автомобиль, а жители, оценивающие единицу своего времени в $1 \le p < p\left(x^k\right)$ рублей предпочтут в этот день общественный транспорт. Таким образом, в $(k+1)$-й день доля $x^{k+1} = x\left(p\left(x^k\right)\right)$ жителей города использует (выберет) личный автомобиль.

Для того чтобы сформулировать основной результат, сделаем одно упрощающее предположение, которое позволит представить этот результат в более наглядной форме. Будем считать, что в зависимости $x(p) = p^{-\eta}$ параметр $\eta = 1$. Тогда, если

$$4\gamma < a - b_1, \tag{5}$$

то $x(p(\,\cdot\,))$ – сжимающее преобразование отрезка $[0,1]$ в себя. Легко понять, что условия (1) – (5) совместны.

Теорема 1. *При* $\eta = 1$ *в условиях* (1) – (5) *описанная выше динамика сходится (вне зависимости от* x^0*) со скоростью геометрической прогрессии к неподвижной точке:* $x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$*, которая определяется как единственная точка пересечения графиков* $x(p)$ *и* $p(x)$ *на плоскости* (p, x).

Доказательство. Сформулированное в теореме 1 утверждение сразу следует из принципа неподвижной точки для сжимающих операторов [4]. Однако намного полезнее представляется продемонстрировать доказательство рисунком, проясняющим, как происходит «нащупывание» равновесия.

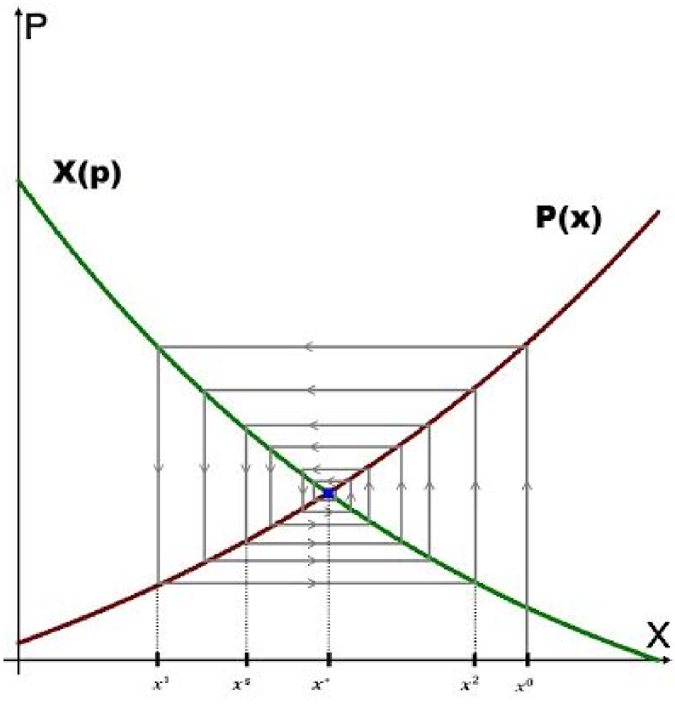

Рис. 1. Итерационный процесс поиска равновесия

Этот рисунок можно проинтерпретировать следующим образом. В начальный момент (в условный первый день) x^0 доля жителей города воспользовались личным автомобилем. На следующий день всем известно x^0, исходя из этого числа, каждый оценивает, каким образом ему сегодня добираться до работы (и обратно). В результате автомобильным транспортом воспользуется $x^1 = x\left(p\left(x^0\right)\right)$ доля жителей города. Аналогично на следующий день личным транспортом воспользуется $x^2 = x\left(p\left(x^1\right)\right)$, на следующий $x^3 = x\left(p\left(x^2\right)\right)$ и т.д. Из рис. 1 видно, что такой итерационный процесс будет сходящимся к корню уравнения $x = x\left(p\left(x\right)\right)$, что можно понимать как точку пересечения графиков функции $x\left(p\right)$ и $p\left(x\right)$. Легко проверить, что если на рис. 1 выбрать x^0 левее x^*, то сходимость также будет иметь место.

3. Численные эксперименты

Моделировался город численностью 1000 человек. Жители оценивают свое время целое число рублей $p \in [1, 10]$. Для распределения Ципфа-Парето был выбран параметр $\eta = 2$.

