УДК 517.972

А. Акбари Фаллахи

Российский университет дружбы народов

Дифференциально-разностные уравнения второго порядка с опережением в весовых пространствах Соболева

В статье исследована корректная разрешимость задачи с начальными условиями для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с опережающим аргументом в весовом пространстве Соболева при отсутствии ограничений на малость коэффициентов при слагаемых с отклонениями аргумента. Установлено, что для сколь угодно большого значения коэффициента при слагаемом с опережением найдутся столь малые значения величины отклонения аргумента и такие значения весового параметра пространства Соболева, что в соответствующем пространстве рассматриваемая задача корректно разрешима. Рассмотрены новые постановки задачи с начальными условиями для уравнения с опережением, при которых в начальный момент времени задаются значения m первых производных неизвестной функции при некотором натуральном m. Установлено, что при достаточно больших значениях показателя пространства Соболева такая задача имеет хотя бы одно решение.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, задача с начальными условиями, пространства Соболева.

A. Akbari Fallahi

Peoples' Friendship University of Russia

Differential difference second order equations with advancing in the weighted Sobolev space

In the paper, the correct solvability of the problem with initial conditions for the differential difference second order equations with advancing in the weighted Sobolev space in the absence of restrictions on the smallness of the coefficients of terms with argument deviations is studied. It is proved that for an arbitraryly large value of the coefficient with advancing term there are sufficiently small values of the shift of argument and the values of the indicator in the Sobolev space such that the considered problem is well-posed in the correcponding Sobolev space. We study the new statement of the problem with initial conditions for the equation with an advancing such that the values of m of the first derivatives of unknown function for some natural m is given at the initial time. It is shown that for sufficiently large values of the indicator in the Sobolev space this problem has at least one solution.

Key words: Differential difference equations with initial value problem, Sobolev spaces.

1. Введение

В настоящей работе исследуются вопросы постановки и корректной разрешимости задачи с начальными условиями для модельного дифференциально-разностного уравнения второго порядка вида

$$u_{tt}(t) = \mathcal{L}u(t) + f(t),\ t > 0, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}$ – разностный оператор, сопоставляющий функции $u:\ R_+ \equiv [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ функцию $\mathcal{L}u:\ R_+ \to \mathbf{C}$, определяемую равенством

$$\mathcal{L}u(t) = -a^2u(t) + bu(t+h),\ t \in [0, +\infty). \tag{2}$$

Здесь коэффициенты $a, b \in R$ – вещественные числа, $h > 0$, f – заданная числовая функция на области $(0, +\infty)$, а u – неизвестная числовая функция, областью определения которой является полуось $(0, +\infty)$.

Областью определения оператора $\mathcal{L}$, действующего в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(0, +\infty)$, является гильбертово пространство

$$D(\mathcal{L}) = W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$$

([2], [3] и ниже), на котором оператор $\mathcal{L}$ определен согласно формуле (2). Ставится задача определить функцию $u: \ (0, +\infty) \to R$, которая в области $(0, +\infty)$ удовлетворяет уравнению (1) , а при $t \to +0$ удовлетворяет начальному условию следующего вида:

$$u(+0) = \varphi, \quad u'(+0) = \psi, \tag{3}$$

где $(\varphi, \psi) \in R^2$ – начальное значение функции и ее первой производной.

Для каждого числа $\gamma \geq 0$ через $L_{2,\gamma}(R_+)$ обозначим пространство классов эквивалентности измеримых отображений $u: \ R_+ \to \mathbf{C}$, для которых выполняется условие $e^{-\gamma t} u \in L_2(R_+)$, наделенное нормой

$$\|u\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} = \|e^{-\gamma t} u\|_{L_2(R)}.$$

Через $W^l_{2,\gamma}(a, b)$ при каждом $l \in \mathbf{N}$ обозначим пространство числовых функций на интервале (a, b) со значениями в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ таких, что

$$u^{jl}(t) \in L_{2,\gamma}(a, b), \ j = 0, 1, \ \ l = 1, 2, ...,$$

с нормой

$$\| u \|_{W^l_{2,\gamma}(a,b)} = (\| u^{(l)} \|^2_{L_{2,\gamma}(a,b)} + (\| u \|^2_{L_{2,\gamma}(a,b)})^{1/2}, \gamma \geq 0.$$

Определение. Функцию $u \in W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$ назовем решением задачи (1), (2), (3) в весовом пространстве Соболева, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) в пространстве $L_{2,\gamma}(0, +\infty)$ и начальному условию (3).

В статье будет исследован вопрос о корректности задач (1), (2), (3) в весовых пространствах Соболева из шкалы $W^2_{2,\gamma}(R_+)$, $\gamma \in R$. То есть решается следующий вопрос – при заданных коэффициентах a, b, h существуют ли такие значения параметра $\gamma \in R$, что при любых начальных данных (3) и при любых $f \in L_{2,\gamma}(0, +\infty)$ задача (1), (2), (3) имеет единственное решение из пространства $W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$, и при этом $W^2_{2,\gamma}$-норма решения допускает оценку через $f \in L_{2,\gamma}$-норму функции f и норму начальных данных в евклидовом пространстве R^2:

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}} \leq c[\|f\|_{L_{2,\gamma}} + |\varphi| + |\psi|].$$

В работах [8], [7] было установлено, что при достаточно малых коэффициентах при слагаемом с отклонениями аргумента существует такой интервал $(\alpha, \beta) \in (0, +\infty)$, что для любого $\gamma \in (\alpha, \beta)$ и любого $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$ существует единственное решение задачи (1) – (3) из пространства $W^2_{2,\gamma}(R_+)$. В тех же работах установлено, что если коэффициенты при слагаемом с отклонениями аргумента малы в определенном смысле (см. [8] или теорему 1 ниже), то при достаточно больших $\gamma > \beta$ задача (1) – (3) имеет в пространстве $W^2_{2,\gamma}(R_+)$ более одного решения, а при достаточно малых $\gamma < \alpha$ существуют такие начальные данные задачи (1) – (3), при которых она не имеет решения.

