

УДК 51-74

О. О. Хамисов

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН

Регулирование частот в ЭЭС на основе аппроксимации возмущений

Регулирование частоты в электроэнергетических системах (ЭЭС) является одной из наиболее важных проблем электроэнергетики. Частота является индикатором баланса мощности в ЭЭС, и любые нарушения баланса приводят к отклонениям частоты от номинального значения (50 Гц), что может привести к повреждению оборудования или полному отключению сети. В рамках данной работы представлена схема регулирования частоты, основанная на аппроксимации возмущений в сети. Численные эксперименты показывают, что разработанная схема является более эффективной, чем используемое на сегодняшний день регулирование, так как в случае возникновения возмущений возвращает частоты к номинальному значению значительно быстрее.

Ключевые слова: электроэнергетические системы, регулирование частоты, устойчивость линейных систем, устойчивость по отношению к части переменных, вычислительный эксперимент.

O. O. Khamisov

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS

Disturbance approximation based frequency control

Frequency control in power networks is one of the most significant problems. Frequency is an indicator of power balance in power network and any imbalance leads to frequency deviations from the nominal value (50 Hz), which can lead to equipment damage or complete power network shutdown. A new frequency control scheme based on the disturbance approximation is presented in this work. Numerical experiments show that the developed control scheme is more effective than the one currently used as it provides better frequency convergence to the nominal value in the case of an imbalance.

Key words: power systems, frequency control, linear system stability, stability to a part of the variables computing experiment.

1. Введение

В управлении ЭЭС одним из наиболее важных аспектов является регулирование частоты электрического тока. В отличие от других видов транспортных сетей (например, трубопроводных) для ЭЭС не существует методов хранения электроэнергии достаточно крупного объема. Таким образом, генерируемая мощность должна всегда быть равна потребляемой. Отклонение частоты от номинального значения (50 герц в России и странах Европы, 60 герц в США, Бразилии и ряде других стран) является индикатором дисбаланса мощности [1]. Повышение частоты в ЭЭС означает избыток генерируемой мощности, а понижение частоты — недостаток генерируемой мощности. Данные отклонения возникают регулярно из-за непостоянности потребления или в редких случаях из-за аварии (например, отключения электростанции или обрыва линии). Колебания частоты ускоряют износ оборудования, а при больших отклонениях (около 2 герц) могут привести к возникновению

вибрации лопастей генераторов с последующим их разрушением. Вследствие этого автоматика электростанции отключает энергоблоки с данными турбинами от сети, что приводит к нехватке мощности и каскадным отключениям. Восстановление работы ЭЭС в случае отключения является крайне ресурсозатратным процессом.

Регулирование частоты направлено на постоянное поддержание баланса мощности, а также частоты в номинальном значении. На данный момент оно осуществляется при помощи изменения генерации электростанций и состоит из двух частей: первичного и вторичного регулирования.

Первичное регулирование осуществляется с целью ограничения максимальных отклонений частоты от номинального значения. Изначально первичное регулирование осуществлялось при помощи центробежного (пропорционального) регулятора, на сегодняшний день регулирование осуществляется автоматикой. Тем не менее первичное регулирование по-прежнему осуществляется при помощи пропорционального регулятора [1].

Вторичное регулирование направлено на приведение частоты ЭЭС к номинальному значению. Оно представлено интегральным регулятором, направленным на сведение к нулю ошибки регулирования, равной отклонению значения частоты от номинальной.

Изменение частоты при возникновении дисбаланса мощности не происходит мгновенно. Частота в крупных ЭЭС пропорциональна частоте вращения турбин и синхронных генераторов электростанции, которые обладают большой инерцией, в силу чего изменение их скорости, а следовательно, и частоты, занимает 5–10 секунд [3]. Электростанции использующие возобновляемые источники электроэнергии (ветрогенераторы и солнечные батареи), обладают низкой или нулевой инерцией. Вследствие этого поведение частоты в ЭЭС с высоким процентом возобновляемых источников становится крайне непостоянным, и существующая схема регулирования не способна стабилизировать частоту в таких ЭЭС, что приводит к искусственному ограничению мощности, производимой возобновляемыми источниками электроэнергии (например, в 2016 году в Ирландии усредненное количество доступной, но не произведенной ветрогенераторами электроэнергии составило 227 GW, что составляет 2.7% от установленной мощности [4]).

Первичное и вторичное регулирования для работы используют только замеры частоты, тем не менее на шинах ЭЭС также производится замер электрической мощности, поступающей в шину и покидающей ее. В данной работе замеры электрической мощности вместе с частотой используются для получения приближенного значения дисбаланса мощности в сети, на основе которого производится регулирование частоты.

Регулирование частоты осуществляется изменением положения регуляционных клапанов турбины, тем самым изменяя количество энергоносителя, поступающего в турбину, и количество механической мощности, поступающей на генератор. В результате изменения механической мощности происходит изменение частоты в ЭЭС. В силу динамических процессов, происходящих в турбине, изменение механической мощности турбины происходит с некоторым запаздыванием после изменения положения регуляционных клапанов. Поэтому скорость работы существующего реагирования, полагающегося только на показания частоты, ограничена из-за опасности возникновения положительной обратной связи.

Управление, представленное в данной работе, состоит из двух частей. Сначала производится аппроксимация возмущения, приведшего к изменению частоты в системе, далее производится корректировка значения управления с целью устранения изменения частоты. В силу того, что возмущение в сети не зависит от значения частоты, скорость работы регулирования ограничена только качеством аппроксимации возмущения в ЭЭС. Данный подход, как показывают численные эксперименты, позволяет уменьшить как максимальные отклонения частоты в сети, так и увеличить скорость их затухания. Схожий подход был использован в работе [6], в которой предполагалось, что все параметры системы известны. В данной работе рассматривается ситуация, когда параметры турбины известны с некоторой, возможно, значительной, погрешностью.

