УДК 517

Д. В. Завадский

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Инвариантные относительно сдвигов меры на пространствах последовательностей

Рассматриваются счетно-аддитивные меры на банаховом пространстве l_∞ и линейном топологическом пространстве R^∞, которые являются инвариантными относительно сдвигов на произвольные векторы из рассматриваемых пространства. В статье приведен пример аналога меры Лебега – неотрицательная счетно-аддитивная мера, определенная на некотой сигма-алгебре подмножеств вышеупомянутых бесконечномерных пространств последовательностей, которая содержит все стационарные бесконечномерные прямоугольники (длина сторон которых равна 1 с некоторого момента), и являющаяся инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор в данных пространствах. Существенным же отличием полученной меры от стандартной меры Лебега на конечномерном пространстве является отсутствие сигма-конечности. Показано, что построенная мера удовлетворяет условию инвариантности относительно перестановок координат (в том числе и бесконечных) и условию инвариантности относительно отражений (замен знаков некоторых координат на противоположные).

Ключевые слова: пространства последовательностей, теорема Каратеодори о продолжении меры, инвариантные относительно сдвигов меры, инвариантость относительно перестановок, инвариантность относительно отражений.

D. V. Zavadsky

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Shift-invariant measures on sequence spaces

We consider countably-additive measures on the Banach space l_∞ and the linear topological space R^∞ that are shift-invariant to arbitrary vectors from the spaces under study. In this paper we give an example of an analogue of the Lebesgue measure – a nonnegative countably additive measure defined on a certain sigma algebra of subsets of the above infinite-dimensional sequence spaces which contains all stationary infinite-dimensional rectangles (whose length of sides is equal to one from some moment) and is invariant to shifts on an arbitrary vector in these spaces. An essential difference between the measure obtained in this paper and the standard Lebesgue measure on the finite-dimensional space is the absence of sigma-finiteness. It is shown that the measure constructed in the paper satisfies the condition of invariance to permutations of coordinates including infinite ones, and the condition of invariance to reflections replacing the signs of some coordinates by opposite ones.

Key words: sequence spaces, Caratheodory's extension theorem, shift-invariant measures, invariance with respect to permutations, invariance to reflections.

Введение

Инвариантные относительно сдвигов меры являются весьма эффективным инструментом для исследования решений дифференциальных уравнений при помощи усреднения случайных блужданий в координатном пространстве. Практическое применение вышеописанных мер можно найти в работах [3, 6, 8]. В данных статьях сильнонепрерывные однопараметрические полугруппы операторов, которые разрешают задачу Коши для уравнения диффузии, уравнения дробной диффузии и уравнения Шредингера с разнообразными

© Завадский Д. В., 2017

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2017

гамильтонианами, были получены при помощи усреднения случайных однопараметрических семейств операторов сдвига на векторы координатного пространства по мерам на множестве таких операторов. Такой подход к изучению свойств решения дифференциальных уравнений для функций на бесконечномерных пространствах требует решение задачи отыскания и изучения мер на бесконечномерных пространствах, инвариантных относительно сдвигов на векторы этого пространства или относительно других групп преобразований (см. [7]).

Известно (см. [4]), что не существует меры Лебега на бесконечномерном топологическом векторном пространстве, то есть не существует ненулевой счетно-аддитивной σ-конечной меры на σ-кольце борелевских подмножеств бесконечномерного топологического векторного пространства, инвариантной относительно сдвигов на векторы этого пространства. В связи с этим изучались вопросы о существовании мер на бесконечномерных топологических векторных пространствах, которые удовлетворяют лишь некоторым свойствам меры Лебега (см. [1, 5, 7, 9]).

В данной статье рассматривается задача о существовании сигма-аддитивных мер на бесконечномерных топологических векторных пространствах, инвариантных относительно сдвигов на произвольный вектор этого пространства, построен пример такой меры. Будут исследованы топологическоие векторные пространства числовых последовательностей R^∞ и l_∞. Также будет доказано, что построенный пример удовлетворяет условию инвариантности относительно перестановок координат (в том числе и бесконечных) и условию инвариантности относительно отражений (замен знаков некоторых координат на противоположные).

Схема построения инвариантной меры на пространствах R^∞ и l_∞

Будем рассматривать лишь пространство l_∞ (в пространстве R^∞ все будет точно так же). Процесс построения сигма-аддитивной меры на бесконечномерных топологических векторных пространствах, инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор этого пространства, разобьем на несколько шагов. Сперва определим меру на алгебре подмножеств единичного куба естественным образом. Далее необходимо будет продолжить полученную меру на соответствующую сигма-алгебру. После этого продолжим меру на множества, которые при помощи сдвига могут быть «помещены» в единичный куб так, чтобы выполнялось условие инвариантности относительно сдвигов. Наконец, продолжим по схеме Каратеодори полученную меру на соответствующую сигма-алгебру.

