УДК 519.174.7

О. А. Костина

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

О контрпримерах к гипотезе Борсука на сфере

Классическая гипотеза Борсука состоит в утверждении, что всякое множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$ может быть разбито на $d+1$ часть меньшего диаметра. Данная гипотеза была опровергнута для $d \geqslant 64$. В настоящей работе рассматривается обобщение гипотезы Борсука на случай сферы S_r^{d-1}. В частности, изучается величина $f_r(d)$, определяемая как минимальное количество частей диаметра меньше 1, на которое может быть разбито всякое множество $A \subset S_r^{d-1}$ диаметра 1. В работе получены новые нижние оценки данной величины, основанные на применении линейно-алгебраического метода и улучшающие оценки предыдущих авторов. Исследуется оптимальность выбора параметров в полученных результатах.

Ключевые слова: гипотеза Борсука, линейно-алгебраический метод, графы диаметров.

O. A. Kostina

Moscow Institute of Physics and Technology

On counterexamples to Borsuk's conjecture on a sphere

The classical Borsuk's conjecture is the statement that any set of diameter 1 in the Euclidean space $\mathbb{R}^d$ can be divided into $d+1$ parts of smaller diameter. This conjecture is proved wrong for $d \geqslant 64$. In this paper, a generalization of Borsuk's conjecture on the sphere S_r^{d-1} is considered. In particular, we study the function $f_r(d)$ defined as the smallest number of parts of diameter smaller than 1 into which any set $A \subset S_r^{d-1}$ of diameter 1 can be divided. Using the linear algebraic method, we obtain new lower bounds of this function that improves the results of other authors. The optimal choice of parameters in the presented theorems is considered.

Key words: Borsuk's conjecture, linear-algebraic method, graphs of diameters.

1. Введение

Комбинаторная геометрия является одним из наиболее активно развивающихся разделов комбинаторики и теории графов, хотя ее истоками служат проблемы, сформулированные еще в первой половине XX столетия. Одну из наиболее известных проблем в этой области сформулировал в 1933 году К. Борсук (см. [1]), поставив следующий вопрос:

верно ли, что всякое множество $A \subset \mathbb{R}^d$ конечного диаметра можно разбить на части $A_1, \ldots, A_{d+1}$ строго меньшего диаметра?

Под диаметром множества $A \subset \mathbb{R}^d$ здесь мы понимаем величину

$$\operatorname{diam} A = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

где $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ обозначает евклидово расстояние между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

История проблемы Борсука довольно драматична (см. обзоры и статьи [2] – [7]). Все, кто занимался данной проблемой, верили, что ответ на поставленный вопрос положителен. К этому подталкивали и многочисленные продвижения, в частности, справедливость гипотезы Борсука для $d \leqslant 3$ (см. [8]), а также для некоторых классов множеств в произвольном случае. Тем более неожиданным оказался результат Кана–Калаи (см. [9]), опровергнувший гипотезу для $d = 2015$. На самом деле Кан и Калаи показали нечто большее. А именно, для всякого $A \subset \mathbb{R}^d$ введем величину $f(A)$, показывающую, на какое наименьшее количество частей меньшего диаметра может быть разбито множество A:

$$f(A) = \min\{f \colon A = A_1 \cup \ldots \cup A_f, \operatorname{diam} A_i < \operatorname{diam} A\}.$$

Теперь рассмотрим величину $f(d)$, которая говорит о том, на какое минимальное количество частей меньшего диаметра может быть разбито всякое множество диаметра 1:

$$f(d) = \max_{A \subset \mathbb{R}^d, \operatorname{diam} A = 1} f(A).$$

В таких терминах гипотеза Борсука формулируется совсем просто: $f(d) = d + 1$. Как было сказано выше, Кан и Калаи не только опровергли данную гипотезу, но и показали, что величина $f(d)$ растет субэкспоненциально при $d \to \infty$:

$$f(d) \geqslant (1.203\ldots + o(1))^{\sqrt{d}}.$$

В настоящий момент известно, что гипотеза Борсука неверна при $d \geqslant 64$ (см. [10]) и, как было указано выше, верна при $d \leqslant 3$ (точная граница, когда гипотеза перестает быть верной, до сих пор не найдена). Что же касается величины $f(d)$ при $d \to \infty$, то зазор между нижней и верхней оценками по-прежнему колоссален (см. [11], [12]):

$$(1.2255\ldots + o(1))^{\sqrt{d}} \leqslant f(d) \leqslant (1.224\ldots + o(1))^{d}.$$