Остается неисследованным вопрос о корректной разрешимости задачи (1) – (3) при нарушении условия малости коэффициентов при слагаемом с опережением. В настоящей работе установлено, что если $b > a$, то при достаточно малых значениях $h > 0$ задача (1) – (3) имеет единственное решение. При этом условия теоремы 1 являются нарушенными. Таким образом, в работе найдена новая область в пространстве R^3 коэффициентов (a, b, h), в которой имеет место корректность задачи (1) – (3).

Будет установлено, что в зависимости от коэффициентов уравнения, точнее, в зависимости от расположения корней характеристического квазимногочлена дифференциально-разностного оператора (2), реализуются различные возможности корректной постановки задачи (1), (2), (3), а также возможность однозначной разрешимости задачи с одним начальным условием (13) для однородного уравнения (1) (см. Следствие 3 ниже).

Ключевую роль в выборе корректной постановки задачи для дифференциально-разностного уравнения (1), (2) играет множество корней характеристического квазимногочлена оператора (2):

$$\lambda^2 = -a^2 + be^{\lambda h}. \tag{4}$$

Множество Ξ комплексных корней уравнения (4) является счетным множеством в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (см. [1], [10]), которое симметрично относительно вещественной оси при условии $a, b, h \in R$. Спецификой опережающего типа дифференциально-разностного оператора (2) является то, что в любой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) < \gamma$ плоскости $\mathbf{C}$ находится не более чем конечное множество точек Ξ. Поэтому существует конечное подмножество точек множества Ξ, на которых достигается величина $\gamma_* = \inf(\mathrm{Re}\Xi)$.

Свойства множества характеристического квазимногочлена

Характеристическое уравнение (4) эквивалентно следующей системе из двух уравнений для пары вещественных переменных $(x, y) \in R^2$:

$$2xy = be^{xh}\sin(yh). \tag{5}$$

$$x^2 - y^2 = -a^2 + be^{xh}\cos(yh). \tag{6}$$

Значит, из системы (5) – (6) (из уравнения (4)) следует, что

$$(x^2 + a^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = b^2e^{2hx}. \tag{7}$$

кроме того, для всех корней уравнения (4) с ненулевой мнимой частью выполняется равенство

$$\frac{2xy}{x^2 + a^2 - y^2} = \mathrm{tg}(yh). \tag{8}$$

Из уравнения (7) выходит, что

$$a^2 + x^2 + y^2 = \sqrt{4a^2y^2 + b^2e^{2hx}}, \tag{9}$$

из которого следует, что при достаточно больших значениях переменной $|y|$ (при $y^2 > |b| + a^2$) вещественные части комплексных корней уравнения (4) положительны.

Лемма 1. *Если $y^2 > 2|a||y| + |b|$ (то есть $|y| > |a| + \sqrt{|b| + a^2}$), то множество точек, удовлетворяющих уравнению (9), лежит в полуплоскости $x > 0$.*

Действительно, если $y^2 > 2|a||y| + |b|$, то

$$a^2 + x^2 + y^2 > a^2 + |b| + 2|a||y| > \sqrt{4a^2y^2 + b^2},$$

поэтому уравнение (9) не может быть выполненно при $x \leq 0$.

Из леммы 1 следует, что для заданной неявно уравнением (9) функции $x(y)$, $y \in O(\infty)$, выполняется асимптотическое равенство

$$x(y) = \frac{1}{2h}\ln\left(\frac{y^4}{b^2}\right)(1 + o(1))$$

при $|y| \to +\infty$.

Множеством вещественных корней уравнения (4) является совокупность корней уравнения

$$x^2 + a^2 = be^{xh}. \tag{10}$$

Уравнение (10) не имеет вещественных корней при условии $b \leq 0$; в этом случае минимум действительной части множества Ξ достигается на конечном множестве комлексно-сопряженных корней, в случае общего положения – на двух комплексно-сопряженных корнях.

Если же $b > 0$, то:

1) при условии $0 < b \leq a^2$ уравнение (10) может иметь от одного до трех вещественных корней, каждый из которых положителен;

2) при условии $a^2 < b$ уравнение (10) имеет один отрицительный корень x_1 и от нуля до двух положительных корней. Исследуем асимптотическое поведение корней уравнения (10) при условиях $b > a^2$ и $h \to +0$.

Лемма 2. *Если $b > a^2$, то существует такое $h_0 > 0$, что при всех $h \in (0, h_0)$ уравнение* (4) *имеет три вещественных корня x_1, x_2, x_3, для которых справедливы неравенства $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, причем $x_1 = -\sqrt{b-a^2} + o(1)$ при $h \to 0$, $x_2 = \sqrt{b-a^2} + o(1)$ при $h \to 0$, и $x_3 \to +\infty$ при $h \to +0$.*

Первая часть утверждения леммы 2 следует из того, что вершина параболы $u = x^2 + a^2$ лежит ниже графика экспоненты $u = be^{hx}$, а при достаточно малых $h > 0$ парабола дважды пересекает график экспоненты в полуплоскости $x > 0$. Асимптотическое поведение при $h \to +0$ точек пересечения графиков параболы и экспоненты следует из свойств элементарных функций.