Шаг 1

Рассмотрим единичный куб в l^∞: $K \overset{\text{def}}{=} [0;1] \times [0;1] \times ... \times [0;1] \times ...$ и набор множеств $A_i \overset{\text{def}}{=} \{B \times [0;1] \times [0;1] \times ... \times [0;1] \times ... | B \in \mathfrak{B}([0;1]^i)\}$, где $i \in N$. Множества из данных наборов будем называть *обобщёнными брусами.* Далее введем систему множеств: $S \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Очевидно, что S является алгеброй на K. Определим функцию λ на S следующим образом: $\forall i \in N\ \forall B \in \mathfrak{B}([0;1]^i)$: $\lambda(\mathfrak{B} \times [0;1] \times [0;1] \times ... \times [0;1] \times ...) \overset{\text{def}}{=} \lambda^i(B)$, где λ^i является мерой Лебега на R^i. Пусть теперь одному множеству из S соответствуют два различных множества: $B_1 \in \mathfrak{B}([0;1]^n)$ и $B_2 \in \mathfrak{B}([0;1]^{n+k})$. В таком случае $B_2 = B_1 \times [0;1] \times [0;1] \times ... \times [0;1]$. Следовательно $\lambda^n(B_1) = \lambda^{n+k}(B_2)$. значит, функция λ определена корректно. Очевидно, что функция λ является σ-аддитивной (см. теорема 3.5.1 на стр. 223 в [2]). Таким образом мы построили меру λ на K.

Шаг 2

Теперь продолжим меру λ, используя схему Лебега с алгебры S на σ-алгебру, которую обозначим через S_1. Далее введем следующие определения: λ^* является внешней мерой, которая согласована с мерой λ (сужение внешней меры λ^* на сигма-алгебру S_1 и будет вышеупомянутым продолжением меры λ), P_i является оператором поектирования на i-ю координату, $h + H \overset{\text{def}}{=} \{h + a | a \in H\}$ $(H \subset l_\infty,\ h \in l_\infty)$.

Утверждение 1. Внешняя мера λ^* является инвариантной относительно сдвигов, оставляющих сдвигаемые множества в единичном кубе.

Доказательство

Пусть $H \subset K$, $h \in l_\infty$, $h + H \subset K$. Исходя из определения внешней меры, $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_{j_i} \in \mathfrak{B}([0;1]^{j_i})$:

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{j_i} \times [0;1] \times [0;1] \times ... \times [0;1] \times ..., \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{j_i}(B_{j_i}) - \lambda^*(H) \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_{j_i} \bigcap \prod_{k=1}^{j_i} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)]) \times [0;1] \times [0;1] \times ... \times [0;1] \times ..., \tag{3}$$

кроме того выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{j_i}(B_{j_i} \bigcap \prod_{k=1}^{j_i} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)] - \lambda^*(H) \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Легко проверяемым является следующее утверждение:

$$h + H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} ((P_1(h); P_2(h); ...; P_{j_i}(h); 0; 0; ...) + (B_{j_i} \bigcap \prod_{k=1}^{j_i} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)])) \times$$

$$\times [0;1] \times [0;1] \times ... \times [0;1] \times ..., \tag{5}$$

при этом справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{j_i}((P_1(h); P_2(h); ...; P_{j_i}(h); 0; 0; ...) + (B_{j_i} \bigcap \prod_{k=1}^{j_i} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)])) \leqslant \lambda^*(H) + \varepsilon. \tag{6}$$

Таким образом:

$$\lambda^*(h + H) \leqslant \lambda^*(H). \tag{7}$$

Аналогично можно сделать вывод, что

$$\lambda^*(h + H) \geqslant \lambda^*(H). \tag{8}$$

В результате мы получаем, что $\forall H \subset K$, $\forall h \in l^\infty : h + H \subset K \Rightarrow \lambda^*(h + H) = \lambda^*(H)$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. $\forall H \in S_1$, $\forall h \in l^\infty$: $h + H \subset K \Rightarrow h + H \in S_1$.