Различные подходы к регулированию частоты представлены в работах [7–9]. Но модель ЭЭС, используемая в данных работах, содержит либо модель турбины первого порядка, либо не содержит модели турбины, что может привести к неустойчивости системы, что было показано в [10]

2. Математическая модель

ЭЭС задана связным оргграфом $\Gamma = (N, E)$, где N — множество шин (узлов), $|N| = n$. Считается, что шина определяется ее индексом. Множество E — множество линий (ребер), $|E| = q$. Считается, что сеть состоит только из генераторных шин. Данное условие достигается при помощи редукции Крона [5]. Динамика ЭЭС описывается следующей системой алгебро-дифференциальных уравнений [1]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i, \quad i \in N, \quad (1a)$$

$$m_i \dot{\omega}_i = -d_i \omega_i - p_i^e + p_i^m + r_i, \quad i \in N, \quad (1b)$$

$$p_{ij} = b_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad ij \in E, \quad (1c)$$

$$p_i^e = \sum_{j:ij \in E} p_{ij} - \sum_{j:ji \in E} p_{ji}, \quad i \in N, \quad (1d)$$

$$t_i^m \dot{p}_i^m = -p_i^m + v_i, \quad i \in N, \quad (1e)$$

$$t_i^v \dot{v}_i = -v_i + u_i(t), \quad i \in N. \quad (1f)$$

Здесь переменные (неизвестные) системы:

- θ_i — угол сдвига фазы на шине i , $i \in N$,
- ω_i — отклонение частоты от номинального значения на шине i , $i \in N$,
- p_i^e — электрическая мощность, поступающая в сети из шины i , $i \in N$,
- p_{ij} — переток активной мощности на линии, соединяющей узлы i и j . Если $p_{ij} > 0$, переток направлен из узла i в j , если $p_{ij} < 0$, переток направлен из узла j в i , $ij \in E$.
- p_i^m — механическая мощность, подаваемая турбиной на генератор i , $i \in N$,
- v_i — положение регулировочных клапанов турбины i , $i \in N$.

Параметры (константы) системы:

- $m_i > 0$ — инерционная константа генератора на шине i , $i \in N$,
- $d_i > 0$ — константа демпфирования синхронной машины на шине i , $i \in N$,
- r_i , $i \in N$ — суммы нагрузок и неизвестных дисбалансов мощности,
- $b_{ij} > 0$ — параметр линии ij , обратный ее реактивной проводимости $ij \in E$,
- $t_i^m > 0$ — временная константа, характеризующая динамику энергоносителя в турбинах на шине i , $i \in N$,
- $t_i^v > 0$ — временная константа, характеризующая время отклика регулировочных клапанов турбин на сигналы управления на шине i , $i \in N$.

Сигналы управления $u_i(t)$, $i \in N$ являются непрерывными функциями. Уравнения имеют следующие значения:

- (1a) — уравнения зависимости углов сдвига от частоты,
- (1b) — уравнения классической модели генератора,

- (1c) — уравнения линеаризованных перетоков активной мощности,
- (1e) — уравнения, описывающие динамику турбин,
- (1f) — уравнения, описывающие динамику впускных клапанов.

Согласно [2] система (1) всегда имеет решение. Для удобства далее она сведена к системе дифференциальных уравнений, представленных в матричном виде.

Дифференцирование обеих частей уравнения (1c) дает

$$\dot{p}_{ij} = b_{ij}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j), \quad (2)$$

переменные $\dot{\theta}_i$ выражаются из (1a):

$$\dot{p}_{ij} = b_{ij}(\omega_i - \omega_j), \quad (3)$$

и переменные θ_i исключаются из системы. Электрические мощности p_i^e в (1b) выражаются из (1d), что дает следующую систему дифференциальных уравнений:

$$M\dot{\omega} = -D\omega - Cp + p^m + r, \quad \omega(0) = 0, \quad (4a)$$

$$\dot{p} = BC^T\omega, \quad p(0) = p^0 = BC^T\theta^0, \quad (4b)$$

$$T^m\dot{p}^m = -p^m + v, \quad p^m(0) = p^{m0}, \quad (4c)$$

$$T^v\dot{v} = -v + u, \quad v(0) = v^0. \quad (4d)$$

Здесь используется векторное представление переменных: $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$, $p = (p_1, \dots, p_q)^T$, здесь и везде далее переменные p_{ij} перенумерованы в лексикографическом порядке, поэтому имеют один индекс p_i . Для удобства обозначений перенумерованные переменные обозначаются той же буквой, что и исходные, $p^m = (p_1^m, \dots, p_n^m)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ и матричное представление параметров: $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$, $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_q)$, здесь параметры b_{ij} также перенумерованы в лексикографическом порядке, $T^m = \text{diag}(t_1^m, \dots, t_g^m)$, $T^v = \text{diag}(t_1^v, \dots, t_g^v)$. Матрица C — матрица инцидентности графа Γ . Необходимо отметить, что при введенных обозначениях $p^e = Cp$. Для данной системы верны следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $u(t) \equiv u^*$, $u^* \in \mathbb{R}^n$, тогда система (4) имеет множество стационарных точек $(\omega^*, p^*, (p^m)^*, v^*)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \omega_i^* &= \frac{\sum_{j \in N} (u_j^* - r_j)}{\sum_{j \in N} d_j}, \quad i \in N, \\ p^* &\in \{\tilde{p} : C\tilde{p} = -D\omega^* + u^* + r\}, \\ p^{m*} &= u^*, \quad v^* = u^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Стационарная точка системы (4) при $u(t) \equiv u^*$ задается следующей системой уравнений:

$$0 = -D\omega^* - Cp^* + (p^m)^* + r, \quad (6a)$$

$$0 = BC^T\omega^*, \quad (6b)$$

$$0 = -(p^m)^* + v^*, \quad (6c)$$

$$0 = -v^* + u^*. \quad (6d)$$

Из уравнений (6c), (6d) следует $(p^m)^* = v^* = u^*$. Матрица C является матрицей инцидентности, следовательно, $\mathbf{1}^T Cp = 0$, где $\mathbf{1}$ — вектор, состоящий из единиц. Из (6a)

$$\sum_{j \in N} d_j \omega_j^* = \sum_{i \in N} ((p^m)^*_i + r_i) = \sum_{i \in N} (u_i^* + r_i). \quad (7)$$

Из уравнения (6b) имеем $C^T \omega^* = 0$, что в силу связности графа равносильно утверждению $\omega_i^* = \omega_j^*$, $i, j \in N$. Как следствие: $\omega_i^* = \frac{\sum_{j \in N} (u_j^* - r_j)}{\sum_{j \in N} d_j}$, $i \in N$.

Лемма 2. Пусть вектор-функция $u(t)$ является непрерывной и сходится к $u^* \in \mathbb{R}^n$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда система (4) является асимптотически устойчивой по переменным ω , p^m , v и устойчива по p .

Доказательство. Пусть $\omega^*, p^*, (p^m)^*, v^*$ — некоторая стационарная точка системы (4) при $u = u^*$. Тогда из леммы 1 $r = D\omega^* + Cp^* - u^*$. Введем следующую замену: $\Delta\omega = \omega - \omega^*$, $\Delta p = p - p^*$, $\Delta p^m = p^m - (p^m)^*$, $\Delta v = v - v^*$. Тогда система (4) эквивалентна системе

$$M\Delta\dot{\omega} = -D\Delta\omega - C\Delta p + \Delta p^m, \quad (8a)$$

$$\Delta\dot{p} = BC^T \Delta\omega, \quad (8b)$$

$$T^m \Delta\dot{p}^m = -\Delta p^m + \Delta v, \quad (8c)$$

$$T^v \Delta\dot{v} = -\Delta v + (u(t) - u^*). \quad (8d)$$

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова для однородной системы, соответствующей (8):

$$V(\Delta\omega, \Delta p, \Delta p^m, \Delta v) = \frac{1}{2} (\Delta\omega^T M \Delta\omega + \Delta p^T B^{-1} \Delta p + (\Delta p^m)^T T^v \Delta p^m + \Delta v^T T^v \Delta v). \quad (9)$$

Ее производная имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(\Delta\omega, \Delta p, \Delta p^m, \Delta v) &= \Delta\omega^T M \Delta\dot{\omega} + \Delta p^T B^{-1} \Delta\dot{p} + (\Delta p^m)^T T^v \Delta\dot{p}^m + \Delta v^T T^v \Delta\dot{v} = \\ &= -\Delta\omega^T D \Delta\omega - \Delta\omega^T C \Delta p + \Delta p^T C^T \Delta\omega - (\Delta p^m)^T \Delta p^m + (\Delta p^m)^T \Delta v - \Delta v^T \Delta v = \\ &= -\Delta\omega^T D \Delta\omega - \frac{1}{2} (\Delta p^m)^T \Delta p^m - \frac{1}{2} \Delta v^T \Delta v - \frac{1}{2} (\Delta p^m - \Delta v)^T (\Delta p^m - \Delta v). \end{aligned} \quad (10)$$

Функция $V(\Delta\omega, \Delta p, \Delta p^m, \Delta v)$ является положительно определенной по совокупности переменных, а функция $\dot{V}(\Delta\omega, \Delta p, \Delta p^m, \Delta v)$ — отрицательно определенной, следовательно, [11] система является устойчивой. Более того, $\dot{V}(\Delta\omega, \Delta p, \Delta p^m, \Delta v)$ является отрицательно определенной по переменным $\Delta\omega, \Delta p^m, \Delta v$, неоднородность $u(t) - u^*$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, следовательно, [12] система (8) является асимптотически устойчивой по переменным $\Delta\omega, \Delta p^m, \Delta v$, а система (4) асимптотически устойчива по ω, p^m, v .

Лемма 3. Пусть $u(t)$ — непрерывная вектор-функция при $t \geq 0$ такая, что $u(t) \rightarrow u^*$ при $t \rightarrow \infty$, где $u^* \in \mathbb{R}^n$ — некоторое решение уравнения

$$\mathbf{1}^T (\tilde{u} + r) = 0, \quad \tilde{r} \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Тогда система (1) сходится к следующей стационарной точке:

$$\begin{aligned} \omega^* &= 0, \\ p^* &\in \{\tilde{p} : C\tilde{p} = u^* + r\}, \\ p^{m*} &= u^*, \quad v^* = u^*. \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство. Устойчивость системы была доказана в лемме 2. Уравнения (12) получаются после подстановки решения уравнения (11) в (6).

3. Постановка задачи

Пусть

$$f(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \tilde{u}^T W \tilde{u}, \quad (13)$$

стоимость генерации, где $\tilde{u} \in \mathbb{R}^n$ и $W \succ 0$ — диагональная матрица. Определим множества U_0 и $U^\#$ следующим образом.

Определение 1. Множество U_0 состоит из непрерывных вектор-функций $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))^T$ таких, что

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}^n$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$, где $\omega(t)$ — решение системы (4) при $u(t) \equiv \mu(t)$.

