УДК 537.86

П. А. Головинский[1,2], *В. А. Астапенко*[2], *Ю. А. Кротов*[3], *А. В. Яковец*[2]

[1]Воронежский государственный технический университет
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[3]АО «НИИ «Полюс» им. Ф. М. Стельмаха»

Электрон графена в поле резонансной плоской электромагнитной волны

Получено аналитическое волковское решение безмассового уравнения Дирака для графена в поле импульса медленного света произвольной временной зависимости и определены условия применимости такого подхода. С помощью метода собственного времени Фока–Швингера найдена функция Грина с точным учетом влияния внешнего классического поля волны.

Ключевые слова: графен, функция Грина, дираковские фермионы, медленный свет.

P. A. Golovinski[1,2], *V. A. Astapenko*[2], *Y. A. Krotov*[3], *A. V. Yakovets*[2]

[1]Physics Research Laboratory, Voronezh Technical State University
[2]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
[3] PC Research Institute «Polyus» named after M. F. Stelmakh

Electron of graphene in the field of a plane electromagnetic wave

Analytical Volkov's solution of the massless Dirac equation for graphene in the field of a slow light short pulse in the arbitrary time dependence is obtained. Following the Fock-Schwinger proper time method, the Green's function, with account taken of the influence of the external classical wave field, is derived.

Key words: graphene, Green's function, Dirac massless fermions, field of slow light short pulse.

1. Введение

Уникальные свойства графена составляют предмет широких фундаментальных и прикладных исследований [1, 2]. Во многом интерес к ним связан с тем, что квазичастицы и антиквазичастицы в графене обладают особыми свойствами, являясь безмассовыми фермионами, удовлетворяющими двумерному уравнению Дирака [3, 4]. Поскольку скорость Ферми в графене значительно меньше скорости света в вакууме c, нелинейные процессы квантовой электродинамики будут возникать в графене в полях умеренной интенсивности в сравнении со сверхсильными полями релятивистской интенсивности, которые требуются для наблюдения нелинейных эффектов в вакууме [5]. Это делает графен уникальной модельной системой, позволяющей изучать эффекты квантовой электродинамики сверхсильных полей [6–8], а также с помощью искривленного графена – явления общей теории относительности, включая эффект Хокинга [9].

Взаимодействие сильного лазерного поля с графеном приводит к многофотонным процессам [10], в том числе к генерации высоких гармоник. Для описания генерации гармоник в графене в присутствии лазерного поля получено адиабатическое решение зависящего от времени уравнения Дирака [11]. Анализ спектра состояний Флоке в однородном периодическом электрическом поле показал, что он аналогичен электронному спектру в пространственной сверхрешетке графена [13]. Взаимодействие лазерного излучения циркулярной поляризации приводит к возникновению в спектре флоке-состояний запрещенной зоны, превращая его в изолятор [14–16]. Состояния Флоке в графене используются при расчете генерации гармоник в графене [17,18]. Точные аналитические решения Флоке для электронов и дырок в графене в поле гармонической волны позволяют получить выражение для нелинейной плотности тока [19]. Точные решения уравнения графена получены также для магнитного поля, перпендикулярного плоскости графена, и электрического поля, параллельного этой плоскости [12]. Отметим, что в ряде расчетов генерации гармоник структура графена в сильно возбужденном состоянии полностью игнорируется в полной аналогии с генерацией гармоник в газах и используется волковская волновая функция свободного электрона [20].

Динамика графена в лазерном поле ультракоротких импульсов требует для своего описания построения нестационарных волновых функций [21, 22]. Наряду с волновыми функциями, функции Грина являются одним из важнейших инструментов описания электронной структуры графена, включая такие свойства, как локальная плотность состояний и процессы рассеяния на примесях. Их аналитическое представление оказалось весьма плодотворным и продолжает развиваться в различных приближениях [23–25]. Функции Грина используются в решении задач проводимости графена [26], и важно отметить, что точные функции Грина могут быть построены для графена в однородном электрическом и магнитном полях [27].

Развитие технологии медленного света позволяет получить условия, полностью эквивалентные квантовой электродинамике электрона в сильном лазерном поле в вакууме [28]. Настоящая работа посвящена построению точных решений для волновой функции и функций Грина в поле импульса медленного света с групповой скоростью, согласующейся со скоростью Фермии в графене.