Доля людей, выбравших личный транспорт в день номер 0, генерируется случайно. Эксперимент останавливается, если в сходящемся процессе доля людей, выбраших автомобильную поездку, изменяется менее чем на 0.001 (1 человек). Для каждого набора парметров эксперимент проводился 1000 раз. Ниже в результатах эксперимента приведены усредненные значения количества дней схождения вышеописанной динамики.

Т а б л и ц а 1

Результаты экспериментов

Параметры	b_1	a	Число дней
$T_0 = 70$, $b_2 = 75$, $\gamma = 3$	50	60	3.02
	51	60	3.55
	52	60	4.10
	50	65	2.70
$T_0 = 70$, $b_2 = 75$, $\gamma = 3$	40	60	3.13
	41	50	3.40
	40	55	2.69
	42	55	2.74
$T_0 = 67$, $b_2 = 75$, $\gamma = 3$	50	60	6.81
	51	60	13.55
	49	60	4.80
	50	65	3.06
$T_0 = 67$, $b_2 = 75$, $\gamma = 3$	40	50	6.84
	41	50	13.95
	40	55	3.09
	42	55	3.41
$T_0 = 60$, $b_2 = 75$, $\gamma = 3$	40	70	2.64
	45	70	3.17
	50	70	4.18
	53	70	7.49

При таких параметрах процесс «нащупывания» равновесия сходился в среднем (случайно выбиралась точка $x^0 \in [0, 1]$) за 3–4 дня (итерации). Были также проведены численные эксперименты и при других значениях параметров. При самых неблагоприятных значениях, используемых в численных экспериментах, сходимость была в среднем за 14 дней. Таким образом, получено модельное подтверждение известного из опыта факта, что выход (нащупывание) равновесия осуществляется крайне быстро (двух недель всегда хватает). При этом стоит обратить внимание, что казалось бы незначительное повышение платы за общественный транспорт заставляет жителей «колебаться», дольше выходить на равновесие.

4. Приложение: закон Ципфа–Парето и процесс Юла

Далее мы постараемся пояснить возникновение закона Ципфа в тексте статьи. Для этого мы сделаем следующее упрощающее предположение: каждый человек оценивает единицу своего времени в сумму, которую он зарабатывает в единицу времени. Упрощая еще больше, предположим, что богатство каждого жителя прямо пропорционально тому, сколько он зарабатывает в единицу времени (считаем, что все работают одинаковое время – у всех нормированный рабочий день). Таким образом, нужно показать степенной характер распределения населения по доходу. Для этого рассмотрим следующую игрушечную модель.

В некотором городе живут неограниченно много жителей (изначально банкротов), которые могут участвовать в «освоении» монеток. База индукции: сначала выбирается один житель, он получает одну монетку. Шаг индукции: в $(k+1)$-й день выбирается очередной новый житель (отличный от k уже выбранных), он получает одну монетку, вторая монетка с вероятностью $\alpha < 1$ равновероятно отдается одному из k старых жителей, а с вероятностью $1-\alpha$ эта монетка отдается одному из k старых жителей с вероятностью, пропорциональной тому, сколько у него уже есть монеток, т.е. по принципу «деньги к деньгам» (в моделях роста Интернета этот принцип называют «preferential attachment»). Поясним примером. Пусть таких старых жителя три ($k = 3$). У первого 3 монетки, у второго 1 и у третьего 1. Тогда с вероятностью $3/5$ монетка попадет к первому, с вероятностью $1/5$ ко второму и $1/5$ к третьему.

Обычно эту стохастическую динамику изучают в приближении среднего поля. В данном контексте это означает, что $n_s(t) \simeq E[n_s(t)]$, где $n_s(t)$ – количество жителей, у которых ровно s монеток на t-й день. Далее выписывают на $n_s(t)$ систему зацепляющихся обыкновенных дифференциальных уравнений. Автомодельное притягивающее решение этой системы ищут в виде $n_s(t) \sim x_s^* t$. После разрешения соответствующих уравнений получают степенной закон для зависимости $x_s^* \sim s^{-(1+\alpha/(1-\alpha))}$. Такой подход применительно к моделям роста Интернета (и изучения степенного закона для распределения степеней вершин) довольно часто сейчас встречается (в том числе и в учебной литературе). В частности, этот подход описан в обзоре [5] и рассматривается в книге [6]. По сути в этом приложении нами был описан процесс, возникающий в работах 20-х годов XX века по популяционной генетике, получивший название процесса Юла (см., например, обзор [7]).