Лемма 3. *Если $b > 2a^2$, то существует такое $h_0 > 0$, что при всех $h \in (0, h_0)$ все комплексные корни характеристического многочлена* (4) *имеют вещественную часть, большую, чем максимальный вещественный корень x_3 уравнения* (4).

Все корни уравнения (4) лежат на кривой $\Gamma = \{x = x(y^2),\ y \in R\}$, заданной неявно уравнением (9), которая состоит из двух связных компонент:

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in R^2 :\ y^2 = a^2 - x^2 \pm \sqrt{b^2e^{2hx} - 4x^2a^2},\ x \in [x_1, x_2]\}$$

и

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in R^2 :\ y^2 = a^2 - x^2 \pm \sqrt{b^2e^{2hx} - 4x^2a^2},\ x \geq x_3\}.$$

Все вещественные корни лежат на пересечении кривой Γ с вещественной осью: $x_1, x_2 \in \Gamma_1,\ x_3 \in \Gamma_2$.

Кроме того, все корни уравнения (4) с ненулевой вещественной частью лежат на кривой γ, задаваемой уравнением (8) и состоящей из счетного множества связных компонент, задаваемых уравнениями:

$$x = y\operatorname{ctg}(hy) \pm \sqrt{\frac{y^2}{\sin^2(hy)} - a^2},\ y \in R \backslash \left\{\frac{\pi m}{h},\, m \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Через γ_0 обозначим множество точек плоскости, определяемое уравнениями

$$x = y\operatorname{ctg}(hy) \pm \sqrt{\frac{y^2}{\sin^2(hy)} - a^2}, y \in \left(-\frac{\pi}{h}, 0\right) \bigcup \left(0, \frac{\pi}{h}\right),$$

а через γ_m, $m \in \mathbf{N}$, – кривые, определяемые уравнениями

$$x = y\operatorname{ctg}(hy) \pm \sqrt{\frac{y^2}{\sin^2(hy)} - a^2},\ y \in \left(-\frac{\pi(m+1)}{h}, -\frac{\pi m}{h}\right) \bigcup \left(\frac{\pi m}{h}, \frac{\pi(m+1)}{h}\right).$$

Все точки пересечения кривой γ с кривой Γ_2 лежат, как и сама кривая Γ_2, в полуплоскости $x \geq x_3$.

Лемма 3 будет доказана, если показать, что кривая γ не имеет пересечения с кривой Γ_1.

Заметим, что при достаточно малых значениях $h > 0$ кривая Γ_1 лежит в полосе $|y| < \frac{\pi}{2h}$, и, следовательно, все кривые γ_m, $m \in \mathbf{N}$, не пересекаются с кривой Γ_1.

Покажем, что точки пересечения кривой γ_0 с кривой Γ_1 не являются решениями системы уравнений (5), (6).

Ветви γ_{+0} кривой γ_0, определяемые уравнением

$$x = \frac{y}{\sin(hy)}[\cos(hy) + \sqrt{1 - a^2\frac{\sin^2(hy)}{y^2}}],\ y \in \left(-\frac{\pi}{2h}, 0\right)\bigcup\left(0, \frac{\pi}{2h}\right),$$

лежат в полуплоскости $y > \frac{\sqrt{1-a^2h^2}}{h}$, которая при достаточно малых $h > 0$ не пересекается с кривой Γ_1 (лежит правее кривой Γ_1).

Ветви γ_{-0} кривой γ_0, определяемые уравнением

$$x = \frac{y}{\sin(hy)}[\cos(hy) - \sqrt{1 - a^2\frac{\sin^2(hy)}{y^2}}],\ y \in \left(-\frac{\pi}{2h}, 0\right)\bigcup\left(0, \frac{\pi}{2h}\right),$$

лежат в полуплоскости $x < 0$ при $|y| > |a|$, а при $|y| \le |a|$ лежат в прямоугольнике $\{(x, y) :\ 0 \le x \le a^2h,\ |y| < |a|\}$.

Заметим, что в силу уравнения (6) для любых $y \in (-\frac{\pi}{2h}, 0)\bigcup(0, \frac{\pi}{2h})$ выполняется равенство $2x = be^{hx}\frac{\sin(hy)}{y} > 0$, поэтому точки пересечения кривой γ_{-0} с кривой Γ_1, лежащие в полуплоскости $x < 0$, не могут быть решениями системы (5), (6).

А для точек прямоугольника $\{(x, y)\ :\ \ 0 \le x \le a^2h, |y| < |a|\}$ из условия $b > a^2$ следует, что при достаточно малых значениях $h > 0$ выполняется неравенство $a^2 + x^2 + y^2 < \sqrt{4a^2y^2 + b^2e^{2hx}}$, то есть не выполнено равенство (9). Поэтому точки пересечения кривой γ_{-0} с кривой Γ_1, лежащие в полуплоскости $x > 0$, не могут быть решениями системы (5), (6).

Таким образом, лемма 3 дает достаточные условия того, что вещественные части невещественных точек множества Ξ превосходят максимальный из корней уравнения (10).