2. Дираковские фермионы в поле плоской электромагнитной волны

Длина волны квазичастиц в графене значительно меньше длины волны света при той же частоте. Поэтому в обычных условиях можно считать поле волны в пространстве изменяющимся адиабатически плавно по отношению к движению квазичастиц. Этот факт позволяет получить аналитическое решение задачи в адиабатическом приближении [11]. Аналогичным образом решение получается и в случае нормального радения волны, когда электрическое поле можно считать однородным в плоскости графена. Технология медленного света позволяет согласовать скорость квазичастиц графена и групповую скорость электромагнитной волны. Точное решение уравнения для квазичастиц графена в таком поле для согласованных скоростей можно получить, следуя методу Волкова [29–31]. Движение электрона графена во внешнем поле плоской волны описывается уравнением Дирака для безмассового фермиона [4, 32]:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \sigma\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(x, y, t)\right)\psi. \tag{1}$$

Здесь ψ — двухкомпонентная волновая функция:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$\mathbf{p} = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y$, $\sigma = \mathbf{e}_x\sigma_x + \mathbf{e}_y\sigma_y$, σ_x, σ_y — матрицы Паули. Переменная τ связана со временем t соотношением $\tau = v_Ft$, v_F есть скорость Ферми и $\mathbf{q} = (x, y)$. Мы используем релятивистскую систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Поле плоской линейно поляризованной в плоскости графена электромагнитной волны описывается зависимостью

$$\mathbf{A}(\xi) = \mathbf{e}_xA(\xi),\ \xi = \alpha y - \tau. \tag{3}$$

При $\alpha = 1$ скорости электромагнитной волны и квазчастиц графена совпадают.

Уравнение Дирака (1) в отсутствие поля имеет решение

$$\psi_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kq}-E\tau)},\ u_{\mathbf{k}}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}} \\ \pm e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix}, \quad E^{(\pm)} = \pm k. \tag{4}$$

Для решения задачи с полем введем обозначения

$$L^{+} = h + i\partial_\tau, \quad L^{-} = h - i\partial_\tau, \tag{5}$$

где

$$h = \begin{pmatrix} 0 & p_x - ip_y + a(y,\tau) \\ p_x + ip_y + a(y,\tau) & 0 \end{pmatrix},\ a = -eA\,. \tag{6}$$

В этих обозначениях уравнение (1) есть $L^{-}\psi = 0$. Очевидно, что тогда справедливо и квадрированное уравнение

$$H\psi = 0, \tag{7}$$

где

$$H = L^{+}L^{-} == \partial_\tau^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - 2ia\partial_x + a^2 + a'\beta, \tag{8}$$

а $\beta = \sigma_x + \alpha\sigma_z$.

Следуя Волкову, будем искать решение уравнения (7) в виде

$$\psi_{\mathbf{k}} = e^{i\chi} F(\xi),\ \chi = \mathbf{kq} - k\tau, \xi = \alpha y - \tau. \tag{9}$$

Подстановка (9) в (8) при $\alpha = 1$ приводит к уравнению

$$2\,(ik - ik_y)\,F' + \left(2ak + a^2 + a'\beta\right) F \ = 0 \tag{10}$$

с решением

$$F = \exp\left(\frac{i}{2}\int\limits_0^{y-\tau} d\xi\, \frac{2ak + a^2 + a'\beta}{k - k_y}\right) u_{\mathbf{k}}.$$

Окончательно решение уравнения (1) запишется в виде

$$\psi_{\mathbf{k}} = \exp\left(i\,(\mathbf{kq} - k\tau) + \frac{i}{2}\int\limits_0^{y-\tau} d\xi\, \frac{2ak + a^2 + a'\beta}{k - k_y}\right) u_{\mathbf{k}}. \tag{11}$$

Сингулярность в решении (11) аналогична сингулярности в решении Волкова для размерности 3+1 в безмассовом пределе.

