УДК 330.4

А. В. Рассоха

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Оценка доходности инвестиционных проектов в условиях несовершенного рынка капитала

Рассматривается подход к оценке доходности инвестиционных проектов, учитывающий индивидуальную инвестиционную среду. Для каждого участника рынка в качестве описания инвестиционной среды используем всегда ему доступные стационарные и тиражируемые проекты. В качестве мачематического описания инвестиционной среды используется модель Кинтора–Липмана. Метод позволяет вычислить дефляторы денежных потоков для каждого периода времени. Для стационарной инвестиционной среды сформулирован простой критерий оценки проектов, основанный на магистральном свойстве решения задачи, двойственной к задаче оптимального инвестирования.

Ключевые слова: инвестиционный проект, модель Кантора–Липмана, NPV, IRR, магистральное свойство решения.

A. V. Rassokha

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Evaluation of investment projects in the imperfect capital market

We discuss the approach for assessing the profitability of investment projects taking into account the individual investment environment. For each market participant, as the description of the investment environment, we always use his available stationary and replicable projects. The Kintor-Lipman model is used as the mathematical description of the investment environment. The method allows us to calculate cash flow deflators for each time period. For the stationary investment environment, we formulate a simple criterion for evaluating projects based on the turnpike property of the resolution of the problem dual to the optimal investment problem.

Key words: Investment project, Kantor-Lipman model, NPV, IRR, turnpike property of the solution.

1. Введение

На протяжении последних десятилетий ведутся споры о способах оценки доходности инвестиционных проектов. Для построения методов оценки предлагались различные упрощающие модели рынка инвестиций. Одна из наиболее популярных — дискретная модель, в которой порядок получения и соотношение необходимых вложений в проект и получаемых выплат являются фиксированными. Инвестиционный проект реального сектора экономики характеризуется распределёнными по времени денежными потоками $\vec{c} = [c_0, c_1, \ldots, c_k]$, где c_i — величина денежного потока в i-й период времени от начала реализации проекта, $i = 1, \ldots, k$. Положительные значения c_i соответствуют доходам от реализации проекта, полученным в i-й период времени, а отрицательные значения — вложениям в инвестиционный проект. Кроме того, в такой модели предполагается отсутствие рисков. Такое условие, кажущееся на первый взгляд ограничительным, тем не менее не лишает модель прикладного значения, так как при оценке реальных проектов довольно часто риски также не учитываются — просто потому, что знания большинства инвесторов о реальной рыночной ситуации не позволяют им сделать о будущих рисках сколько-нибудь точных предположений, позволяющих их математически учесть.

В рамках такой модели рассмотрим вопрос об оценке однократно возникающего у инвестора проекта. Как правило, этот вопрос ставится так: нужно ли использовать появившуюся перед инвестором возможность вложения денег, или это не имеет экономического смысла?

Предполагается, что описываемый участник рынка действует в некоторой инвестиционной среде, характеристикой которой, как правило, выступает доходность альтернативного способа вложения средств. В теории корпоративных финансов чаще всего для оценки и сравнения инвестиционных проектов применяется показатель NPV (net present value), чистая приведённая стоимость денежных потоков. В описанной модели NPV проекта с вектором потоков платежей $\vec{c}$ вычисляется по формуле

$$NPV(\vec{c}, r) = c_0 + \frac{c_1}{1+r} + \cdots + \frac{c_k}{(1+r)^k}.$$

Здесь r — дефлятор, приводящий распределённые по времени денежные потоки к начальному моменту времени, равный доходности альтернативного источника вложений. NPV имеет ясный экономический смысл, однако у этого показателя есть один серьёзный недостаток: как для реальной ситуации определить ставку r? В экономиках с развитой рыночной инфраструктурой рынок капитала, как правило, не сильно отличается от совершенного, то есть банковские процентные ставки по кредитам и депозитам различаются незначительно. В этом случае ставку депонирования можно с малой погрешностью считать дефлятором r. Однако для несовершенного рынка капитала, характерного для развивающихся экономик, картина принципиально другая: на нём ставка кредитования значительно выше ставки депонирования. Как в этом случае вычислить дефлятор r?

Чтобы избежать необходимости отвечать на этот вопрос, был предложен (в том числе в работах Дж. Хиршлейфера [1] и И. Фишера [2]) и уже стал классическим показатель IRR (internal rate of return), норма внутренней доходности проекта. IRR определяется как такое значение ставки дисконта r, при котором обнуляется NPV проекта, т.е.

$$IRR(\vec{c}) = \{r \,|\, NPV(\vec{c}, r) = 0, r > 0\}.$$

Для удобства сделаем замену $x = \frac{1}{1+r}$ и введём понятие **инвестиционного полинома**: $P_{\vec{c}}(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$. Тогда $NPV(\vec{c}, r) = P_{\vec{c}}\left(\frac{1}{1+r}\right)$, а $IRR = \{x^{-1} - 1 | P_{\vec{c}}(x) = 0\}$. Однако отсюда ясно виден существенный недостаток метода IRR: полином может иметь более одного корня. Значение IRR проекта при этом тоже будет неединственным. Кроме того, даже в том случае, когда корень один, возникает вопрос, как сравнивать IRR с альтернативным источником вложений, то есть как определить граничное значение IRR, начиная с которого проект будет приниматься. Это значит, что по-прежнему остаётся вопрос определения ставки дисконта r, характеризующей инвестиционную среду. В качестве упрощающего предположения часто считается, что поскольку проект рассматривается как способ вложения средств, то сравнивать его IRR нужно со ставкой депонирования. Однако при этом полностью игнорируется разница банковских процентных ставок.