Корни характеристического многочлена и разрешимость в пространстве Соболева с экспоненциальным весом

Заметим, что если при некотором $\gamma \in R$ множество $\{\xi \in \Xi :\ \xi < \gamma\} = \{\xi_{-1}, ..., \xi_m\}$ состоит из $m(\gamma) \in \mathbf{N}$ элементов, то пространство $W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$ содержит m-мерное подпространство решений однородного уравнения (1)

$$\Lambda_\gamma = \left\{\sum_{j=1}^{m} c_j e^{\xi_j t}\right\}.$$

Замечание. Матрица Вронского системы функций $e^{\xi_j t}$, $j \in \overline{0, m-1}$, невырождена, поскольку все числа ξ_j, $j \in \overline{0, m-1}$, различны.

Следствие 1. Пусть при некотором $\gamma \in R$ выполняется условие $m(\gamma) \in \mathbf{N}$. Тогда для любого набора чисел $(u_0, u_1, ..., u_{m(\gamma)-1}) \in \mathbf{C}^{m(\gamma)}$ дифференциально-разностное уравнение (1) имеет хотя бы одно решение $u \in W^2_{2,\gamma}(R_+)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u^{(j)}(+0) = u_j,\ j \in \overline{0, m-1}. \tag{11}$$

Таким образом, следствие 1 устанавливает достаточные условия существования в пространстве $W^2_{2,\gamma}(R_+)$ решения задачи с начальными условиями (1), (2), (11). Единственность решения задачи с начальными условиями (1), (2), (11) требует дополнительного исследования. Планируется применить для этой цели принцип сжимающих отображений. Следствие 1 показывает, как размерность пространства начальных данных задачи с начальными условиями для дифференциально-разностного уравнения (1) – (2) зависит от весового параметра γ пространства Соболева и от расположения корней характеристического многочлена.

Условия корректной разрешимости задачи (1), (2), (3), основанные на малости коэффициентов

В случае, когда коэффициенты при слагаемом с опережением достаточно малы, принцип сжимающих олтображений позволяет установить результат о существовании и единственности решения задачи с начальными условиями (см. [2], [4]).

Положим

$$\omega(\gamma) = \frac{e^{\gamma h}|b|}{\gamma\sqrt{a^2+\gamma^2}}, \gamma \in R. \tag{12}$$

В работах [8] было установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\omega(\gamma) < 1$ *на некотором промежутке* $(\alpha, \beta) \subset R$ *и пусть* $f \in L_{2,\gamma_0}(0, +\infty)$ *при некоторых* $\gamma_0 \in (\alpha, \beta)$. *Тогда при любом* $\gamma \in [\gamma_0, \beta)$ *задача Коши* (1), (2), (3) *имеет единственное решение и в пространстве* $W^2_{2,\gamma}(0, +\infty)$, *причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(0,+\infty)} \leq C[|\varphi| + |\psi| + \|f\|_{L_{2,\gamma}(0,+\infty)}]$$

с константой, не зависящей от φ, ψ, f.

Характеристическое уравнение (4) имеет счетное множество Ξ комплексных корней $\Xi = \{\lambda_k,\ k \in \mathbf{N}\}$, причем при каждом $k \in \mathbf{N}$ функция $\exp(\lambda_k t)$, $t > 0$, является решением уравнения (1).

Если $\lambda_k = x_k + iy_k$ и $\gamma \in R$, то включение $\exp(\lambda_k t) \in W^1_{2,\gamma}(0, +\infty)$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_k < \gamma$. Основываясь на этом факте, мы исследуем взаимное расположение множества Ξ и промежутка (α, β) корректности задачи (1), (2) в шкале весовых показателей – такого промежутка (α, β), что $\forall \gamma \in (\alpha, \beta)$ $\omega(\gamma) < 1$. Определим числа

$$a = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \Xi,\ \mathrm{Re}\lambda < \alpha\},$$

$$b = \inf\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \Xi,\ \mathrm{Re}\lambda > \beta\}.$$

Как установлено в работе [8], справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\omega(\gamma) < 1$ *на интервале* $(\alpha, \beta) \subset R$. *Тогда в полосе комплексной плоскости* $\alpha < \mathrm{Re}\lambda < \beta$ *нет точек множества* Ξ.

При этом если $\gamma > b$, то однородная задача (1) – (3) имеет нетривиальное решение $u \in W^2_{2,\gamma}(h, +\infty)$. Если $\gamma < a$, то не при всех начальных данных $(\varphi, \psi) \in R^2$ однородное уравнение $u_t = \mathcal{M}u(t), t > 0$, имеет решение из пространства $W^2_{2,\gamma}(h, +\infty)$.

Следствие 2. Если выполняется условие $0 < -b < a^2$ и условие $\exists\ \gamma \geq 0 :\ \omega(\gamma) < 1$, то величина $\gamma_* = \inf \mathrm{Re}\Xi$ достигается на некоторой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda_{\pm 1} = x_1 \pm iy_1$, где $x_1 = \gamma_*$ и $y_1 > 0$. Если при этом $\gamma^* = \inf \mathrm{Re}\xi :\ \xi \in \Xi, \xi > \gamma_*$, то $(\alpha, \beta) \subset (\gamma_*, \gamma^*)$. Тогда если $\gamma \in (\alpha, \beta)$, то для любых $(\varphi, \psi) \in R^2$ задача (1), (2), (3) с однородным уравнением (1) имеет единственное решение

$$u(t) = [A\cos(y_1 t) + B\sin(y_1 t)]e^{x_1 t},\ t \geq 0,$$

где $A = \varphi$ и $B = \frac{1}{y_1}(\psi - x_1\varphi)$.