3. Построение функции Грина методом собственного времени Фока–Швингера

Построим функцию Грина $G(q, q_1)$, являющуюся решением уравнения

$$L^{-}G(q, q_1) = \delta(x - x_1)\delta(q - q_1), \tag{12}$$

где $q = (y, \tau)$. Поскольку проекция импульса k_x – сохраняющаяся величина, то решение ищем в виде

$$G(q, q_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x\, e^{ik_x(x-x_1)} g_{k_x}(y, t, y_1, t_1), \tag{13}$$

где функция g_{k_x} удовлетворяет уравнению

$$L_x^{-} g_{k_x} = \delta(y - y_1)\delta(t - t_1), \tag{14}$$

и

$$L_x^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & k_x - ip_y + a(y,\tau) \\ k_x + ip_y + a(y,\tau) & 0 \end{pmatrix} \pm i\partial_\tau\,. \tag{15}$$

Далее воспользуемся методом собственного времени Фока–Швингера [33, 35, 35]. Применение этого метода расширено на случай наличия не только поля плоской волны [36, 37], но и для дополнительного электрического и магнитного полей, а также для различных размерностей [38–41]. Определим пропагатор

$$g_{k_x}(y,t,y_1,t_1) = -iL_x^{+}\int\limits_0^\infty ds\,\langle q|\,e^{-isH_x}\,|q_1\rangle\,, \tag{16}$$

где

$$H_x = p_y^2 - p_\tau^2 + b \tag{17}$$

и $b = (k_x + a)^2 + a'\beta$. Обозначим для дальнейшего $p_1 = -i\partial_y, p_2 = -i\partial_\tau, q_1 = y$, $q_2 = \tau$, $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$.

Дифференцируя матричный элемент $\langle q|\,e^{-isH_x}\,|q_1\rangle$ по переменной s, можно записать:

$$i\partial_s\,\langle q|\,e^{-isH_x}\,|q_1\rangle = \langle q|\,H_x e^{-isH_x}\,|q_1\rangle\,. \tag{18}$$

Вставляя единичный оператор $I = e^{-isH_x} y e^{isH_x}$ в правую часть уравнения (18), получим

$$i\partial_s\,\langle q,s\mid q_1,0\rangle = \langle q,s|\,H_x(p(s),p(s))\,|q_1,0\rangle\,. \tag{19}$$

где $|q,s\rangle$ $|q_1,0\rangle$ являются собственными векторами операторов $q_\mu(s)$ и $q_\mu(0)$ с собственными значениями q и q_1 соответственно: $q_\mu(s)\,|q,s\rangle = q_\mu\,|q,s\rangle$, $q_\mu(0)\,|q_1,0\rangle = q_1\,|q,0\rangle$, $p_\mu(s) = e^{isH_x} p_\mu e^{-isH_x}, q_\mu(s) = e^{isH_x} q_\mu e^{-isH_x}$. Переменная s формально рассматривается как новое «время». Операторы $p(s) = (p_\xi(s), p_\eta(s))$, $q_\mu(s) = (\xi(s), \eta(s))$, входящие в уравнение ((18)), взяты в представлении Гейзенберга и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp_\mu(s)}{ds} = i\,[H_x, p_\mu(s)]\,, \quad \frac{dq_\mu(s)}{ds} = i\,[H_x, q_\mu(s)]\,. \tag{20}$$

В качестве следующего шага решим уравнения для $p_\mu(s)$ и $q_\mu(s)$ и запишем решение для $p_\mu(s)$ и $p_\mu(0)$ через $q_\mu(s)$ и $q_\mu(0)$.

Вводя новые переменные $p_\eta = p_y - p_\tau, p_\xi = p_y + p_\tau$, $\xi = y - \tau$, $\eta = \tau + y$, гамильтониан H_x можно представить как

$$H_x = p_\eta p_\xi + b(y - \tau). \tag{21}$$

Соответствующие уравнения Гейзенберга для операторов имеют вид

$$\frac{dp_\xi(s)}{ds} = i[H_x, p_\xi(s)] = 0, \tag{22}$$

$$\frac{dp_\eta(s)}{ds} = i[H_x, p_\eta(s)] = -2\frac{db}{d\xi},$$

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = i[H_x, \xi(s)] = 2p_\xi(s),$$

$$\frac{d\eta(s)}{ds} = i[H_x, \eta(s)] = 2p_\eta(s).$$

Проинтегрируем уравнения Гейзенберга. Из первого уравнения следует

$$\begin{gathered} p_\xi(s) = \pi, \\ \pi(s) = (p_\tau(0) + p_y(0)) = \mathrm{const}\,. \end{gathered} \tag{23}$$

Третье уравнение тогда имеет решение

$$\xi(s) - \xi(0) = 2\pi s, \tag{24}$$

которое оправдывает термин *собственное время для переменной s*.