В связи с описанными выше недостатками экономистами были предложены различные модификации показателей NPV и IRR, такие, как MIRR (modified internal rate of return), предложенный в работах Дж. Т. Мао [3] и С. А. Лина [4], или GNPV (general net present value), предложенный в работах Н. Ю. Кулакова, А. Н. Кулаковой [5], [6], основывающиеся на использовании двух различных ставок: доступных для инвестора банковских ставок кредитования и депонирования. Метод MIRR явно подразумевает инвестирование и кредитование по двум различным процентным ставкам. Метод GNPV приводит денежные потоки к начальному моменту времени, но с использованием различных ставок. Ещё одним показателем оценивания проекта, использующим разные процентные ставки по кредитованию и депонированию, является величина индуцированной нормы доходности (ИНД), предложенная в [7] В. З. Беленьким. Он показал, что метод оценивания по ИНД сходен с методом оценивания проекта по его IRR, однако IRR даёт завышенную оценку в том случае, когда проект используется однократно.

Все описанные методы оценок проектов имеют общий существенный недостаток. Для того чтобы пояснить его подробнее, рассмотрим уже упомянутый «альтернативный источник вложения денежных средств» для инвестора. На деле он может быть более сложным, чем простое депонирование средств под фиксированную процентную ставку. В развивающихся экономиках инвесторы зачастую ищут дополнительные возможности вложения средств, выстраивают партнёрские связи, встраиваются в «свободные ниши». Иными словами, проекты с более сложной структурой также могут быть для инвестора всегда доступными (базовыми), их количество и качество в значительной мере зависит от предприимчивости и хватки каждого отдельно взятого инвестора. Такие проекты формируют индивидуальную инвестиционную среду для каждого участника рынка: более крупные и активные инвесторы, как правило, имеют более широкую инвестиционную базу, а значит, обладают более широкими возможностями. В данной работе показывается, что учёт этих возможностей инвестора является обязательным для верной оценки разовых инвестиционных проектов. Однако как можно учесть проекты с более сложной структурой?

Д. Г. Кантор и С. А. Липман в своих работах [8], [9] предложили постановку задачи, для которой им удалось найти оценку на темп роста капитала в случае наличия у инвестора пула стационарных тиражируемых проектов, а также решить проблему множественности IRR. Эта оценка оказалась равна величине, обратной к максимальному положительному нулю **инвестиционной функции** из интервала $(0, 1)$ (под инвестиционной функцией понимается поточечный максимум инвестиционных полиномов всех проектов, входящих в базовый набор). Интерпретацией модели Кантора–Липмана и уточнением полученных ими результатов занимались Л. Адлер и Д. Гейл в своей работе [10]. Интерпретация остальных положительных корней инвестиционного полинома предложена Э. Л. Пресманом и И. М. Сониным в [11]. Ими было показано, что величины, обратные к любым значениям аргумента инвестиционной функции, таким, что инвестиционная функция положительна, являются асимптотическими оценками на скорость роста капитала при некоторых режимах инвестирования, однако только в том случае, когда темп роста не превышает величины, обратной к максимальному нулю из интервала $(0, 1)$, инвестиционная деятельность может быть завершена. В остальных случаях такая инвестиционная схема является финансовой пирамидой. Исследованием доходности инвестиционных проектов и ликвидности инвестиционной деятельности в модели Кантора–Липмана в непрерывном времени занимались А. А. Шананин, М. П. Ващенко и Ш. Чжан в работах [12] и [13].

Модель Д. Г. Кантора и С. А. Липмана используется в данной работе как модель инвестиционной среды, учитывающей индивидуальные возможности каждого инвестора, в рамках которой можно предложить простой и эффективный метод оценки инвестиционных проектов.

2. Модель инвестиционной среды и теорема Кантора–Липмана

Для описания инвестиционной среды предположим, что инвестору в любой период времени доступны M типов инвестиционных проектов. Проект m-го типа задаётся вектором финансовых потоков $\vec{a}_m = [a_0^m, a_1^m, \ldots, a_r^m]$. Здесь $(r+1)$ — наибольшая продолжительность среди всех проектов (векторы более коротких проектов дополним нулями), $m = 1, \ldots, M$. Для того чтобы эти проекты можно было считать общедоступным альтернативным источником вложений, они должны быть стационарными и тиражируемыми (то есть могут быть начаты в любой момент времени с неизменными характеристиками с произвольной неотрицательной интенсивностью. Предполагается, что в начальный момент инвестор обладает определённой суммой денег. Все возможности инвестора, включая возможности депонирования и заимствования, входят в доступный ему пул проектов. Таким образом, должно выполняться условие самофинансирования. Однако для инвестора всегда доступен простой перенос денежных средств из одного периода в другой (проще говоря, хранение денег «под подушкой»). Аналогом инвестиционного полинома в случае нескольких проектов будет **инвестиционная функция** $F(x)$, являющаяся поточечным максимумом из инвестиционных полиномов $P_{\vec{a}_m}$, $m = 1, \ldots, M$: $F(x) = \max\limits_m P_{\vec{a}_m}(x)$. В этом случае под NPV пула проектов с дефлятором r понимается величина $F\left(\frac{1}{1+r}\right)$, а под его IRR — нули инвестиционной функции: $\left\{r \middle| F\left(\frac{1}{1+r}\right) = 0\right\}$. Кроме того, к заранее определённому терминальному моменту времени N инвестор должен завершить все инвестиционные проекты.

Будем в каждый период времени характеризовать состояние инвестора количеством имеющихся у него денег; будем считать это количество состоянием его расчётного счёта. Обозначим через S_t состояние расчётного счёта инвестора в момент t, которое в соответствии с условием самофинансирования должно быть неотрицательным. Расчётный счёт изменяется в результате продолжения начатых в предыдущие периоды времени проектов и начала новых проектов в текущий период времени. Обозначим через $u^m(t)$ интенсивность проектов m-го типа, начатых в период времени t. Целью инвестиционной стратегии является максимизация дохода в терминальный период времени N, т.е. оптимальная стратегия инвестиций определяется из решения следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{array}{ll}
S_N \to \max & \\
S_{t+1} = S_t + \sum\limits_{m=1}^{M} \sum\limits_{i=0}^{r} a_i^m u^m(t-i), & t = 0, \ldots, N-1; \\
S_t \geqslant 0, & t = 0, \ldots, N; \\
u^m(t) \geqslant 0, & t = 0, \ldots, N-r,\ m = 1, \ldots, M; \\
u^m(t) = 0, & \begin{array}{l} t \geqslant N-r+1 \text{ или } t < 0, \\ \qquad m = 1, \ldots, M; \end{array} \\
S_0 = 1. &
\end{array} \tag{1}$$