Условия корректной разрешимости задачи (1), (2), (3) с большими коэффициентами при слагаемых с отклонением аргумента

Исследуем корректность задачи (1), (2), (3) при нарушении условия (12) на коэффициенты уравнения. Предположим, что выполняется условие

$$b > a^2 > 0,$$

и при этом величина $h > 0$ мала настолько (см. лемму 1), что уравнение (4) имеет три различных вещественных корня x_1, x_2, x_3 таких, что $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, и для любого невещественного корня λ_j уравнения (4) выполняется условие $\mathrm{Re}\lambda_j > x_2$. Согласно лемме 2, $x_2 = \sqrt{b - a^2} + o(1)$ при $h \to 0$, а для любого невещественного корня λ_j уравнения (4) его вещественная часть $\mathrm{Re}(\lambda_j)$ является бесконечно большой величиной при $h \to 0$ (см. лемму 3).

Лемма 4. *Если $x \in R$ и $\gamma > x$, то для любой функции $z \in L_{2,\gamma}(R_+)$ функция*

$$w(t) = \int\limits_0^t e^{x(t-s)} z(s) ds, \; t \geq 0,$$

принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}(R_+)$, причем линейный оператор $\mathbf{A} : L_{2,\gamma}(R_+) \to W^1_{2,\gamma}(R_+)$, действующий по правилу $\mathbf{A}z = w$, ограничен и выполнены неравенства

$$\|w\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leq \frac{1}{\gamma - x} \|z\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}; \quad \|w\|_{W^1_{2,\gamma}(R_+)} \leq \frac{\gamma}{\gamma - x} \|z\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}.$$

Доказательство леммы 4 можно найти в работе [7].

Для каждого $z \in L_{2,\gamma}(R_+)$ и $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ определим функцию

$$u(t) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t} + \int\limits_0^t \frac{1}{x_1 - x_2} (e^{x_1(t-q)} - e^{x_2(t-s)}) z(q) dq. \tag{13}$$

То есть $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, $t > 0$, где

$$u_1(t) = c_1 e^{x_1 t} + \int\limits_0^t \frac{1}{x_1 - x_2} e^{x_1(t-s)} z(q) dq$$

и

$$u_2(t) = c_2 e^{x_2 t} - \int\limits_0^t \frac{1}{x_1 - x_2} e^{x_2(t-s)} z(q) dq.$$

Лемма 5. *Если $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$ и $\gamma > x_2$, то для любой функции $z \in L_{2,\gamma}(R_+)$ функция*

$$v(t) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_0^t (e^{x_2(t-s)} - e^{x_1(t-s)}) z(s) ds, \; t \geq 0,$$

принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(R_+)$, причем линейный оператор $\mathbf{\Lambda} : L_{2,\gamma}(R_+) \to W^2_{2,\gamma}(R_+)$, действующий по правилу $\mathbf{\Lambda}z = v$, ограничен и выполнены неравенства

$$\|v\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leq \frac{1}{(\gamma - x_1)(\gamma - x_2)} \|z\|_{L_{2,\gamma}(R_+)};$$
$$\|v\|_{W^2_{2,\gamma}(R_+)} \leq C(\gamma, x_1, x_2) \|z\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}.$$

Заметим, что

$$\|v\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} = \|e^{-\gamma t} v\|_{L_2(R_+)} = \| \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_0^t (e^{(x_2 - \gamma)(t-s)} - e^{(x_1 - \gamma)(t-s)}) z(s) ds \|_{L_2(R_+)}.$$

Определим функцию $g(t) = e^{(x_2-\gamma)t} - e^{(x_1-\gamma)t}$, $t > 0$. Продолжим функции z, v и g нулем на отрицательную полуось до функций Z, V и G соответственно и применим к продолженным функциям преобразование Фурье. Поскольку $x_1 - \gamma < 0$ и $x_2 - \gamma < 0$, то функция $V_\gamma(t) = e^{-\gamma t} V(t)$, $t \in R$, т.е.

$$V_\gamma(t) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_0^t (e^{(x_2-\gamma)(t-s)} - e^{(x_1-\gamma)(t-s)}) z(s) ds, \; t \geq 0; \; V_\gamma(t) = 0, \; t < 0,$$

представляет собой свертку функции $Z \in L_2(R)$ с функцией $G \in L_2(R)$, определяемой равенством $G(t) = e^{(x_2-\gamma)t} - e^{(x_1-\gamma)t}$, $t \geq 0$; $G(t) = 0$, $t < 0$. Поэтому для преобразования Фурье функции $V_\gamma \in L_2(R)$ получим

$$\mathcal{F}(V_\gamma)(\xi) = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{1}{\gamma - x_2 + i\xi} - \frac{1}{\gamma - x_1 + i\xi}\right)\hat{z}(\xi) =$$

$$= \frac{1}{(i\xi - x_1 + \gamma)(i\xi - x_2 + \gamma)}\hat{Z}(\xi),\ \xi \in R.$$