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(s)}{ds} &= \pi(s) = (p_\tau(s) + p_y(s)) = \\ &= (p_\tau(0) + p_y(0)) = \mathrm{const}\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Второе уравнение имеет решение

$$p_\eta(s) = -\frac{1}{\pi}b + D_\eta. \tag{26}$$

Подставим решение (26) в четвертое уравнение системы (22). Тогда

$$\frac{d\eta(s)}{ds} = -\frac{2}{\pi}b + 2D_\eta \tag{27}$$

и

$$\eta(s) - \eta(0) = -\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\xi(0)}^{\xi(s)} b\,d\xi + 2D_\eta s. \tag{28}$$

Выразим константу D_η:

$$D_\eta = \frac{\eta(s) - \eta(0)}{2s} + \frac{1}{2s\pi^2}\int\limits_{\xi(0)}^{\xi(s)} b\,d\xi. \tag{29}$$

Тогда

$$p_\eta(s) = -\frac{1}{\pi}b + \frac{\eta(s) - \eta(0)}{2s} + \frac{1}{2s\pi^2}\int\limits_{\xi(0)}^{\xi(s)} b\,d\xi.$$

Теперь можно записать выражение для гамильтониана с учетом коммутационных соотношений для операторов координат:

$$\begin{gathered} \langle q,s|\,H_x(p(s),p(s))\,|q,0\rangle = \\ = \langle q,s|\,\frac{1}{4s^2}\left(\xi(s)-\xi(0)\right)\left(\eta(s)-\eta(0)\right) + \frac{1}{\xi(s)-\xi(0)}\int\limits_{\xi(0)}^{\xi(s)} b\,d\xi\,|q_1,0\rangle\,. \end{gathered} \tag{30}$$

Учитывая коммутатор

$$[\xi(0),\eta(s)] = [\xi(s) - 2\pi s, \eta(s)] = 4is, \tag{31}$$

в итоге будем иметь

$$\langle q,s|\,H_x(p(s),p(s))\,|q,0\rangle = \frac{1}{4s^2}(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1) - \frac{i}{s} + \frac{1}{\xi-\xi_1}\int\limits_{\xi_1}^{\xi} b\,d\xi. \tag{32}$$

Уравнение (19) принимает вид

$$i\partial_s\,\langle q,s \mid q_1,0\rangle = \left(\frac{1}{4s^2}(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1) - \frac{i}{s} + \frac{1}{\xi-\xi_1}\int\limits_{\xi_1}^{\xi} b\,d\xi\right)\langle q,s \mid q_1,0\rangle\,, \tag{33}$$

а его решение

$$\langle q, s \mid q_1, 0\rangle = \frac{C(q,q_1)}{s}\exp\left(\frac{i}{4s}(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1) - \frac{is}{\xi-\xi_1}\int\limits_{\xi_1}^{\xi} b\, d\xi\right). \tag{34}$$

С учетом связи переменных $\eta = y+\tau$, $\xi = y-\tau$ имеем $(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1) = (y-y_1)^2 - (\tau-\tau_1)^2$ и

$$\langle q, s \mid q_1, 0\rangle = \frac{C(q,q_1)}{s}\exp\left(\frac{i}{4s}\left((y-y_1)^2-(\tau-\tau_1)^2\right) - \frac{is}{(y-y_1)-(\tau-\tau_1)}\int\limits_{y_1-\tau_1}^{y-\tau} b\, d\xi\right). \tag{35}$$

Определим константу $C(q,q_1)$. Должно выполняться граничное условие

$$\langle q, s \mid q_1, 0\rangle|_{s\to 0} = \delta(q-q_1), \tag{36}$$

и мы представим $C(q,q_1)$ в виде

$$C(q,q_1) = C\Phi(q,q_1), \tag{37}$$

где $\Phi(q,q) = 1$, а постоянная C определяется условием нормировки:

$$\frac{C}{s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i}{4s}\left(y^2-\tau^2\right)\right) dy d\tau = 1. \tag{38}$$