Как правило, инвестору доступны депонирование и кредитование под некоторые процентные ставки. Обозначим их ρ и σ соответственно. Тогда в пул проектов будут включены проекты с векторами $\vec{a}_1 = [-1, 1+\rho]$ и $\vec{a}_2 = [1, -(1+\sigma)]$ и полиномами $P_{\vec{a}_1}(x) = -1+(1+\rho)x$ и $P_{\vec{a}_2}(x) = 1-(1+\sigma)x$. Тогда условием стационарности инвестиционной среды является $\rho \leqslant \sigma$, причём случай $\rho = \sigma$ — случай совершенного рынка капитала, который можно считать математической идеализацией реальной рыночной ситуации. В реальности выполнено $\rho < \sigma$. Если же $\rho > \sigma$, то на рынке сложилась ситуация, допускающая арбитраж: инвестор может взять в кредит некоторую сумму q и тут же положить её в банк на депозит. При этом в следующем периоде он в результате начисления процентов по депозиту получит сумму $q(1+\rho)$, а отдать по кредиту должен будет $q(1+\sigma)$. Разница этих сумм, $q(\rho-\sigma)$, и будет арбитражным доходом инвестора, полученным без вложения собственных средств. В силу тиражируемости проектов эта сумма может быть сколь угодно большой.

Проектом переноса денежных средств будет являться проект с вектором $[-1, 1]$.

Для такой постановки задачи в [8], [9] доказан следующий результат.

Теорема 1 (Кантора–Липмана). Предположим, что пул инвестиционных проектов содержит проект сохранения денежных средств. Обозначим через V_N оптимальное значение функционала в задаче линейного программирования (1) и $F(x) = \max\limits_m P_{\vec{a}_m}(x)$. Тогда

1) если для $x \in (0, 1]$ $F(x) > 0$, то пул инвестиционных проектов допускает арбитраж, т.е. существует такое N_0, что при $N \geqslant N_0$ $V_N = +\infty$;

2) если $F(1) \leqslant 0$, то пул инвестиционных проектов убыточен, т.е. для любого $N > 0$ $V_N = 1$;

3) если $F(1) > 0$ и $\theta = \max\{\alpha \in (0,1) \big| F(\alpha) = 0\}$, то существуют такие числа $\beta > 0$ и N_0, что при $N \geqslant N_0$ справедливо неравенство $\beta \frac{1}{\theta^N} \leqslant V_N \leqslant \frac{1}{\theta^{N+1}}$.

Замечание. Ситуации 1 и 2, описанные в теореме 1, неинтересны в рассматриваемом контексте. Ситуация, в которой на инвестиционном рынке допустим арбитраж, возможна, но не может являться устойчивой. Ясно, что в реальности тиражируемость проектов имеет некоторые ограничения, поэтому при возникновении ситуации, допускающей арбитраж, предприимчивый инвестор успеет получить только некоторую конечную сумму денег прежде, чем ситуация на рынке изменится и возможность арбитража исчезнет. При этом не будет выполнено условие о стационарности проектов. В случае же убыточного пула проектов инвестирования не происходит, и ситуация для изучения опять же неинтересна. Наконец, ситуация 3 называется **нормальной**, и именно она рассматривается в дальнейшей работе.

3. Критерий неэффективности проекта в заданной инвестиционной среде

Для исследования инвестиционной среды построим двойственную к (1) задачу с помощью функции Лагранжа. Обозначим множители Лагранжа к ограничениям из задачи (1) как $p(t)$. Тогда двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned}
&p(0) \to \min, \\
&p(t) \leqslant p(t-1), \qquad t = 0, \ldots, N-1; \\
&p(N-1) \geqslant 1; \\
&\sum_{i=0}^{r} a_i^m p(t+i) \leqslant 0, \quad t = 0, \ldots, N-r-1, \ m = 1, \ldots, M.
\end{aligned} \tag{2}$$

Будем интерпретировать значения двойственных переменных $p(t)$, $t = 0, \ldots, N-1$, являющиеся решением задачи (2), как коэффициенты дисконтирования финансовых потоков во времени и использовать их в качестве инструмента для оценки разовых проектов. Будем называть имеющиеся M проектов базовыми (или постоянными). Обозначим решение задачи (2) через $\hat{p}(0), \hat{p}(1), \ldots, \hat{p}(N-1)$. Пусть теперь у нас дополнительно появляется единоразовый проект, характеризующийся вектором финансовых потоков $\vec{c} = [c_0, c_1, \ldots, c_k]$ и доступный для запуска в момент τ ($\tau \leqslant \min\{N-r, N-k\}$) с интенсивностью $u \in [0,1]$. Задача оптимального инвестирования в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
&S_N \to \max \\
&S_{t+1} = S_t + \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=0}^{r} a_i^m u^m(t-i), && \begin{array}{l} t = 0, \ldots, \tau-1 \text{ или} \\ t = \tau+k+1, \ldots, N-1; \end{array} \\
&S_{t+1} = S_t + \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=0}^{r} a_i^m u^m(t-i) + c_{t-\tau} u, && t = \tau, \ldots, \tau+k; \\
&S_t \geqslant 0, u^m(t) \geqslant 0, && t = 0, \ldots, N, \ m = 1, \ldots, M; \\
&u^m(t) = 0, && \begin{array}{l} t \geqslant N-r+1 \text{ или } t < 0, \\ m = 1, \ldots, M; \end{array} \\
&0 \leqslant u \leqslant 1; \\
&S_0 = 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Требуется выяснить, надо ли принимать новый проект к использованию или его стоит отклонить. В такой постановке задачи рентабельность проекта равносильна тому, что его использование увеличивает терминальное состояние счёта. Формализуем это утверждение.