Доказательство

Легко убедиться в том, что

$$\exists X \in S\colon \lambda^*(H \triangle X) \leqslant \varepsilon, \tag{9}$$

где $\varepsilon > 0$. Очевидно, что

$$X \bigcap \prod_{k=1}^{\infty} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)] \in S_1; \tag{10}$$

$$\lambda^*(H \triangle (X \bigcap \prod_{k=1}^{\infty} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)])) \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Согласно утверждению 1 можно сделать вывод, что

$$\lambda^*((h+H) \triangle (h + (X \bigcap \prod_{k=1}^{\infty} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)]))) \leqslant \varepsilon. \tag{12}$$

Легко понять, что

$$h + (X \bigcap \prod_{k=1}^{\infty} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)]) \in S_1. \tag{13}$$

Таким образом:

$$\exists X_1 \in S\colon \lambda^*(X_1 \triangle (h + (X \bigcap \prod_{k=1}^{\infty} [\inf P_k(H); \sup P_k(H)]))) \leqslant \varepsilon. \tag{14}$$

Следовательно:

$$\lambda^*(H + h \triangle X_1) \leqslant 2\varepsilon. \tag{15}$$

В результате получаем, что множество $H + h$ является измеримым, что и требовалось доказать.

Под мерой λ будем теперь понимать её продолжение на сигма-алгебру S_1.

Шаг 3

Определим новый набор множеств следующим образом:

$$L \in S_2 \Leftrightarrow L = h + X,$$

где $X \in S_1$, $h \in l^{\infty}$.

Утверждение 3. Класс множеств S_2 замкнут относительно взятия пересечения.

Доказательство

Пусть $N, M \in S_2$. Согласно определению класса множеств S_2, $N = h_1 + N_1$, $M_1 = h_2 + M$, где h_1, $h_2 \in l^{\infty}$; N_1, $M_1 \in S_1$. Очевидно, что достаточно доказать, что $N_1 \bigcap (h_2 - h_1 + M_1) \in S_1$. Несложно проверить, что

$$K \bigcap (h_2 - h_1 + M_1) = (h_2 - h_1) + (M_1 \bigcap \prod_{k=1}^{\infty} [-P_k(h_2 - h_1); 1 - P_k(h_2 - h_1)]). \tag{16}$$

Таким образом $K \bigcap (h_2 - h_1 + M_1) \in S_1$. Исходя из этого можно сделать вывод, что $N_1 \bigcap (h_2 - h_1 + M_1) \in S_1$, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Класс множеств S_2 замкнут относительно взятия разности.

Доказательство

Пусть $N, M \in S_2$. Как и в прошлом утверждении, достаточно доказать, что

$$N_1 \setminus (h_2 - h_1 + M_1) \in S_1. \tag{17}$$

Легко видеть, что

$$N_1 \setminus (h_2 - h_1 + M_1) = N_1 \setminus ((h_2 - h_1 + M_1) \bigcap K). \tag{18}$$

Согласно утверждению 2, $K \bigcap (h_2 - h_1 + M_1) \in S_1$. В результате чего получаем, что $N_1 \setminus (h_2 - h_1 + M_1) \in S_1$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что S_2 является полукольцом. Далее продолжим меру λ на полукольцо S_2 следующим образом:

$$\lambda_1(h + H) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(H), \tag{19}$$

где $H \in S_1$, $h \in l^\infty$.

Утверждения 1 и 2 гарантируют корректность данного определения.

Утверждение 5. Функция λ_1 является σ-аддитивной.

Доказательство

Пусть

$$h + T = \bigcup_{i=1}^{\infty} h_i + T_i, \tag{20}$$

где T, $T_i \in S_1$; h, $h_i \in\ l^\infty$, и

$$\forall i, j \in N : h_i + T_i \bigcap h_j + T_j = \varnothing. \tag{21}$$

Легко видеть, что

$$T = \bigcup_{i=1}^{\infty} (h_i - h) + T_i, ; \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda((h_i - h) + T_i) = \lambda(T). \tag{23}$$

Следовательно:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1(h_i + T_i) = \lambda_1(h + T). \tag{24}$$

Таким образом, функция λ_1 является σ-аддитивной, что и требовалось доказать.

В результате мы получили σ-аддитивную меру λ_1 на полукольце S_2.

Шаг 4 (финальный)

Теперь продолжим меру λ_1 на соответствующую σ-алгебру при помощи теоремы Каратеодори о продолжении меры. В результате мы получаем инвариантную относительно сдвигов меру λ_2 (доказывается это так же, как и в шаге 2). Очевидно, что полученная мера является полной, но не является сигма-конечной. Сформулируем теперь совокупный результат предыдущих шагов.