Тогда получим

$$C = \frac{1}{4\pi}. \tag{39}$$

Осталось определить функцию $\Phi(q,q_1)$. Для этого нам потребуются дополнительные условия [42]:

$$\begin{aligned} p_\eta \langle q, s \mid q_1, 0\rangle &= \langle q, s| \, p_\eta(s) \, |q_1, 0\rangle, \\ p_\xi \langle q, s \mid q_1, 0\rangle &= \langle q, s| \, p_\xi(s) \, |q_1, 0\rangle. \end{aligned} \tag{40}$$

Уравнение для определения функции $\Phi(q,q_1)$ принимает вид

$$p_\eta \Phi(q,q_1) = 0. \tag{42}$$

Тем самым $\Phi(q,q_1) = 1$, и построение функции Грина завершено.

4. Заключение

Рассмотренный нами случай согласования фазовой скорости воздействующего поля электромагнитной волны со скоростью Ферми в графене обеспечивает полную картину двумерной релятивистской задачи. Мы получили точные решения волковского типа для волновой функции в случае волны произвольной формы и длительности. Эти решения можно использовать в качестве базиса при рассмотрении различных процессов взаимодействия лазерного излучения ультракороткой длительности с графеном. К числу таких явлений можно отнести, в частности, генерацию гармоник и рассеяние на примесях. Инструмент в виде метода собственного времени Фока–Швингера дал возможность получить аналитическое выражение для функции Грина графена в поле резонансной электромагнитной волны. В полученных выражениях явно учтено, что при совпадении скорости электромагнитной волны с квазиимпульсом квазичастицы возникает резонанс, который проявляется в виде сингулярности в фазе решения. Данные результаты могут представлять интерес для выявления особенностей взаимодействия релятивистских частиц с лазерным излучением, используя существенно меньшие напряженности поля и лучшие контролируемые условия взаимодействия. Как и в случае задачи с размерностью 1+3, использованный метод можно развить и для случая наличия дополнительного магнитного или электрического полей.

Работа выполнена при поддержке ГЗ Минобрнауки РФ № 2014/19.

Литература

1. *Castro Neto A.H., Guinea F., Peres N.M.R., Novoselov K.S., Geim A.K.* // Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 109–162.

2. *Katsnelson M.I.* Graphene: carbone in two dimensions. Cambridge University Press. Cambridge, 2012. 351 p.

3. *Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Katsnelson M.I., Grigorieva I.V., Dubonos S.V., Firsov A.A.* Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene // Nature. 2005. V. 438. P. 197.

4. *Geim A.K., Novoselov K.S.* The rise of graphene // Nature Mater. 2007. V. 6. P. 183–191.

5. *Avetissian H.K.* Relativistic Nonlinear Electrodynamics. New York: Springer, 2006.

6. *Katsnelson M.I., Novoselov K.S., Geim A.K.* Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene // Nature Phys. 2006. V. 2. P. 620–525.

7. *Katsnelson M.I., Novoselov K.S.* Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics // Solid State Comm. 2007. V. 143. P. 3–13.

8. *Zubkov M.A.* Schvinger pair creation in multi-layer graphene // Pis'ma v ZhETP. 2012. V. 95. P. 540–543.

9. *Lorio A., Lambiase G.* Quantum field theory in curved graphene spacetimes, Lobachevsky geometry, Weyl symmetry, Howking effect, and all that // Phys. Rev. D. 2014. V. 90. P. 025006.

10. *Avetissian H.K., Avetissian A.K., Makrtchian G.F., Sedrakian Kh.* // Journal of Nanophotonics. 2012. V. 6. P. 061702(17).

11. *Faisal F.H.* Adiabatic solutions of a Dirac equation of a new class of quasi-particles and high harmonic generation from them in an intense electromagnetic filed // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2011. V. 44. P. 11001(6).

12. *Peres N.M.R., Castro E.V.* Algebraic solution of a grapheme layer in transverse electric and perpendicular magnetic fields // J. Phys.: Condens. Matter. 2007. V. 19. P. 406231(10).

13. *Savel'ev S.E., Alexandrov A.S.* Massless Dirac fermions in laser field as a counterpart of grapheme superlattices // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. P. 035428(6).

14. *Calvo H.L., Perez-Piskunow P.M., Usaj G., Balseiro C.A., Foa Torres L.E.F.* Floquet chiral edge states in grapheme // Phys. Rev. B. 2014. V. 89. P. 121401(R).