Определение 1. Будем говорить, что новый проект $[c_0, c_1, \ldots, c_k]$, доступный для инвестирования в момент τ, неэффективен, если оптимальные значения функционалов в задачах (1) и (3) равны.

Предложение 1. Для того чтобы новый проект $[c_0, c_1, \ldots, c_k]$, доступный для запуска в момент τ $(0 \leqslant \tau \leqslant \min\{N-r, N-k\})$, был неэффективным, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение $\big(\hat{p}(0), \hat{p}(1), \ldots, \hat{p}(N-1)\big)$ задачи (2), такое, что

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \hat{p}(\tau + i) \leqslant 0. \tag{4}$$

Доказательство. Построим задачу, двойственную к (3):

$$\begin{aligned}
&p(0) + \delta \to \min, \\
&p(t) \leqslant p(t-1), && t = 0, \ldots, N-1; \\
&p(N-1) \geqslant 1; \\
&\sum_{i=0}^{r} a_i^m p(t+i) \leqslant 0, && t = 0, \ldots, N-r-1,\ m = 1, \ldots, M; \\
&\sum_{i=0}^{k} c_i p(\tau + i) \leqslant \delta; \\
&\delta \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что переменная δ присутствует только в функционале задачи (5) и в ограничении $\sum\limits_{i=0}^{k} c_i p(\tau+i) \leqslant \delta$. Поскольку $\delta \geqslant 0$ и функионал минимизируется, будет выполнено равенство $\sum\limits_{i=0}^{k} c_i p(\tau+i) = \delta$, если $\sum\limits_{i=0}^{k} c_i p(\tau+i) > 0$, и $\delta = 0$, если $\sum\limits_{i=0}^{k} c_i p(\tau+i) \leqslant 0$. Тогда задачу (5) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
&p(0) + \left(\sum_{i=0}^{k} c_i p(\tau+i)\right)_+ \to \min, \\
&p(t) \leqslant p(t-1), && t = 0, \ldots, N-1; \\
&p(N-1) \geqslant 1; \\
&\sum_{i=0}^{r} a_i^m p(t+i) \leqslant 0, && t = 0, \ldots, N-r-1,\ m = 1, \ldots, M.
\end{aligned} \tag{6}$$

Достаточность

Пусть существует решение $\big(\hat{p}(0), \hat{p}(1), \ldots, \hat{p}(N-1)\big)$ задачи (2), удовлетворяющее условию (4). Тогда оно удовлетворяет всем ограничениям задачи (6), и $\left(\sum\limits_{i=0}^{k} c_i \hat{p}(\tau+i)\right)_+ = 0$. Так как оптимальное значение функционала задачи (6) не меньше, чем задачи (2), а при значениях $\big(\hat{p}(0), \hat{p}(1), \ldots, \hat{p}(N-1)\big)$ значения функционалов этих задач равны между собой и равны $\hat{p}(0)$, то $\big(\hat{p}(0), \hat{p}(1), \ldots, \hat{p}(N-1)\big)$ является решением задачи (6). По теореме двойственности оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач равны, следовательно, оптимальные значения функционалов задач (1) и (3) также равны $\hat{p}(0)$ и равны друг другу, что по определению означает неэффективность дополнительного проекта $[c_0, c_1, \ldots, c_k]$ в момент τ.

Необходимость

Пусть проект $[c_0, c_1, \ldots, c_k]$ неэффективен. По определению неэффективности это означает, что оптимальные значения функционалов в задачах (1) и (3) равны. Но тогда по теореме двойственности то же значение является оптимальным для функционалов задач

(2) и (6). Возьмём любое решение $\big(\tilde{p}(0), \tilde{p}(1), \ldots, \tilde{p}(N-1)\big)$ задачи (6). Оно удовлетворяет всем ограничениям задачи (2). Кроме того, оно удовлетворяет условию (4), так как иначе значение функционала задачи (2) при значениях переменных $\big(\tilde{p}(0), \tilde{p}(1), \ldots, \tilde{p}(N-1)\big)$ было бы меньше, чем оптимальное значение функционала (6), что противоречит неэффективности проекта $[c_0, c_1, \ldots, c_k]$. Поскольку $\big(\tilde{p}(0), \tilde{p}(1), \ldots, \tilde{p}(N-1)\big)$ удовлетворяет условию (4), то оптимальные значения функционалов задач (1), (2), (3) и (6) равны $\tilde{p}(0)$, то есть значение функционала задачи (2) при этих значениях переменных равно оптимальному, значит, $\big(\tilde{p}(0), \tilde{p}(1), \ldots, \tilde{p}(N-1)\big)$ также является решением (2) и утверждение предложения выполнено.

Предложение доказано. □

Итак, переменные двойственной задачи могут быть трактованы как дефляторы денежных потоков. Рассмотрим, как на базе этого утверждения можно оценить эффективность проекта, не решая каждый раз двойственную задачу.

4. Магистральное свойство решения

Модель Кантора–Липмана является частным случаем модели Неймана–Гейла. Для такой постановки задачи В. З. Беленький в своей работе [7] сформулировал (без доказательства) магистральное свойство решения задачи оптимального инвестирования. Заключается оно в следующем. Как доказано в теореме Кантора–Липмана, $\exists\, b_1, b_2 > 0$, такие, что $b_1 \leqslant \theta^N p(0) \leqslant b_2$. Введём векторы $\vec{p'} = [\theta^{-k}, \theta^{-k+1}, \ldots, \theta^{-1}, 1]$, $\vec{p}(t) = [p(t), \ldots, p(t+k)]$, $t = 0, \ldots, N-k-1$. Тогда магистральное свойство решения задачи (2) может быть сформулировано следующим образом.

Магистральное свойство. При достаточно продолжительном инвестиционном горизонте N выполнено

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \tau_1, \tau_2 : \quad \left\| \frac{\vec{p'}}{\left\|\vec{p'}\right\|} - \frac{\vec{p}(t)}{\|\vec{p}(t)\|} \right\| < \varepsilon \quad \forall t = \tau_1, \ldots, N - \tau_2,$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма вектора.