Определение 2. Множество $U^\#$ имеет вид

$$U^\# = \{u^\# : u^\# = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \text{ для некоторого } u \in U_0\}. \quad (14)$$

Необходимо найти оптимальное управление, которое определяется следующим образом:

Определение 3. Оптимальным называется управление $\bar{u}(t)$ такое, что

- 1) $\bar{u} \in U_0$;
- 2) $\bar{u}^\# = \arg \min \{f(u^\#) : u^\# \in U^\#\}$, где $\bar{u}^\# = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(t)$.

Состояние, к которому приходит система при оптимальном управлении, будем называть оптимальным состоянием. Задача заключается в восстановлении частоты, а следовательно, и баланса мощности в системе с минимальными затратами. Сложность заключается в невозможности замера значений вектора возмущений r временных констант турбины и регуляционных клапанов, а также замеров механической мощности. Замеры частоты $\omega(t)$ и электрической мощности $p^e(t)$ производятся на каждой шине ЭЭС, стоимости w_i определяются системным оператором и известны. Инерции турбин M определяется ее известной массой, демпфирование D аппроксимируется для каждой турбины [1].

Существующее регулирование имеет следующий вид:

$$u_i(t) = u_i^I(t) + u_i^{II}(t), \quad i \in N, \quad (15)$$

где первичное регулирование $u_i^I(t)$ и вторичное регулирование $u_i^{II}(t)$ задаются следующими формулами соответственно:

$$u_i^I(t) = -K_i^I \omega_i(t), \quad i \in N, \quad (16)$$

$$u_i^{II}(t) = W^{-1} y, \quad i \in N, \quad (17a)$$

$$y = \frac{K^{II}}{n} \int_0^t \sum_{k \in N} \omega_k(\tau) d\tau. \quad (17b)$$

Здесь $K^I > 0$ и $K^{II} > 0$ — константы регулирования, y — вспомогательная функция.

Введем в рассмотрение следующую вспомогательную задачу:

$$\min_{\tilde{u}} \frac{1}{2} \tilde{u}^T W \tilde{u}, \quad (18a)$$

$$\mathbf{1}^T (\tilde{u} + r) = 0. \quad (18b)$$

Пусть $u^\#$ — решение этой задачи. Тогда если в системе (4) $u(t) \rightarrow u^\#$, то, согласно лемме 3, система (4) сходится к оптимальному состоянию. Данная задача является сильно выпуклой и ее единственное решение задается стационарной точкой функции Лагранжа. Функция Лагранжа:

$$L(\tilde{u}, \tilde{\lambda}) = \frac{1}{2} \tilde{u}^T W \tilde{u} + \tilde{\lambda} \mathbf{1}^T (\tilde{u} + r). \quad (19)$$

Соответствующая стационарная точка определяется системой линейных уравнений:

$$W \tilde{u} + \mathbf{1} \tilde{\lambda} = 0, \quad (20a)$$

$$\mathbf{1}^T (\tilde{u} + r) = 0, \quad (20b)$$

что эквивалентно системе

$$\tilde{u} = W^{-1}\mathbf{1}\tilde{\lambda}, \quad (21a)$$

$$\mathbf{1}^T(W^{-1}\mathbf{1}\tilde{\lambda} + r) = 0. \quad (21b)$$

Решение этой системы дает

$$u^\# = -W^{-1}\mathbf{1}\frac{\mathbf{1}^T r}{\mathbf{1}^T W^{-1}\mathbf{1}}. \quad (22)$$

Если положить $u(t) \equiv u^\#$, то система (4) сходится к оптимальному состоянию. Проблема заключается в том, что для вычисления $u^\#$ необходимо знать значение вектора r , что невозможно на практике. Более того, как правило, известными считаются только частоты ω , электрические мощности p^e , а также параметры M и D . Тем не менее из уравнения (4a) имеем

$$r + p^m = M\dot{\omega} + D\omega + p^e, \quad (23)$$

где $p^e = Cp$. Значение механической мощности p^m , как и матриц временных констант T^m и T^v неизвестно, поэтому используется вспомогательная переменная \tilde{p}^m , задаваемая уравнением

$$\tilde{T}\tilde{p}^m(t) = \int_0^t -\tilde{p}^m(\tau) + u(\tau)d\tau, \quad \tilde{T} = \text{diag}(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n) \succ 0, \quad (24)$$

где \tilde{t}_i — положительные постоянные коэффициенты, выбор которых описан в следующем параграфе. На основе (24) выводится аппроксимация вектора возмущений:

$$\tilde{r} = M\dot{\omega} + D\omega + p^e - \tilde{p}^m. \quad (25)$$

Аппроксимацию в представленном виде использовать невозможно в силу того, что значения $\dot{\omega}$ неизвестны. Поэтому применяется следующий подход. В уравнении (21b) производится замена r на \tilde{r} , а само уравнение заменяется на интегральное уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \int_0^t -\mathbf{1}^T(W^{-1}\mathbf{1}\lambda(\tau) + \tilde{r}(\tau))d\tau = \\ &= \int_0^t -\mathbf{1}^T(W^{-1}\mathbf{1}\lambda(\tau) - D\omega(\tau) - p^e(\tau) + \tilde{p}^m(\tau))d\tau + \mathbf{1}^T M\omega. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, управление задается следующей системой алгебро-интегральных уравнений:

$$u^{III} = W^{-1}\mathbf{1}\lambda, \quad (27a)$$

$$\lambda(t) = \int_0^t -\mathbf{1}^T(W^{-1}\mathbf{1}\lambda(\tau) - D\omega(\tau) - p^e(\tau) + \tilde{p}^m(\tau))d\tau + \mathbf{1}^T M\omega, \quad (27b)$$

$$\tilde{T}\tilde{p}^m(t) = \int_0^t -\tilde{p}^m(\tau) + u(\tau)d\tau. \quad (27c)$$

Здесь обозначение u^{III} используется для того, чтобы отличать первичное и вторичное регулирование от представленного здесь.