Описанная модель также восходит к работе конца XIX века В. Парето, в которой была предпринята попытка объяснить социальное неравенство, и к работе Г. Ципфа конца 40-х годов XX века, в которой была отмечена важность степенных законов в «Природе». Эти законы для большей популярности иногда преподносят как принцип Парето или принцип 80/20 (80 % результатов проистекают всего лишь из двадцати процентов причин). Приведем примеры (не совсем, правда, точные): 80 % научных результатов получили 20 % ученых, 80 % пива выпили 20 % людей и т.п. Сейчас много исследований во всем мире посвящено изучению возникновения в самых разных приложениях степенных законов (распределение городов по населению, коммерческих компаний по капитализации, автомобильных пробок по длине). Особенно бурный рост возник в связи с изучением роста больших сетей (экономических, социальных, Интернета), см., например, книги и работы M.O. Jackson'a, в частности [8]. В России это направление также представлено, например, в Яндексе в отделе А. М. Райгородского [9] (Гречников–Остроумова–Рябченко–Самосват, Леонидов–Мусатов–Савватеев), в ИПМ РАН в группе А. В. Подлазова [10].

Исследование выполнено в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014 – 2020 годы», Соглашение No 14.604.21.0052 от 30.06.2014 г. с Минобрнаукой. Уникальный идентификатор проекта RFMEFI60414X0052.

Работа поддержана грантом РФФИ 15-31-70001 мол_а_мос.

Литература

1. *Ortuzar J.D., Willumsen L.G.* Modelling transport. JohnWilley & Sons, 2011.
2. *Dafermos S., Sparrow F.* The Traffic Assignment Problem for a General Network // J. of Res. of the National Bureau of Standards. 1969. V. 73B. P. 91–118.
3. *Блинкин М.Я.* Транспортная политика: Демократический выбор и потребительские интересы: препринт. 1990.
4. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
5. *Mitzenmacher M.* A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions // Internet Mathematics. 2003. V. 1, N 2. P. 226–251.
6. *Hopcroft J., Kannan R.* Computer Science Theory for the Information Age. E-print, 2012.
7. *Newman M.E.O.* Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // Contemporary physics. 2005. V. 46, N 5. P. 323–351.
8. *Jackson M.O.* Social and economics networks. Princeton Univ. Press., 2008.
9. *Райгородский А.М.* Модели интернета. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2013.
10. *Подлазов А.В.* Закон Ципфа и модели конкурентного роста. Новое в синергетике. Нелинейность в современном естествознании. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. С. 229–256.

References

1. *Ortuzar J.D., Willumsen L.G.* Modelling transport. JohnWilley & Sons, 2011.
2. *Dafermos S., Sparrow F.* The Traffic Assignment Problem for a General Network. J. of Res. of the National Bureau of Standards. 1969. V. 73B. P. 91–118.
3. *Blinkin M.Ya.* Transport policy: democratic choise and concumer interests. Preprint, 1990. (in Russian).
4. *Kantaeovich L.W., Akilow G.P.* Functional analysis. M.: Nauka, 1984. (in Russian).
5. *Mitzenmacher M.* A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions. Internet Mathematics. 2003. V. 1, N 2. P. 226–251.
6. *Hopcroft J., Kannan R.* Computer Science Theory for the Information Age. E-print, 2012.
7. *Newman M.E.O.* Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. Contemporary physics. 2005. V. 46, N 5. P. 323–351.
8. *Jackson M.O.* Social and economics networks. Princeton Univ. Press., 2008
9. *Raigorodskii A.M.* Models of the Internet. Dolgoprudny: Publishing house «Intelligence». 2013. (in Russian).
10. *Podlazov A.W.* Zipf's Law and models of competitive growth. New in synergy. Non-linearity in modern science. M.: LIBROKOM, 2009. P. 229–256. (in Russian).

Поступила в редакцию 04.02.2016