Луч $\mathbb{R}_+\vec{p'}$ будем называть *магистральным* лучом. Магистральное свойство означает, что при достаточно большом N в те периоды времени, которые не принадлежат ни началу инвестиционной деятельности, ни её завершению, оптимальная траектория достаточно близка к магистральному лучу.

Замечание. Из выполнения магистрального свойства для решения задачи (2) можно сформулировать более простой критерий эффективности проекта. Если в процессе инвестирования в базовые проекты в момент, не принадлежащий ни началу инвестирования, ни завершению инвестиционной деятельности, возникает однократно доступный для использования проект с вектором $\vec{c} = [c_0, c_1, \ldots, c_k]$, то для оценки его эффективности необходимо вычислить величину $P_{\vec{c}}(\theta)$. Если $P_{\vec{c}}(\theta) > 0$, то проект следует принять к использованию, в противном случае — отклонить.

Из магистрального свойства следует, что для любого набора переменных $p(0), \ldots, p(N-1)$, являющегося решением двойственной задачи (2), в магистральном режиме инвестирования с большой точностью выполняется соотношение $\frac{p(t)}{p(t+1)} = \frac{1}{\theta}$, $t = \tau_1, \ldots, N - \tau_2$ (τ_1, τ_2 — длительности выхода на магистральный луч и схода с него соответственно). Значит, можно обозначить $p(t) = b\theta^t$, где $b > 0$ — некоторая константа. По предложению 1 проект является неэффективным, если $\sum\limits_{i=0}^{k} c_i \hat{p}(\tau + i) \leqslant 0$. В данном случае это условие (4) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{k} c_i b\theta^i = b\sum_{i=0}^{k} c_i\theta^i = bP_{\vec{c}}(\theta) \leqslant 0.$$

Константа b не влияет на знак неравенства, значит, если $P_{\vec{c}}(\theta) \leqslant 0$, то условие (4) выполняется для любого решения двойственной задачи, и проект неэффективен.

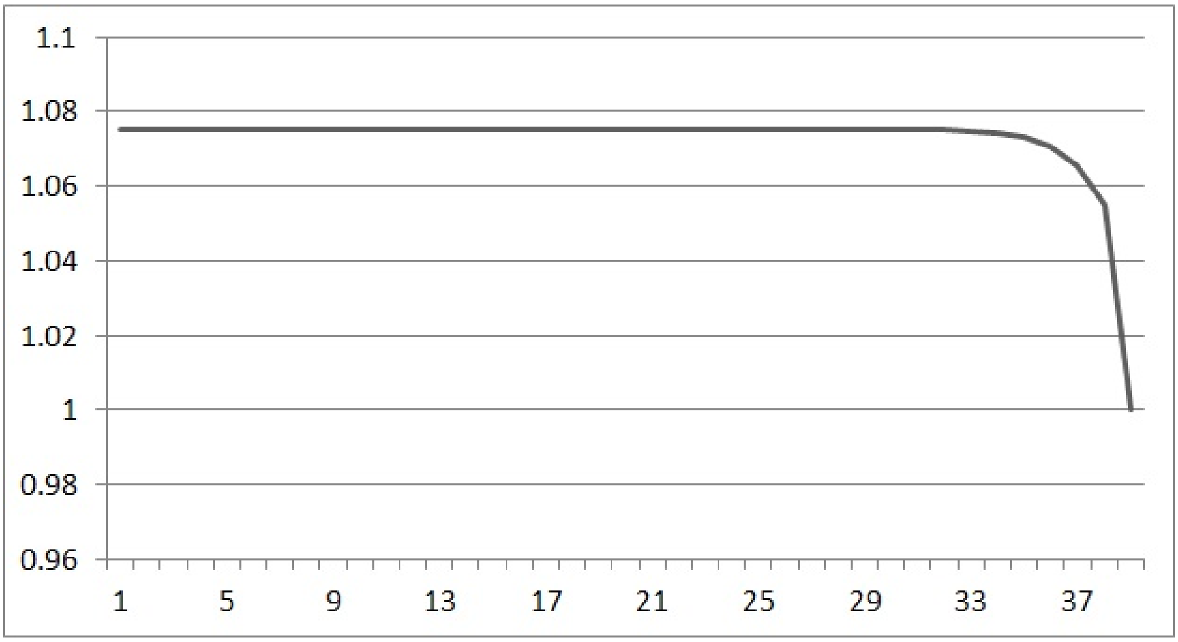

Рис. 1. График зависимости $p(t)/p(t+1)$ от t

Пусть инвестиционная среда стационарна и магистральное свойство выполняется. Рассмотрим пример инвестиционной среды в условиях несовершенного рынка, сформированной тремя проектами: депонирования по ставке 5.5% (вектор проекта — $\vec{a}_1 = [-1,\ 1.055,\ 0]$), заимствование по ставке 10% (вектор — $\vec{a}_2 = [1,\ -1.1,\ 0]$) и проект с вектором потоков платежей $\vec{a}_3 = [-1.86,\ 2.93,\ -1]$ и инвестиционным полиномом $P_{\vec{a}_3}(x) = (x - 0.93)(2 - x)$. Для инвестиционной функции этого пула проектов $\theta = 0.93$, $1/\theta \approx 1.0753$. Решим задачу для $N = 40$.

Для наглядности построим график отношения переменных, являющихся решениями задачи (2) для этой инвестиционной среды (т. е. построим график «скорости убывания» дефляторов финансовых потоков $p(t)$, см. рис. (1)). На графике явно видно движение по магистральному лучу — этап, на котором отношение переменных в точности равно 1.0753.