4. Доказательство применимости системы регулирования

Докажем теперь, что система (4), (27) является асимптотически устойчивой и управление u удовлетворяет постановке задаче. Функция $\tilde{r}(t)$ представима в следующем виде:

$$\tilde{r}(t) = r + p^m - \tilde{p}^m. \quad (28)$$

Таким образом, система (27) зависит только от уравнений (4c) и (4d), и для доказательства асимптотической устойчивости $u(t)$ достаточно доказать асимптотическую устойчивость

системы (27), (4с) и (4d). Данная система содержит интегральные и дифференциальные уравнения. Для удобства сведем все к дифференциальной системе:

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{1}^T(W^{-1}\mathbf{1}\lambda + r + p^m - \tilde{p}^m), \quad (29a)$$

$$\dot{p}^m = -(T^m)^{-1}p^m + (T^m)^{-1}v, \quad (29b)$$

$$\dot{v} = -(T^v)^{-1}v + (T^v)^{-1}W^{-1}\mathbf{1}\lambda, \quad (29c)$$

$$\dot{\tilde{p}}^m = -\tilde{T}^{-1}\tilde{p} + \tilde{T}^{-1}W^{-1}\mathbf{1}\lambda. \quad (29d)$$

В матричном виде система представима следующим образом:

$$\dot{x} = Ax + R, \quad (30)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} \lambda \\ p^m \\ v \\ \tilde{p}^m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}^T W^{-1} \mathbf{1} & -\mathbf{1}^T & 0 & \mathbf{1}^T \\ 0 & -(T^m)^{-1} & (T^m)^{-1} & 0 \\ (T^v)^{-1} W^{-1} \mathbf{1} & 0 & -(T^v)^{-1} & 0 \\ \tilde{T}^{-1} W^{-1} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\tilde{T}^{-1} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}^T r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Для этой системы имеет место следующий результат.

Лемма 4. Пусть

$$\tilde{t}_i \geq \min\{t_i^m, t_i^v\}. \quad (32)$$

Тогда система (30) асимптотически устойчива.

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнения для матрицы A . Согласно формуле дополнения Шура

$$\det(A - I\eta) = P_1(\eta)P_2(\eta), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(\eta) &= \det \begin{pmatrix} -(T^m)^{-1} - I\eta & (T^m)^{-1} & 0 \\ 0 & -(T^v)^{-1} - I\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{T}^{-1} - I\eta \end{pmatrix} = \\ &= \prod_{i \in N} \left(-\frac{1}{t_i^m} - \eta \right) \left(-\frac{1}{t_i^v} - \eta \right) \left(-\frac{1}{\tilde{t}_i} - \eta \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, для того, чтобы $P_1(\eta) = 0$, необходимо $\eta < 0$. Второй определитель задается формулой

$$\begin{aligned} P_2(\eta) &= \det \begin{pmatrix} -\mathbf{1}^T W^{-1} \mathbf{1} - \eta - \\ -(-\mathbf{1}^T \quad 0 \quad \mathbf{1}^T) \begin{pmatrix} -(T^m)^{-1} - I\eta & (T^m)^{-1} & 0 \\ 0 & -(T^v)^{-1} - I\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{T}^{-1} - I\eta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ W^{-1} \mathbf{1} (T^v)^{-1} \\ W^{-1} \mathbf{1} \tilde{T}^{-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} -\mathbf{1}^T W^{-1} \mathbf{1} - \eta - \\ -(-\mathbf{1}^T \quad 0) \begin{pmatrix} -((T^m)^{-1} - I\eta)^{-1} & -(T^m)^{-1} (-(T^m)^{-1} - I\eta)^{-1} (-(T^v)^{-1} - I\eta)^{-1} \\ 0 & -((T^v)^{-1} - I\eta)^{-1} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 \\ W^{-1} \mathbf{1} (T^v)^{-1} \end{pmatrix} + \mathbf{1} (-\tilde{T}^{-1} - I\eta) \tilde{T}^{-1} W^{-1} \mathbf{1} \end{pmatrix} = \\ &= \det \left(-\eta + \sum_{i \in N} w_i \left(-1 - \frac{1}{t_i^m t_i^v (\frac{1}{t_i^v} + \eta) (\frac{1}{t_i^m} + \eta)} + \frac{1}{\tilde{t}_i (\frac{1}{\tilde{t}_i} + \eta)} \right) \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Для удобства обозначим $y_1^i = \frac{1}{t_i^m}$, $y_2^i = \frac{1}{t_i^v}$, $y_3^i = \frac{1}{t_i}$. Тогда

$$P_2(\eta) = \det \left(-\eta + \sum_{i \in N} w_i g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i) \right), \quad (36)$$

где

$$g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i) = -1 - g_i^1(\eta, y_1^i, y_2^i) + g_i^2(\eta, y_3^i), \quad (37)$$

$$g_i^1(\eta, y_1^i, y_2^i) = \frac{y_1^i y_2^i}{(y_1^i + \eta)(y_2^i + \eta)}, \quad g_i^2(\eta, y_3^i) = \frac{y_3^i}{y_3^i + \eta}. \quad (38)$$

Пусть $\eta = \alpha + j\beta$. Рассмотрим условия, при которых $\alpha \geq 0$ является решением $P_2(\eta) = 0$. Получим условия, при которых действительная часть $g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)$ положительна. Рассмотрим сначала $g_i^1(\eta, y_1^i, y_2^i)$.