15. *Sentef M.A., Claassen M., Kemper A.F., Moritz B., Oka T., Freericks J.K., Devereaux T.P.* Theory of Floquet band formation and local pseudospin textures in pump-probe photoemission of grapheme // Nature Communications. 2015. V. 6. P. 7047.

16. *Usuj G., Perez-Piskunow P.M., Foa Torres L.E.F., Balseiro C.A.* // Phys. Rev. B. 2014. V. 90. P. 115423(12).

17. *Gupta A.K., Alon O.E., Moiseyev N.* Generation and control of hight-order harmonic by the interaction of an infrared laser with a thin graphite layer // Phys. Rev. B. 2003. V. 68. 1651XX(13).

18. *Al-Nail I., Sipe J.E., Dignam M.M.* High harmonic generation in undoped graphene: Interplay of inter- and intraband dynamics // Phys. Rev. B. 2014. V. 90. P. 245423(7).

19. *Lopez-Rodroguez F.J., Naumis G.G.* Analitic solution for electrons and holes in graphene under electromagnetic waves: Gap appearance and nonlinear effects // Phys. Rev. B. 2008. V. 78. P. 201406(4).

20. *Sorngard S.A., Simonsen S.I., Hansen J.P.* High-order harmonic generation from graphene: strong attosecond pulses with arbitrary polarization // Phys. Rev. A. 2013. V. 87. P. 053803(5).

21. *Kelardeh H.K., Apalkov V., Stockman M.I.* Graphene in ultrafast superstrong laser fields // Phys. Rev. B. 2015. V. 91. P. 045439(8).

22. *Faisal F.H.M.* A theory of multiple photon absorption by grapheme in intense laser fields // Ann. Phys. 2013. V. 525. P. 171–179.

23. *Lawlor J.A., Ferreira M.S.* Green functions of graphene: An analytic approach // Physica B. 2015. V. 463. P. 48–53.

24. *Bena C.* Green's functions and impurity scattering in graphene // Phys. Rev. B. 2009. V. 79. P. 125427(7).

25. *Ulybyshev M.V., Zubkov M.A.* Green functions in graphene monolayer with Coulomb interactions taken into account // Solid State Communications. 2013. V. 159. P. 55–59.

26. *Ferreira A., Viana-Gomes J., Nilsson J., Mucciolo E.R., Peres N.M.R., Castro Neto A.H.* Unified description of the dc conductivity of monolayer and bilayer graphene at finite densities based on resonant scatterers // Phys. Rev. B. 2011. V. 83. P. 165402(22).

27. *Margía G., Raya A., Sánchez Á., Reyes E.* The electron propagator in external electromagnetic fields in lower dimensions // Am. J. Phys. 2010. V. 78. P. 700–707.

28. *Vlasov Y.A., O'Boyle M., Hartman H.F., McNab S.J.* Active control of slow light on chip with photonic crystal waveguides // Nature. 2005. V. 438. P. 65–69.

29. *Volkov D.M.* Über eine Klass von Löder Diracshen Gleichung // Zeitchrift für Physic. 1935. V. 94. P. 250.

30. *Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* Quantum Electrodynamics, Second Edition: Volume 4 (Course of Theoretical Physics). Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008. 667 p.

31. *Pardy M.* Massive Photons and Volkov Solutions // Int. J. Theor. Physics. 2004. V. 43. P. 127–139.

32. *Calvo H.L., Pastawski H.M., Roche S., Foa Torres L.E.F.* Tuning laser-induced band gaps in graphene // Appl. Phys. Lett. 2011. V. 98. 232103(3).

33. *Fock V.* // Physik Z. Sowjetunion. 1937. V. 12. P. 404; V.A. Fock – selected works: quantum mechanics and quantum field theory / by L.D. Faddeev, L.A. Khalfin, I.V. Komarov. New York: Chapman & Hall/CRC, 2004. 562 p.

34. *Schwinger J.* On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664–679.

35. *Boschi-Filho H., Farina C., Vaidya A.* Schwinger method for the electron propagator in a plane wave field revisited // Phys. Lett. A. 1996. V. 215. P. 109–112.

36. *Fradkin E.S.* Application of functional methods in quantum field theory and quantum statistics (II) // Nucl. Phys. 1966. V. 76, P. 588–624.