5. Анализ подходов к оценке инвестиционных проектов

Рассмотрим подробнее модификации классических методов NPV и IRR, упомянутые во введении. Одним из таких показателей является MIRR. Суть этого критерия в следующем. Пусть $\vec{c} = [c_0, \ldots, c_k]$ — вектор денежных потоков проекта, ρ — ставка депонирования, σ — ставка кредитования:

$$FV = \sum_{i=0}^{k} c_i (1+\rho)^{k-i}, \text{ если } c_i > 0;$$

$$PV = -\sum_{i=0}^{k} c_i (1+\sigma)^{-i}, \text{ если } c_i < 0;$$

$$(1 + MIRR)^k = \frac{FV}{PV}.$$

Здесь FV — приведённая к финальному моменту времени стоимость положительных денежных потоков (в некоторых работах приводится название «терминальная стоимость проекта»), а PV — приведённая стоимость инвестиционной базы. При этом правило принятия решения об инвестировании формулируется следующим образом: *Если* $MIRR_{\vec{c}}(\sigma, \rho) > \sigma$, *то проект следует принять, иначе — отклонить.*

Другим правилом оценивания, учитывающим разные процентные ставки, является метод $GNPV$. Авторы называют метод $GNPV$ обобщением метода NPV за счёт использования двух ставок вместо одной. При тех же обозначениях показатель $GNPV$ определяется следующим образом:

$$PV_r = c_k;$$
$$PV_i = \begin{cases} \dfrac{PV_{i+1}}{1+\sigma} + c_i, \text{ если } PV_{i+1} > 0, \\ \dfrac{PV_{i+1}}{1+\rho} + c_i, \text{ если } PV_{i+1} < 0, \end{cases} \quad i = k-1, \ldots, 0;$$
$$GNPV_{\vec{c}}(\sigma, \rho) = PV_0.$$

Принятие решения о проекте по критерию GNPV осуществляется по следующему правилу: *Если* $GNPV_{\vec{c}}(\sigma, \rho) > 0$, *проект принимается, в противном случае — отклоняется.*

Однако такие правила позволяют учесть только разницу процентных ставок. Использование же модели Кантора–Липмана для моделирования инвестиционной среды позволяет выяснить его влияние на доходность всего пула доступных инвестору проектов. В этих случаях решения по проекту (использовать его или отклонить), полученные различными методами, могут различаться. Интуитивно это можно понять довольно легко. Пусть в текущей инвестиционной среде депонирование возможно только по невысокой ставке. Если у инвестора появляется возможность вложиться в проект, обеспечивающий доходность несколько выше, чем простое депонирование, то любая оценка, рассматривающая только сам проект, даст решение «Принять». Однако если у инвестора имеется некоторый постоянно доступный высокодоходный проект, при использовании которого темп роста капитала заметно выше, чем у дополнительного проекта, то не имеет смысла уводить часть доступных средств на низкодоходный проект.

Однако не всегда дело объясняется сравнением индивидуальных доходностей. Вполне возможна такая ситуация, в которой проект, сам по себе имеющий низкую доходность (или вообще являющийся убыточным), в сочетании с несколькими другими проектами может повысить их доходность. Рассмотрим несколько таких примеров.

Пример 1.

Пусть инвестиционная среда сформирована тем пулом проектов, для которого в предыдущем разделе показано выполнение магистрального свойства. На рис. 2 изображены графики инвестиционных полиномов, а инвестиционная функция выделена жирной линией.

Пусть теперь в некоторый момент магистрального режима инвестирования становится однократно доступен проект с вектором потоков платежей, равным $\vec{c}_1 = [846, \ -1840, \ 1000]$. Его инвестиционный полином может быть разложен на множители: $P_{\vec{c}_1}(x) = 1000(x-0.94)(x-0.9)$. Наибольший корень полинома на интервале $(0,1)$ — $x = 0,94$. Тогда IRR проекта приблизительно равен 6.4%, и $\rho < IRR(\vec{c}) < \sigma$. При методе оценки проекта по его IRR возникает вопрос: какой из процентных ставок — депонирования или кредитования — следует пользоваться для вынесения решения по методу IRR? Если рассматривать проект как способ вложения средств, то пользоваться надо ставкой $\rho = 5.5\%$. В этом случае критерий IRR говорит о том, что проект надо принять: $IRR(\vec{c}_1) > \rho$. Если обратиться к двум описанным критериям, учитывающим разные процентные ставки по депонированию и кредитованию, то мы получим, что для данного проекта $MIRR_{\vec{c}_1}(\sigma, \rho) \approx 7.74\% < \sigma$, то есть по правилу $MIRR$ проект следует отклонить. $GNPV_{\vec{c}_1}(\sigma, \rho) < 0$, то есть решение, как и по правилу $MIRR$, — отклонить проект.

Однако все эти методы никак не учитывали постоянно имеющийся в распоряжении проект $\vec{a}_3$. По правилу оценки, предложенному в данной работе, проект надо отклонить, так как для базового пула проектов $\theta = 0.93$, а $P_{\vec{c}_1}(0.93) < 0$.