Теорема 1. *Функция λ_2 является сигма-аддитивной, полной, инвариантной относительно сдвигов мерой, заданной на сигма-алгебре, которая содержит все стационарные бесконечномерные прямоугольники.*

Инварианты построенной меры

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Мера λ_2 инвариантна относительно перестановок координат (в том числе и бесконечных).*

Доказательство

Пусть задано отображение f, которое является перестановкой координат. Тогда легко видеть, что данное отображение переводит элементы из класса S в элементы из этого же класса с сохранением меры (так как аналогичное утверждение, очевидно, верно для меры Лебега в конечномерном случае). Рассмотрим теперь продолжение меры на класс S_1 (см. шаг 2). Очевидно, что отображение f сохраняет внешнюю меру. Кроме того, отображение f сохраняет измеримость. Это легко показать, используя критерий измеримости, который был использован при доказательстве утверждения 2. Также очевидно, что инвариантность имеет место и для множеств из класса S_2, так как отображение f переводит множества из данного класса во множества, которые также принадлежат данному классу, и мера сохраняется, поскольку это верно для множеств из класса S_1. Аналогичным образом доказывается инвариантность на «финальной» сигма-алгебре. Значит мера λ_2 инвариантна относительно перестановок, что и требовалось доказать.

Также следует отметить, что инвариантность не выполняется для меры, построенной в [1]. В качестве примера рассмотрим множество: $\prod\limits_{k=1}^{\infty}[0; e^{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}]$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, очевидно, является условно сходящимся, то теорема Римана обуславливает изменение меры данного множества при некоторой перестановке. Следовательно, мера, приведённая в статье [1], не является инвариантной относительно перестановок.

Назовём преобразование рассмотренных пространств отражением, если оно меняет знак некоторых координат (их может быть и бесконечное количество) на противоположный. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Мера λ_2 инвариантна относительно отражений.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2. Единственным существенным отличием является дополнительный вспомогательный прием: в результате применения отражения к обобщенным брусам, они перестают быть подмножествами куба, но это можно «исправить» прибавлением подходящего вектора (очевидно, мера при этом не меняется).

Также следует отметить, что построенная мера будет, очевидно, инвариантна относительно композиций перестановок координат и отражений.

Заключение

В статье изучаются меры на банаховых пространствах R^∞ и l_∞, инвариантные относительно сдвигов на произвольные векторы из рассматриваемого банахова пространства. Построен аналог меры Лебега – неотрицательная счетно-аддитивная мера, определенная на минимальном кольце подмножеств бесконечномерного банахова пространства, содержащего все стационарные бесконечномерные прямоугольники (длина сторон которых равна 1 с некоторого момента), и являющаяся инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор банахова пространства. Было показано, что построенная на пространствах l_∞ и R^∞ мера является инвариантной относительно перестановок координат (в том числе и бесконечных) и отражений.

Автор благодарит В. Ж. Сакбаева за плодотворные обсуждения затронутых в работе проблем.

Литература

1. *Baker R.* «Lebesgue measure» on R^∞ // Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023–1029.

2. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т. 1. М.–Ижевск: РХД, 2006.

3. *Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.* Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 057. 23 с.
4. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применение. М.: Изд иностр. лит., 1950.
5. *Вершик А.М.* Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве? // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 259. С. 256–281.
6. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Математика. 2016. № 80(6). С. 141–172.
7. *В.Ж. Сакбаев* Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига // ТМФ. 2017. 191(2). С. 724–747.
8. *О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе* Континуальные интегралы М.: УРСС, 2015.
9. В.Ж. Сакбаев. Меры на бесконечномерных пространствах, инвариантные относительно сдвигов // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 2. С. 1–7.

References

1. *Baker R.* «Lebesgue measure» on R^∞. Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023–1029.
2. *Bogachev V.I.* Basis of measure theory. V. 1. RHD. Moscow–Izhevsk, 2006.
3. *Borisov L.A., Orlov Yu.N, Sakbaev V.Zh.* Feynman formulas for averaging of semigroups generating by the operators of Schrodinger type. Preprint of IAM by M.V. Keldysh. 2015. N 057. 23 p.
4. *Weil A.* l'Integration dans les group topologiques et ses application. Moscow: Publisher of foreign literature, 1950.
5. *Vershik A.M.* Does there exist a Lebesgue measure in the infinite-dimensional space? Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V. 259. P. 256–281.
6. *Orlov Y.N., Sakbaev V.Z., Smolyanov O.G.* Unbounded random operators and Feynman formulae. Izvestiya RAS. Mathematics. 2016. N 80(6). P. 141–172.
7. *Sakbaev V.Zh.* Averaging of random walks and measures on Hilbert space invariant with respect to shifts. Theoretical and Mathematical physics. 2017. 191(2): 724–747.
8. *Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T.* Continualnie integraly M.: URSS, 2015.
9. *Sakbaev V.Zh.* Measures on the infinite dimensional spaces invariant with respect to shifts. Proceedings of MIPT. 2016. V. 8, N 2. P. 1–7.

Поступила в редакцию 21.07.2017