$$\Re(g_i^1(\eta, y_1^i, y_2^i)) = \frac{y_1^i y_2^i (y_1^i y_2^i + (y_1^i + y_2^i)\alpha + \alpha^2 - \beta^2)}{((y_1^i)^2 + 2y_1^i\alpha + \alpha^2 + \beta^2)((y_2^i)^2 + 2y_2^i\alpha + \alpha^2 + \beta^2)}, \quad (39)$$

где $\Re(\cdot)$ — вещественная часть комплексного числа. Обозначим

$$h(\eta) = y_1^i y_2^i (y_1^i y_2^i + (y_1^i + y_2^i)\alpha + \alpha^2 - \beta^2), \quad (40)$$

$$g(\eta) = ((y_1^i)^2 + 2y_1^i\alpha + \alpha^2 + \beta^2)((y_2^i)^2 + 2y_2^i\alpha + \alpha^2 + \beta^2). \quad (41)$$

Отметим, что $g(\eta) > 0$ для любого $\eta \in \mathbb{C}$, и $h(\eta) \leq 0$ тогда и только тогда, когда $\beta \in X_\beta = \{\beta \mid \beta \geq y_1^i y_2^i\}$. Следовательно, $\Re(g_i^1(\eta, y_1^i, y_2^i)) \leq 0$ тогда и только тогда, когда $\beta \in X_\beta$ и минимум $\Re(g_i^1(\eta, y_1^i, y_2^i))$ достигается на множестве X_β . Но на этом множестве

$$\arg \min_{\alpha \geq 0} h(\eta) = 0, \quad (42)$$

и

$$\arg \min_{\alpha \geq 0} g(\eta) = 0. \quad (43)$$

Так как $h(\eta) \leq 0$ и $g(\eta) > 0$, получаем

$$\arg \min_{\alpha \geq 0} \Re(g_i^1(\eta, y_1^i, y_2^i)) = 0. \quad (44)$$

Рассмотрим теперь функцию $g_i^2(\eta, y_3^i)$:

$$\Re(g_i^2(\eta, y_3^i)) = \frac{y_3^i (y_3^i + \alpha)}{(y_3^i)^2 + 2y_3^i\alpha + \alpha^2 + \beta^2}, \quad (45)$$

применяя аналогичные рассуждения, получаем $\arg \max_{\alpha \geq 0} \Re(g_i^2(\eta, y_3^i)) = 0$. Таким образом,

$$\arg \max_{\alpha \geq 0} \Re(g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) = 0. \quad (46)$$

Следовательно, для вычисления максимума функции $g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)$ можно полагать $\eta = j\beta$. Положим $y_3^i = y_k$, $k \in \{1, 2\}$ и рассмотрим производную функции $\Re(g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i))$:

$$\frac{\partial \Re(g_i(j\beta, y_1^i, y_2^i, y_3^i))}{\partial \beta} = \frac{y_k (y_1^i + y_2^i) ((y_1^i)^2 (y_2^i)^2 - \beta^4)}{((y_1^i)^2 + \beta^2)^2 ((y_2^i)^2 + \beta^2)^2}. \quad (47)$$

Стационарными точками являются точки $\beta_1 = \sqrt{y_1^i y_2^i}$ и $\beta_2 = -\sqrt{y_1^i y_2^i}$. При этом

$$\Re(g_i(j\beta_1, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) = \Re(g_i(j\beta_2, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) = -\frac{y_1^i y_2^i}{y_k^2 + y_1^i y_2^i} < 0. \quad (48)$$

Учитывая, что $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \Re(g_i(j\beta)) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \Re(g_i(j\beta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) = -1$, получаем, что $\Re(g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) < 0$ при $\alpha \geq 0$ и $y_3^i \in \{y_1^i, y_2^i\}$.

Покажем теперь, что для любого y_3^i такого, что $0 < y_3^i < \max\{y_1^i, y_2^i\}$, неравенство $\Re(g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) < 0$ сохраняется. Ранее было показано, что

$$\Re(g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) \leq \Re(g_i(j\beta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)). \quad (49)$$

Если $\beta = 0$, то $\Re(g_i(0, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) \equiv -1$. Если $\beta \neq 0$, то рассмотрим следующую производную:

$$\frac{\partial \Re(g_i(j\beta, y_1^i, y_2^i, y_3^i))}{\partial y_3^i} = \frac{\partial \Re(g_i^2(j\beta, y_3^i))}{\partial y_3^i} = \frac{2y_3^i \beta^2}{((y_3^i)^2 + \beta^2)^2} > 0. \quad (50)$$

Следовательно, функция $\Re(g_i(\beta, y_1^i, y_2^i, y_3^i))$ монотонно возрастает по y_3^i , и $\Re(g_i(\eta, y_1^i, y_2^i, y_3^i)) < 0$ для $0 < y_3^i < \max\{y_1^i, y_2^i\}$. Возвращаясь к полиному P_2 , получаем, что при $\tilde{t}_i \geq \min\{t_i^v, t_i^v\}$ и $\alpha \geq 0$ верно

$$\Re \left(\sum_{i \in N} w_i \left(-1 - \frac{1}{t_i^m t_i^v \left(\frac{1}{t_i^m} + \eta \right) \left(\frac{1}{t_i^v} + \eta \right)} + \frac{1}{\tilde{t}_i \left(\frac{1}{t_i} + \eta \right)} \right) \right) < 0. \quad (51)$$

Таким образом, уравнение $P_2(\eta) = 0$ имеет решение только при $\alpha < 0$, это означает, что все действительные части собственных чисел матрицы A отрицательны и система (30) асимптотически устойчива.