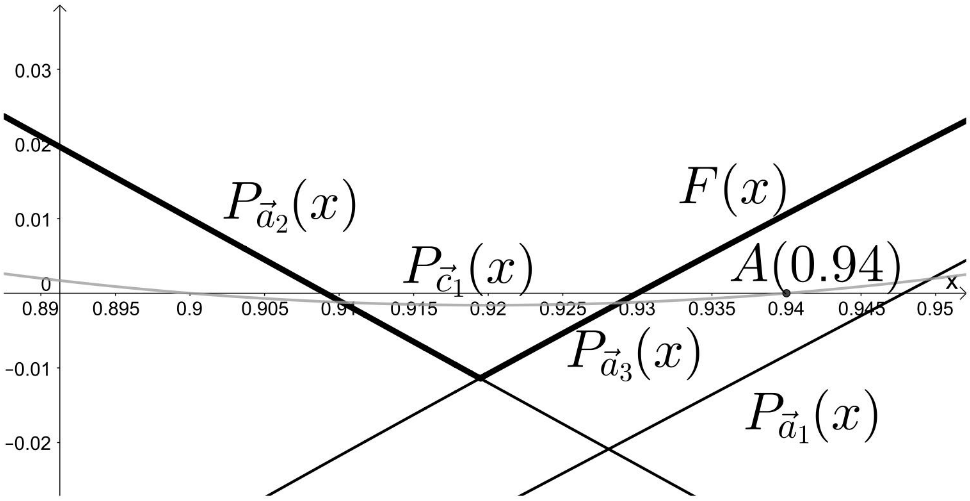

Рис. 2. Иллюстрация к примеру 1

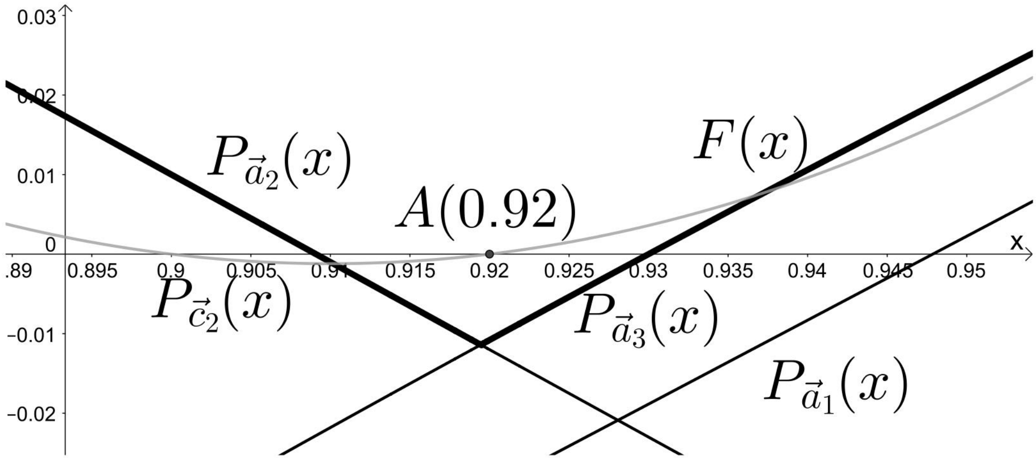

Рис. 3. Иллюстрация к примеру 2

Пример 2.

Пусть инвестиционная среда сформирована такими же, как и в примере 1, проектами. Однако теперь при магистральном режиме инвестирования станет однократно доступен другой проект с вектором потоков платежей, равным $\vec{c}_2 = [828,\ -1820,\ 1000]$ (рис. (3)). IRR этого проекта приблизительно равен 8.7%, и по правилу IRR проект следует принять, а по правилам $MIRR$ и $GNPV$ — отклонить ($MIRR_{\vec{c}_2}(\sigma,\rho) \approx 7.8\% < \sigma$ и $GNPV_{\vec{c}_2}(\sigma,\rho) < 0$). Однако на этот раз, если оценить проект $\vec{c}_2$ с учётом всегда доступного проекта $\vec{a}_3$, мы получим, что $P_{\vec{c}_1}(0.93) > 0$, то есть использование данного проекта улучшает доходность инвестиционной деятельности.

В первом примере рассматривалась интуитивно понятная ситуация: проект имеет собственную доходность выше, чем простое депонирование, но ниже, чем постоянно доступный проект, поэтому метод IRR предлагает его принимать, а метод, предложенный в данной работе, — отклонить. Методы же $GNPV$ и $MIRR$ предлагали его отклонить из-за слишком высокой ставки по кредиту. Проект из второго примера в сравнении с банковскими процентными ставками никак качественно не отличается от проекта с вектором $\vec{c}_1$, поэтому методы IRR, $MIRR$ и $GNPV$ давали по нему те же решения, что и по проекту $\vec{c}_1$. Но доходность проекта $\vec{c}_2$ выше доходности пула базовых проектов, поэтому решение метода, предложенного в статье, — принять его. Однако возможна и более показательная ситуация.

Пример 3.

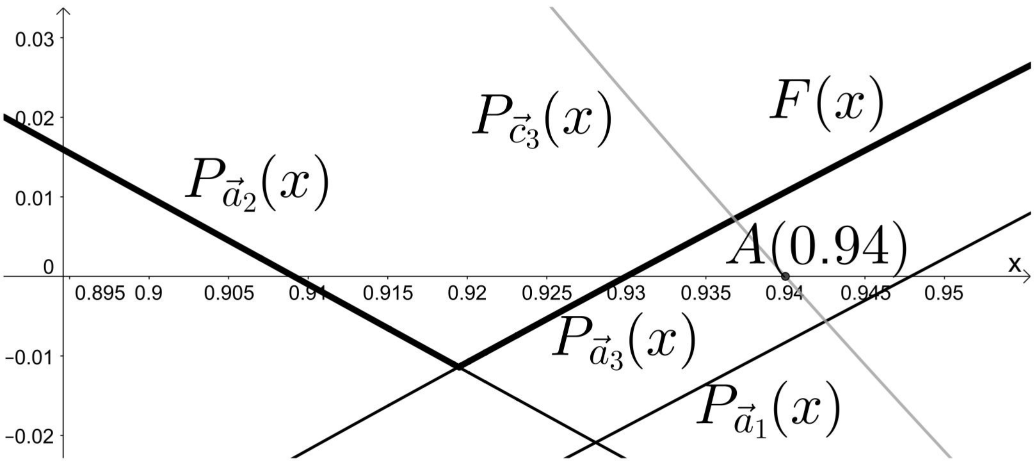

Рис. 4. Иллюстрация к примеру 3

Пусть базовый пул проектов тот же, что и в примерах 1 и 2, а однократно доступный проект — $\vec{c}_3 = [1410,\ -2440,\ 1000]$ (рис. 4). $MIRR_{\vec{c}_3}(\sigma, \rho) \approx 7.63\% < \sigma$, $GNPV_{\vec{c}_3}(\sigma, \rho) < 0$, и оба метода утверждают, что проект надо отклонить. Величина, обратная корню инвестиционного полинома из интервала $(0, 1)$ — $1/0.94 \approx 1.064$, — казалось бы, обозначает темп роста капитала, бо́льший, чем $\rho = 5.5\%$, однако при использовании этого проекта самого по себе (без депонирования средств) или только с депонированием под процентную ставку, ме́ньшую, чем 6.4%, использование данного проекта вообще является убыточным ($P_{\vec{c}_3}(1) < 0$). Однако метод, предложенный в данной работе, говорит о том, что использовать данный проект выгодно: $P_{\vec{c}_3}(0.93) > 0$. Более того, используя проект $\vec{c}_3$ однократно, а остальные проекты — по необходимости, можно получить доход без использования собственных средств (схема приведена в табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Схема получения арбитражного дохода