Следовательно,

$$\|v\|_{L_{2,\gamma}} \leq \sup_{\xi \in R}|\frac{1}{(i\xi - x_1 + \gamma)(i\xi - x_2 + \gamma)}|\|z\|_{L_{2,\gamma}} = \frac{1}{(\gamma - x_1)(\gamma - x_2)}\|z\|_{L_{2,\gamma}}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\|\frac{d^2}{dt^2}V_\gamma\|_{L_{2,\gamma}(R)} \leq \|z\|_{L_{2,\gamma}} \sup_{\xi \in R}|\frac{\xi^2}{(i\xi - x_1 + \gamma)(i\xi - x_2 + \gamma)}| \leq$$

$$\leq \frac{C}{(\gamma - x_1)(\gamma - x_2)}\|z\|_{L_{2,\gamma}}.$$

Поскольку $v(0) = 0$ и $v'(0) = 0$, то

$$\|\frac{d^2}{dt^2}v\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leq \|\frac{d^2}{dt^2}V_\gamma\|_{L_{2,\gamma}(R)} + 2\gamma\|\frac{d}{dt}V_\gamma\|_{L_{2,\gamma}(R)} + \gamma^2\|V_\gamma\|_{L_{2,\gamma}(R)}$$

и существует $C > 0$ такое, что

$$\|\frac{d^2}{dt^2}v\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leq \frac{C}{(\gamma - x_1)(\gamma - x_2)}\|z\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}.$$

Из этих оценок следуют утверждения леммы.

Следствие 3. При произвольном $z \in L_{2,\gamma}$ и $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ функция (13) принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}$, причем существует такая константа $C > 0$, что

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}} \leq C[|c_1| + |c_2| + \|z\|_{L2,\gamma}]. \tag{14}$$

Тогда для произвольной функции $u \in W^2_{2,\gamma}(R_+)$, представленной в виде (13), имеют место равенства

$$u' = x_1c_1e^{x_1t} + x_2c_2e^{x_2t} + \int\limits_0^t \frac{1}{x_1 - x_2}(x_1e^{x_1(t-q)} - x_2e^{x_2(t-s)})z(q)dq, \tag{15}$$

$$u'' = x_1^2u_1(t) + x_2^2u_2(t) + z(t), \tag{16}$$

$$u(t+h) = e^{x_1h}u_1(t) + e^{x_2h}u_2(t) + \frac{1}{x_1 - x_2}\int\limits_t^{t+h}(e^{x_1(t+h-q)} - e^{x_2(t+h-q)})z(q)dq. \tag{17}$$

Лемма 6. *Пусть $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$. Тогда существует такое $\hat{\gamma} > 0$ и такое $\hat{C} > 0$, что для любого $\gamma \geq \hat{\gamma}$ и любого $g \in L_{2,\gamma}(R_+)$ уравнение*

$$x_1^2\int\limits_0^t \frac{1}{x_1 - x_2}e^{x_1(t-s)}z(q)dq + x_2^2\int\limits_0^t \frac{1}{x_1 - x_2}e^{x_2(t-s)}z(q)dq + z(t) = g(t),\ t > 0, \tag{18}$$

относительно неизвестной функции z имеет единственное решение $z \in L_{2,\gamma}(R_+)$, причем $\|z\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \le \hat{C}\|g\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}$.

Действительно, уравнение (18) представляет собой операторное уравнение

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)z = g,$$

где в силу леммы 4 операторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in B(L_{2,\gamma}(R_+))$ допускают оценку

$$\|\mathbf{A}_j\|_{B(L_{2,\gamma}(R_+))} \le \frac{x_j^2}{\gamma - x_j},\ j = 1, 2.$$

Тогда утверждение леммы 6 справедливо, если

$$\frac{2x_1^2}{\hat{\gamma} - x_1} + \frac{2x_2^2}{\hat{\gamma} - x_2} < 1.$$

Из леммы 6 и равества (16) вытекает

Следствие 4. Пусть $b > a^2$ и пусть $x_1, x_2 \in R,\ x_1 < x_2$ – два наименьших корня уравнения (10). Тогда существует такое $\hat{\gamma} > 0$ и такое $\hat{C} > 0$, что для любого $\gamma \ge \hat{\gamma}$ и любого $u \in W^2_{2,\gamma}(R_+)$ существуют единственные функция $z \in L_{2,\gamma}(R_+)$ и константы $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ такие, что функция u представима в виде (13), причем

$$|c_1| + |c_2| + \|z\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \le \hat{C}\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(R_+)}.$$

Действительно, если $u \in W^2_{2,\gamma}(R_+)$, то положим $g = u''$, тогда $g \in L_{2,\gamma}(R_+)$ и

$$\|g\|_{W^2_{2,\gamma}(R_+)} \le \|u\|_{W^2_{2,\gamma}(R_+)}.$$

Тогда, применяя к функции g лемму 6, получаем утверждение следствия 4.

Поскольку x_1, x_2 – корни уравнения (4), то с учетом равенств (15) – (17) и следствия 4 уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$z(t) = b\frac{1}{x_1 - x_2}\int\limits_t^{t+h}(e^{x_1(t+h-q)} - e^{x_2(t+h-q)})z(q)dq + f(t),\ t > 0, \tag{19}$$

а начальные условия (4) – системе уравнений

$$\varphi = c_1 + c_2, \quad \psi = x_1c_1 + x_2c_2,$$

которая имеет единственное решение. Поэтому задача (1), (2), (3) эквивалентна операторному уравнению

$$z - \mathbf{B}z = f, \tag{20}$$

где

$$\mathbf{B}z(t) = b\frac{1}{x_1 - x_2}\int\limits_t^{t+h}(e^{x_1(t+h-q)} - e^{x_2(t+h-q)})z(q)dq,\ t > 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{B}z(t) = b\frac{1}{x_1 - x_2}\int\limits_0^{h}(e^{x_1(h-q)} - e^{x_2(h-q)})z(q+t)dq,\ t > 0.$$