37. *Itzikson C. Zuber J.-B.* Quantum Field 36. Theory. New York: Dover Publications, 2005. 752 p.

38. *Fradkin E.S., Gitman D.M., Shvartsman Sh.M.* Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 1–300.

39. *Boudjedaa T., Chetouani L., Guechi L.* Schwinger metod for particles of spin zero and $\frac{1}{2}$ in the field of plane wave plus constant magnetic field // Phys. Scripta. 1995. V. 52. P. 9–16.

40. *Gavrilov S.P., Gitman D.M.* Proper time and path integral representation for the commutation functions // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 3118–3130.

41. *Gavrilov S.P., Gitman D.M., Yokonuzo Y.* Dirac fermions in strong electric field and quantum transport in graphene // Phys. Rev. D. 2012. V. 86. 125022(12).

42. *Schwartz M.D.* Quantum Field Theory and Standard Model. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 850 p.

References

1. *Castro Neto A.H., Guinea F., Peres N.M.R., Novoselov K.S., Geim A.K.* Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 109–162.

2. *Katsnelson M.I.* Graphene: carbone in two dimensions. Cambridge University Press. Cambridge, 2012. 351 p.

3. *Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Katsnelson M.I., Grigorieva I.V., Dubonos S.V., Firsov A.A.* Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. Nature. 2005. V. 438. P. 197.

4. *Geim A.K., Novoselov K.S.* The rise of graphene. Nature Mater. 2007. V. 6. P. 183–191.

5. *Avetissian H.K.* Relativistic Nonlinear Electrodynamics. New York: Springer, 2006.

6. *Katsnelson M.I., Novoselov K.S., Geim A.K.* Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene. Nature Phys. 2006. V. 2. P. 620–525.

7. *Katsnelson M.I., Novoselov K.S.* Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics. Solid State Comm. 2007. V. 143. P. 3–13.

8. *Zubkov M.A.* Schvinger pair creation in multi-layer graphene. Pis'ma v ZhETP. 2012. V. 95. P. 540–543.

9. *Lorio A., Lambiase G.* Quantum field theory in curved graphene spacetimes, Lobachevsky geometry, Weyl symmetry, Howking effect, and all that. Phys. Rev. D. 2014. V. 90. P. 025006.

10. *Avetissian H.K., Avetissian A.K., Makrtchian G.F., Sedrakian Kh.* Journal of Nanophotonics. 2012. V. 6. P. 061702(17).

11. *Faisal F.H.* Adiabatic solutions of a Dirac equation of a new class of quasi-particles and high harmonic generation from them in an intense electromagnetic filed. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2011. V. 44. P. 11001(6).

12. *Peres N.M.R., Castro E.V.* Algebraic solution of a grapheme layer in transverse electric and perpendicular magnetic fields. J. Phys.: Condens. Matter. 2007. V. 19. P. 406231(10).

13. *Savel'ev S.E., Alexandrov A.S.* Massless Dirac fermions in laser field as a counterpart of grapheme superlattices. 2011. Phys. Rev. B. 2011. V. 84. P. 035428(6).

14. *Calvo H.L., Perez-Piskunow P.M., Usaj G., Balseiro C.A., Foa Torres L.E.F.* Floquet chiral edge states in grapheme. Phys. Rev. B. 2014. V. 89. P. 121401(R).

15. *Sentef M.A., Claassen M., Kemper A.F., Moritz B., Oka T., Freericks J.K., Devereaux T.P.* Theory of Floquet band formation and local pseudospin textures in pump-probe photoemission of grapheme. Nature Communications. 2015. V. 6. P. 7047.

16. *Usuj G., Perez-Piskunow P.M., Foa Torres L.E.F., Balseiro C.A.* Phys. Rev. B. 2014. V. 90. P. 115423(12).

17. *Gupta A.K., Alon O.E., Moiseyev N.* Generation and control of hight-order harmonic by the interaction of an infrared laser with a thin graphite layer. Phys. Rev. B. 2003. V. 68. 1651XX(13).

18. *Al-Nail I., Sipe J.E., Dignam M.M.* High harmonic generation in undoped graphene: Interplay of inter- and intraband dynamics. Phys. Rev. B. 2014. V. 90. P. 245423(7).