Используемый Проект	Интенсивность реализации проекта	Денежные потоки в периоды		
		τ	$\tau+1$	$\tau+2$
$\vec{c}_3$	1	1410	–2440	1000
$\vec{a}_3$	758	–1409.88	2220.94	–758
$\vec{a}_1$	291.1		291.1	–241.01
Сумма		0.12	0.4	0.99

6. Заключение

В данной статье проанализированы подходы к оценке доходности инвестиционных проектов в условиях несовершенного рынка капитала. Предложен метод оценки, учитывающий инвестиционную среду, более сложную, чем возможность кредитования и депонирования под фиксированные процентные ставки. Проекты со структурой, более сложной, чем возможность взять кредит или реинвестировать денежные средства, также должны быть учтены при оценке эффективности единоразовых проектов. Эта особенность развивающихся экономик описывается с помощью модели Кантора–Липмана, так как она позволяет оценить доходность пула доступных инвестору тиражируемых инвестиционных проектов. Кроме того, поскольку участники рынка инвестиций обладают индивидуальной инвестиционной средой, метод, предложенный в работе, позволяет, кроме прочего, сравнивать различных инвесторов по их базовым возможностям. При помощи магистральной теоремы предложен простой метод различения эффективных и неэффективных проектов. Приведённые примеры показывают, что оценки, основанные только на учёте процентных ставок депозита и кредита, могут быть неверными в описанных в работе более сложных случаях, в то время как предложенный метод позволяет учесть их.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 16-11-10246.

Литература

1. *Хиршлейфер Дж.* К теории оптимальных инвестиционных решений. // Вехи экономической мысли. 2000. Т. 3. С. 178–224.

2. *Fisher I.* The Theory of Interest. New York : Macmillan, 1930.

3. *Mao J.T.* The internal rate of return as a ranking criterion // The Engineering Economist. 1966. V. 11, N 4. P. 1–14.

4. *Lin S.A.* The modified internal rate of return and investment criterion // The Engineering Economist. 1976. V. 21. P. 237–247.

5. *Kulakov N.Yu., Kulakova A.N.* Evaluation of Nonconventional Projects // The Engineering Economist: A Journal Devoted to the Problems of Capital Investment. 2013. V. 58, N 2. P. 137–148.

6. *Кулаков Н.Ю., Бласет Кастро А.Н.* Альтернативные методы оценки нетипичных инвестиционных проектов // Journal of Corporate Finance Research. 2017. V. 11, № 1. С. 111–128.

7. *Беленький В.З.* Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана–Гейла. Препринт, WP/2002/137, М.: Центральный экономико-математический институт, 2002.

8. *Cantor D.G., Lipman S.A.* Investment Selection with Imperfect Capital Markets // Econometrica. 1983. V. 51, N 4. P. 1121–1144.

9. *Cantor D.G., Lipman S.A.* Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects // Econometrica. 1995. V. 63, N 5. P. 1231–1240.

10. *Adler L., Gale D.* Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy // Mathematical Finance. 1997. V. 7, N 1. P. 73–81.

11. *Presman E.L., Sonin I.M.* Growth Rate, Internal Rate of Return and Financial Bubbles. Working paper, WP/2000/103. Moscow. CEMI Russian Academy of Science, 2000.

12. *Ващенко М.П., Шананин А.А.* Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 3. С. 70–86.

13. *Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh.* Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time // Lobachevskii journal of mathematics. 2018. V. 39, N 7. P. 929–935.

References

1. *Hirshleifer J.* On the Theory of Optimal Investment Decision. Milestones of economic thought. 2000. V. 3. P. 178–224.
2. *Fisher I.* The Theory of Interest. New York: Macmillan, 1930.
3. *Mao J.T.* The internal rate of return as a ranking criterion. The Engineering Economist. 1966. V. 11, N 4. P. 1–14.
4. *Lin S.A.* The modified internal rate of return and investment criterion. The Engineering Economist. 1976. V. 21. P. 237–247.
5. *Kulakov N.Yu., Kulakova A.N.* Evaluation of Nonconventional Projects. The Engineering Economist: A Journal Devoted to the Problems of Capital Investment. 2013. V. 58, N 2. P. 137–148.
6. *Kulakov N.Yu., Blaset Kastro A.N.* Alternative Methods for Evaluating Atypical Investment Projects. Journal of Corporate Finance Research. 2017. V. 11, N 1. P. 111–128.
7. *Belenkiy V.Z.* Economic Dynamics: Analysis of Investment Projects in Framework of Linear Model of Neumann–Gale. Working paper, WP/2002/137. Moscow. CEMI Russian Academy of Science, 2002.
8. *Cantor D.G., Lipman S.A.* Investment Selection with Imperfect Capital Markets. Econometrica. 1983. V. 51, N 4. P. 1121–1144.
9. *Cantor D.G., Lipman S.A.* Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects. Econometrica. 1995. V. 63, N 5. P. 1231–1240.
10. *Adler L., Gale D.* Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy. Mathematical Finance. 1997. V. 7, N 1. P. 73–81.
11. *Presman E.L., Sonin I.M.* Growth Rate, Internal Rate of Return and Financial Bubbles. Working paper, WP/2000/103. Moscow. CEMI Russian Academy of Science, 2000.
12. *Vashchenko M.P., Shananin A.A.* Evaluation of the Profitability of a Pool of Investment Projects in the Model of Optimal Investment in Continuous time. Math modeling. 2012. V. 24, N 3. P. 70–86.
13. *Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh.* Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time. Lobachevskii journal of mathematics. 2018. V. 39, N 7. P. 929–935.

Поступила в редакцию 07.12.2018