При этом, как и в доказательстве леммы 5,

$$\mathcal{F}(\mathbf{B}z)_\gamma(\xi) =$$

$$= \frac{b}{x_2 - x_1}\left(\frac{e^{x_2h}}{\gamma - x_2 + i\xi}(1 - e^{\gamma - x_2 + i\xi)h}) - \frac{e^{x_1h}}{\gamma - x_1 + i\xi}(1 - e^{\gamma - x_1 + i\xi)h})\right)\hat{z}(\xi). \qquad (21)$$

Заметим, что в выражении (21) от параметра γ зависят только величины x_1, x_2. Поскольку (см. лемму 2) при $h \to 0$ величины x_1, x_2 имеют конечные пределы $-\sqrt{b-a^2}, \sqrt{b-a^2}$, то при фиксированном $\gamma > \sqrt{b-a^2}$ справедлива оценка

$$\sup_{\xi \in R}|\frac{e^{x_2h}}{\gamma - x_2 + i\xi}(1 - e^{\gamma - x_2 + i\xi)h})| = O(h)$$

при $h \to 0$. Аналогично,

$$\sup_{\xi \in R}|\frac{e^{x_1h}}{\gamma - x_1 + i\xi}(1 - e^{\gamma - x_1 + i\xi)h})| = O(h)$$

при $h \to 0$.

Тогда при фиксированном $\gamma > \sqrt{b-a^2}$ имеет место асимптотика при $h \to 0$ нормы оператора $\|\mathbf{B}\|_{B(L_{2,\gamma}(R_+))} = O(h)$ при $h \to 0$.

Следовательно, для каждого $\gamma > \sqrt{b-a^2}$ существует такое $h_0 > 0$, что при всех $h \in (0, h_0)$ выполняется условие $\|\mathbf{B}\|_{B(L_{2,\gamma}(R_+))} < 1$.

Лемма 7. Для каждого $\gamma > \sqrt{b-a^2}$ существует такое $h_0 > 0$, что если $h \in (0, h_0)$, то при всех $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$ уравнение (20) имеет единственное решение $z \in L_{2,\gamma}(R_+)$, причем справедлива оценка

$$\|z\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} \le C(\gamma, h)\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}$$

с константой $C(\gamma, h)$, не зависящей от выбора $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$.

Из лемм 5–7 следует

Теорема 3. *Пусть $b > a^2$. Тогда для каждого $\gamma > \sqrt{b-a^2}$ существует такое $h_0 > 0$, что если $h \in (0, h_0)$, то при всех $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$, $\varphi, \psi \in \mathbf{C}$* задача (1), (2), (4) *имеет единственное решение $u \in W^2_{2,\gamma}(R_+)$, причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(R_+)} \le C(\gamma, h)[\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\varphi| + |\psi|] \qquad (22)$$

с константой $C(\gamma, h)$, не зависящей от выбора $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$.

Действительно, в силу леммы 2 существует такое $h_1 > 0$, что при любом $h \in (0, h_1)$ выполняется условие $x_2 < \sqrt{b-a^2} + 1$. Тогда согласно следствию 4 существует такое $\hat{\gamma}_1 > \sqrt{b-a^2} + 1$, что при любом $\gamma \ge \hat{\gamma}_1$ задача (1), (2), (3) для неизвестной функции $u \in W^2_{2,\gamma}(R_+)$ эквивалентна уравнению (20) в пространстве $L_{2,\gamma}(R_+)$. А в силу леммы 7 существует такое $h_0 \in (0, h_1]$, что при любом $h \in (0, h_0)$ и любом $\gamma \ge \hat{\gamma}_1$ уравнение (20) при всех $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$ имеет единственное решение $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$, удовлетворяющее оценке (14). Тогда в силу следствия 3 функция u, определенная равенством (13) по функции $z = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}f$ и постоянным $c_1 = \frac{x_2\varphi - \psi}{x_2 - x_1}$, $c_2 = \frac{\psi - x_1\varphi}{x_2 - x_1}$, является в силу равенств (15) – (17) решением задачи (1) – (3) и справедлива оценка (22).

Замечание. Если $b > a^2$ и $\gamma > \sqrt{b-a^2}$, то при всех достаточно малых $h > 0$ выполняются неравенства $x_1 < 0 < x_2 < \gamma < x_3$, поскольку $x_2 \to \sqrt{b-a^2}$ и $x_3 \to \infty$ при $h \to 0$. Кроме того, согласно лемме 3, для всех невещественных корней λ_j, $j \in \mathbf{N}$, уравнения (4) выполняется условие $\mathrm{Re}(\lambda_j) > \gamma$, т.к. $\mathrm{Re}(\lambda_j) \to +\infty$ при $h \to 0$.

Замечание. Если $b > a^2$, то существуют такие $\gamma > \sqrt{b-a^2}$, что

$$\lim_{h \to +0}(\omega(\gamma)) = \lim_{h \to +0}\frac{e^{\gamma h}b}{\gamma\sqrt{a^2+\gamma^2}} = \frac{b}{\gamma\sqrt{a^2+\gamma^2}} > 1.$$

Следовательно, теорема 3 определяет такие области изменения переменных $(a, b, h, \gamma) \in R^4$, при которых задача (1) – (3) корректно разрешима и которые не удовлетворяют условию $\omega(\gamma) < 1$ теоремы 1.