19. *Lopez-Rodroguez F.J., Naumis G.G.* Analitic solution for electrons and holes in graphene under electromagnetic waves: Gap appearance and nonlinear effects. Phys. Rev. B. 2008. V. 78. P. 201406(4).

20. *Sorngard S.A., Simonsen S.I., Hansen J.P.* High-order harmonic generation from graphene: strong attosecond pulses with arbitrary polarization. Phys. Rev. A. 2013. V. 87. P. 053803(5).

21. *Kelardeh H.K., Apalkov V., Stockman M.I.* Graphene in ultrafast superstrong laser fields. Phys. Rev. B. 2015. V. 91. P. 045439(8).

22. *Faisal F.H.M.* A theory of multiple photon absorption by grapheme in intense laser fields. Ann. Phys. 2013. V. 525. P. 171–179.

23. *Lawlor J.A., Ferreira M.S.* Green functions of graphene: An analytic approach. Physica B. 2015. V. 463. P. 48–53.

24. *Bena C.* Green's functions and impurity scattering in graphene. Phys. Rev. B. 2009. V. 79. P. 125427(7).

25. *Ulybyshev M.V., Zubkov M.A.* Green functions in graphene monolayer with Coulomb interactions taken into account. Solid State Communications. 2013. V. 159. P. 55–59.

26. *Ferreira A., Viana-Gomes J., Nilsson J., Mucciolo E.R., Peres N.M.R., Castro Neto A.H.* Unified description of the dc conductivity of monolayer and bilayer graphene at finite densities based on resonant scatterers. Phys. Rev. B. 2011. V. 83. P. 165402(22).

27. *Margía G., Raya A., Sánchez Á., Reyes E.* The electron propagator in external electromagnetic fields in lower dimensions. Am. J. Phys. 2010. V. 78. P. 700–707.

28. *Vlasov Y.A., O'Boyle M., Hartman H.F., McNab S.J.* Active control of slow light on chip with photonic crystal waveguides. Nature. 2005. V. 438. P. 65–69.

29. *Volkov D.M.* Über eine Klass von Löder Diracshen Gleichung. Zeitchrift für Physic. 1935. V. 94. P. 250.

30. *Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* Quantum Electrodynamics, Second Edition: Volume 4 (Course of Theoretical Physics). Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008. 667 p.

31. *Pardy M.* Massive Photons and Volkov Solutions. Int. J. Theor. Physics. 2004. V. 43. P. 127–139.

32. *Calvo H.L., Pastawski H.M., Roche S., Foa Torres L.E.F.* Tuning laser-induced band gaps in graphene. Appl. Phys. Lett. 2011. V. 98. 232103(3).

33. *Fock V. Physik Z.* Sowjetunion. 1937. V. 12, P. 404; V.A. Fock – selected works: quantum mechanics and quantum field theory / by L.D. Faddeev, L.A. Khalfin, I.V. Komarov. New York: Chapman & Hall/CRC, 2004. 562 p.

34. *Schwinger J.* On gauge invariance and vacuum polarization. Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664–679.

35. *Boschi-Filho H., Farina C., Vaidya A.* Schwinger method for the electron propagator in a plane wave field revisited. Phys. Lett. A. 1996. V. 215. P. 109–112.

36. *Fradkin E.S.* Application of functional methods in quantum field theory and quantum statistics (II). Nucl. Phys. 1966. V. 76, P. 588–624.

37. *Itzikson C. Zuber J.-B.* Quantum Field 36. Theory. New York: Dover Publications, 2005. 752 p.

38. *Fradkin E.S., Gitman D.M., Shvartsman Sh.M.* Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 1–300.

39. *Boudjedaa T., Chetouani L., Guechi L.* Schwinger metod for particles of spin zero and $\frac{1}{2}$ in the field of plane wave plus constant magnetic field. Phys. Scripta. 1995. V. 52. P. 9–16.

40. *Gavrilov S.P., Gitman D.M.* Proper time and path integral representation for the commutation functions. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 3118–3130.

41. *Gavrilov S.P., Gitman D.M., Yokonuzo Y.* Dirac fermions in strong electric field and quantum transport in graphene. Phys. Rev. D. 2012. V. 86. 125022(12).

42. *Schwartz M.D.* Quantum Field Theory and Standard Model. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 850 p.

Поступила в редакцию 21.07.2016.