Следствие 1. Система (27) задает сходящуюся вектор-функцию $u(t)$ такую, что система (4) сходится к оптимальному состоянию.

В силу асимптотической устойчивости система (4) имеет единственное решение, которое совпадает с решением оптимизационной задачи (18).

5. Численный эксперимент

Для проведения численных экспериментов использовалась ЭЭС Новой Англии [3], состоящая из десяти генераторов. На первой генераторной шине происходит потеря мощности, равная 100 МВт. Предполагается, что стоимость генерации на всех шинах одинакова, таким образом, каждый генератор должен увеличить свою мощность на 10 МВт для приведения системы к оптимальному состоянию. Рассматривается три вида регулирования: (1) традиционное регулирование, состоящее из первичного и вторичного, (2) регулирование, представленное в этой работе, (3) регулирование, представленное в этой работе, вместе с первичным. На рис. 1 представлены значения управления на первом генераторе для всех трех случаев, на рис. 2 представлены соответствующие значения частоты. Как можно видеть, использование регулирования u^{III} обеспечивает высокую скорость сходимости, но при этом сохраняя максимальное отклонение частоты на том же уровне, что и при традиционном регулировании. Численные эксперименты показывают, что максимальное отклонение частоты можно уменьшить при использовании разработанной схемы регулирования вместе с первичным регулированием. Как видно на рис. 2, максимальное отклонение частоты уменьшается примерно на 0.1 Гц при использовании комбинации $u^I + u^{III}$.

6. Заключение

В представленной работе рассматривается новый подход к регулированию частоты, основанный на оценке возмущений в ЭЭС. Основным преимуществом данной схемы регулирования является значительное уменьшение времени, необходимого на восстановление частоты в ЭЭС после возникновения возмущения. При этом разработанное регулирование не требует установки какого-либо дополнительного оборудования для получения необходимой информации о состоянии ЭЭС.