Следствие 5. Пусть выполнено неравенство $b > a^2$ и величина $h > 0$ мала настолько, что величина $\gamma_* = \inf(\mathrm{Re}\Xi)$ достигается в единственной точке $\lambda_1 = x_1 \in R$ множества Ξ. Тогда если выполнены условия $0 < \gamma' < \sqrt{b - a^2}$, то существует такое $h_1 > 0$, что при всех $h \in (0, h_1)$ и при любом начальном условии

$$u(+0) = \varphi \tag{23}$$

однородное уравнение (1) имеет в пространстве $W^2_{2,\gamma'}(R_+)$ единственное решение

$$u(t) = \varphi e^{x_1 t},\ t \geq 0. \tag{24}$$

Пусть $\gamma' < \sqrt{b - a^2}$. Выберем некоторое $\gamma > \sqrt{b - a^2}$. Тогда в силу теоремы 3 существует такое $h_0 > 0$, что при всех $h \in (0, h_0)$ однородное уравнение (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (3), причем решение это имеет вид $u(t) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t}$. Поскольку $x_2(h) \to \sqrt{b - a^2}$ при $h \to +0$, то существует такое $h_1 \in (0, h_0)$, что $x_2 > \gamma'$, и поэтому $e^{x_2 t} \notin W^2_{2,\gamma'}(R_+)$. Следовательно, при $h \in (0, h_1)$ однородное уравнение (1) с начальным условием (23) имеет решение (24) из пространства $W^2_{2,\gamma'}(R_+)$. Если предположить, что в пространстве $W^2_{2,\gamma'}(R_+)$ найдется другое решение однородного уравнения (1) с начальным условием (23), то тогда в пространстве $W^2_{2,\gamma}(R_+)$ однородное уравнение (1) с начальным условием (3) будет иметь более одного решения, что невозможно в силу теоремы 3.

Литература

1. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30. С. 3–173.

2. *Власов В.В., Сакбаев В.Ж.* О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева // Математические заметки. 2000. Т. 68, № 6. С. 939–942.

3. *Власов В.В., Шматов К.И.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с последействием в гильбертовом пространстве // Труды МИАН. 2003. Т. 243. 127–137.

4. *Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Представление формулами Фейнмана полугрупп, порожденных параболическими дифференциально-разностными операторами // ТРУДЫ МФТИ. 2012. Т. 4, № 4. С. 113–119.

5. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

6. *Муравник А.Б.* О задаче Коши для некоторых неоднородных дифференциально-разностных параболических уравнений // Математические заметки. Т. 74, № 4. С. 538–548.

7. *Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Известия вузов. Математика. 2015. № 4. С. 17–25.

8. *Акбари Фаллахи А., Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 3. С. 352–365.

9. *Власов В.В., Сакбаев В.Ж.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1194–1202.

10. *Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // УМН. 1962. Т. 17, № 2. С. 77–164.

11. *Каменский Г.А., Субачевский А.Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: МАИ, 1992.

12. *Мышкис А.Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.

References

1. *Vlasov V.V. Medvedev D.A.* Functional-Differential Equations in Sobolev Spaces and Related Problems in Spectral Theory. Sovr. Math. Fund. Naprav. 2008. V. 30. P. 3–173. (in Russian).

2. *Vlasov V.V. Sakbaev V.Zh.* Well-Defined Solvability of Some Differential-Difference Equations in Sobolev Spaces. Math. Notes. 2000. V. 68, N 6. P. 939–942. (in Russian).

3. *Vlasov V.V., Shmatov K.I.* Correct Solvability of Hyperbolic-Type Equations with Delay in a Hilbert Space. Proc. Steklov Inst. Math. 2003. V. 243. P. 127–137. (in Russian).

4. *Yaakbarieh A., Sakbaev V.Zh.* On the presentation of semigroups generated by parabolic difference-differential equations by Feynman formulas. Proceedings of MIPT. 2012. V. 4, N 4. P. 113–119. (in Russian).

5. *Lions J.L., Magenes E.* Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications. M.: Mir, 1971.

6. *Muravnik A.B.* On the Cauchy problem for parabolic equations with nonlocal high-order terms. Math. Notes. V. 74, N 4. P. 538–548.

7. *Yaakbarieh A., Sakbaev V.Zh.* Correctness of a problem with initial conditions for parabolic differential-difference equations with shifts of time argument. Izvestiya VUZ. Matematika. 2015. N 4. P. 17–25. (in Russian).

8. *Akbari Fallahi A., Yaakbarieh A., Sakbaev V.Zh.* Well-posedness of a problem with initial conditions for hyperbolic differential-difference equations with shifts in the time argument. Differential Equations. 2016. V. 52, N 3. P. 352–365. (in Russian).

9. *Vlasov V.V., Sakbaev V.Zh.* On the Well-Posed Solvability in the Scale of Sobolev Spaces of Some Differential-Difference Equations. Differential Equations. 2001. V. 37, N 9. P. 1194–1202. (in Russian).

10. *Zverkin A.M., Kamenskii G.A., Norkin S.B., Elsgolts L.E.* Differential equations with deviating argument. UMN. 1962. V. 17, N 2. P. 77–164. (in Russian).

11. *Kamensky G.A, Skubachevskii A.L* Linear boundary value problems for differential-difference equations. M.: MAI. 1992. (in Russian).

12. *Myshkis A.D.* Mixed Functional-Differential Equations. Sovr. Math. Fund. Naprav. 2003. V. 4. P. 5–120. (in Russian).

Поступила в редакцию 03.09.2016