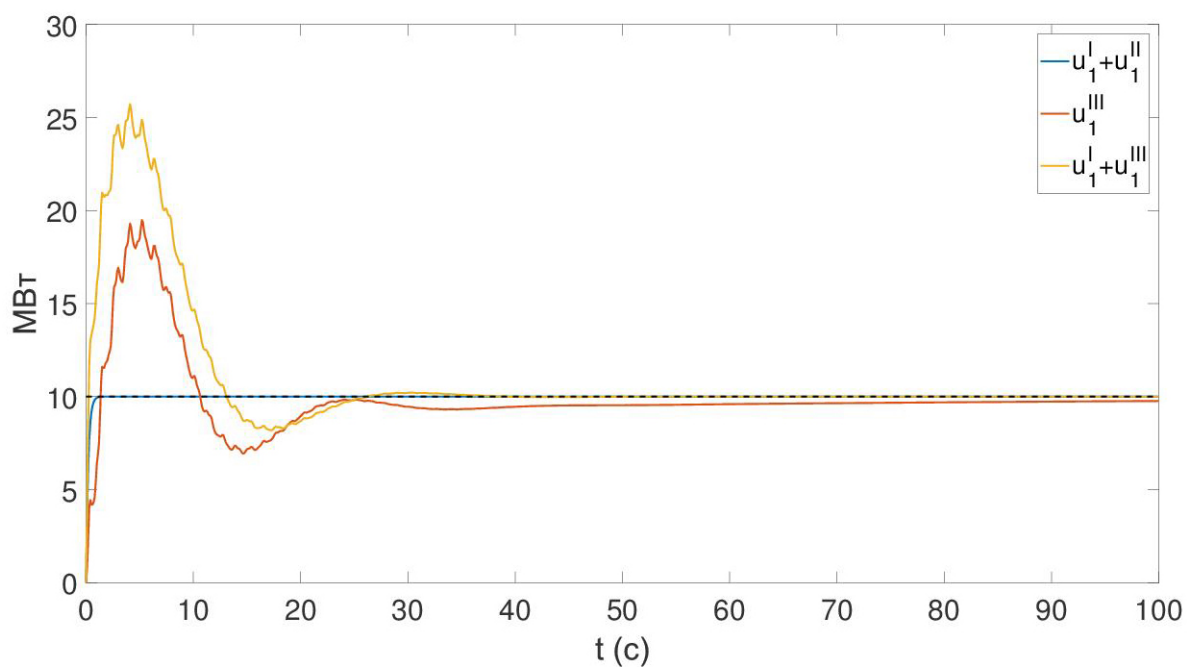


Рис. 1. Сигналы управления при различных видах регулирования

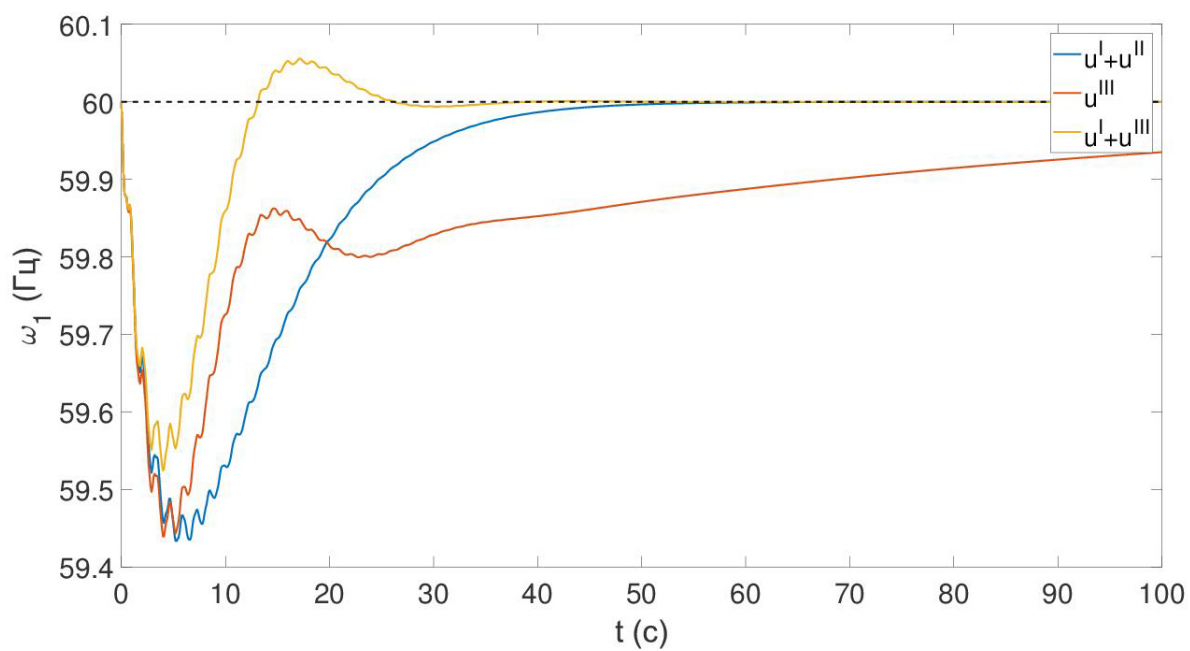


Рис. 2. Частоты в ЭЭС при различных видах регулирования

Литература

1. *Machowski J., Bialek J., Bumby J.* Power System Dynamics: Stability and Control, 2nd ed. NJ, US: John Wiley & Sons, Inc, 2008. P. 335–345.
2. *Бояринцев Ю.Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск : Наука, 2000. С. 9-11.
3. *Chow J., Rogers G.* Power system toolbox. Cherry Tree Scientific Software, 2000.
4. Annual Renewable Energy Constraint and Curtailment Report 2016. Engrid Soni, 2017. P. 3–5.
5. *Dörfler F., Bullo F.* Kron Reduction of Graphs with Application to Electrical Networks // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2013. V. 60, N 1. P. 150–163.
6. *Khamisov O.O.* Direct Disturbance Based Decentralized Frequency Control for Power Systems // Proceedings of 56th IEEE Conference on Decision and Control. 2017. P. 3271–3276.
7. *Andreasson M., Dimarogonas D.V., Sandberg H., Johansson K.H.* Distributed PI-Control with Applications to Power Systems Frequency Control // arXiv preprint arXiv:1311.0116v2. 2014.
8. *Zhao C., Topcu U., Li N., Low S.* Design and Stability of Load-Side Primary Frequency Control in Power Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. V. 59, N 5. P. 1177–1189.
9. *Zhao C., Low S.* Optimal decentralized primary frequency control in power networks // Proceedings of 53rd IEEE Conference on Decision and Control. 2014. P. 2467–2473.
10. *Khamisov O. O., Chernova T.S., Bialek J.W., Low S.H.* Corrective power system control: stability analysis of Unified Controller combining frequency control and congestion management // Proceedings of IEEE Conference on Sustainable Energy Supply and Energy Storage Systems. 2018. P. 15–20
11. *Демидович Б.П.* Лекции по математической устойчивости. Москва : Наука, 1967. С. 240–244.
12. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. Москва : Наука, 1987. С. 33–39.

References

1. *Machowski J., Bialek J., Bumby J.* Power System Dynamics: Stability and Control, 2nd ed. NJ, US: John Wiley & Sons, Inc, 2008. P. 335–345.
2. *Boiarintsev U. E.* Linear and nonlinear differential algebraic equations. Novosibirsk : Nauka, 2000. P. 9–11. (in Russian).
3. *Chow J., Rogers G.* Power system toolbox. Cherry Tree Scientific Software, 2000.
4. Annual Renewable Energy Constraint and Curtailment Report 2016. Engrid Soni, 2017. P. 3–5.
5. *Dörfler F., Bullo F.* Kron Reduction of Graphs with Application to Electrical Networks. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2013. V. 60, N 1. P. 150–163.
6. *Khamisov O.O.* Direct Disturbance Based Decentralized Frequency Control for Power Systems. Proceedings of 56th IEEE Conference on Decision and Control. 2017. P. 3271–3276.
7. *Andreasson M., Dimarogonas D.V., Sandberg H., Johansson K.H.* Distributed PI-Control with Applications to Power Systems Frequency Control. arXiv preprint arXiv:1311.0116v2. 2014.

8. *Zhao C., Topcu U., Li N., Low S.* Design and Stability of Load-Side Primary Frequency Control in Power Systems. IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. V. 59, N 5. P. 1177–1189.
9. *Zhao C., Low S.* Optimal decentralized primary frequency control in power networks. Proceedings of 53rd IEEE Conference on Decision and Control. 2014. P. 2467–2473.
10. *Khamisov O.O., Chernova T.S., Bialek J.W., Low S.H.* Corrective power system control: stability analysis of Unified Controller combining frequency control and congestion management. Proceedings of IEEE Conference on Sustainable Energy Supply and Energy Storage Systems. 2018. P. 15–20.
11. *Demidovich B. P.* Lectures on the Mathematical Stability Theory. Moscow : Nauka, 1967. P.240–244. (in Russian).
12. *Rumiantsev V.V., Oziraner A.S.* Stability and Stabilization of motion with respect to a part of the variables. Moscow : Nauka, 1987. P. 33–39.

Поступила в редакцию 16.04.2019