Практически все контрпримеры к гипотезе Борсука строятся на основании множества, лежащего на сфере радиуса, близкого к $1/\sqrt{2}$. Поэтому довольно естественным обобщением гипотезы Борсука будет ее перенесение на сферу S_r^{d-1} произвольного радиуса r в пространстве $\mathbb{R}^d$. Иначе говоря,

верно ли, что всякое множество $A \subset \mathbb{S}_r^{d-1}$ конечного диаметра можно разбить на части $A_1, \ldots, A_{d+1}$ строго меньшего диаметра?

По аналогии с величиной $f(d)$ мы можем ввести величину $f_r(d)$:

$$f_r(d) = \max_{A \subset \mathbb{S}_r^{d-1}, \operatorname{diam} A = 1} f(A).$$

Впервые данная задача была рассмотрена в работе [13]. В этой работе было показано, что для сферы гипотеза Борсука также может быть опровергнута, и, более того, порядок роста величины $f_r(d)$ также субэкспоненциальный.

Теорема 1. *Для всякого $r > 1/2$ существуют $k = k(r) \in \mathbb{N}$, $c = c(r) > 1$ и функция $\delta = \delta(d) = o(1)$ такие, что*

$$f_r(d) \geqslant (c + \delta)^{\sqrt[2k]{d}}. \tag{1}$$

Хотя данная теорема показывает, что величина $f_r(d)$ растет существенно быстрее, чем $d+1$, константа в основании оценки (1), по-видимому, далека от оптимального значения. В настоящей работе мы продолжим исследование гипотезы Борсука на сфере, и нашей основной целью будет улучшение оценки теоремы 1. И прежде чем переходить к формулировке полученных результатов, обсудим численное выражение оценки из данной теоремы.

Разумеется, наиболее важным параметром в приведенном выше результате является функция $k(r)$, поскольку именно она определяет порядок роста оценки (1). Довольно очевидно, что если $k_1(r) < k_2(r)$, то функция $(c_1+\delta)^{\sqrt[2k_1]{d}}$ растет быстрее функции $(c_2+\delta)^{\sqrt[2k_2]{d}}$ при $d \to \infty$ для любых значений констант c_1 и c_2. Функция $k(r)$ в доказательстве данной теоремы определяется следующим образом:

$$k = k(r) = \min\left\{k' \in \mathbb{N}\colon r^2 > \frac{2k'+1}{8k'}\right\}.$$

Теперь легко видеть, что при $\sqrt{3/8} < r$ функция $k(r)$ равна 1, при $\sqrt{5/16} < r \leqslant \sqrt{3/8}$ мы получим $k(r) = 2$, и так далее. При этом константы в основании экспоненты в оценке корректно сравнивать только на одинаковых «участках» (то есть при одинаковых k), и, более того, довольно логичным кажется предположение, что вблизи «ступенек» вида $\sqrt{(2k'+1)/(8k')}$, где $k' \in \mathbb{N}$, мы получим падение константы c. Данное предположение легко проверяется численно, и ниже приведена таблица, в которой для $0.51 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2}$ указаны значения функции $k(r)$ и значения константы в основании экспоненты $c(r)$.

Для большей наглядности мы также приводим график фнукции $c(r)$, на котором отчетливо видно «ступеньки», отвечающие за изменение функции $k(r)$.

В следующем разделе мы сформулируем новые результаты, полученные нами. В разделах 3 и 4 будет проведено доказательство данных результатов. Наконец, в разделе 5 мы обсудим численные выражения полученных оценок и выбор оптимальных параметров в представленных нами теоремах.

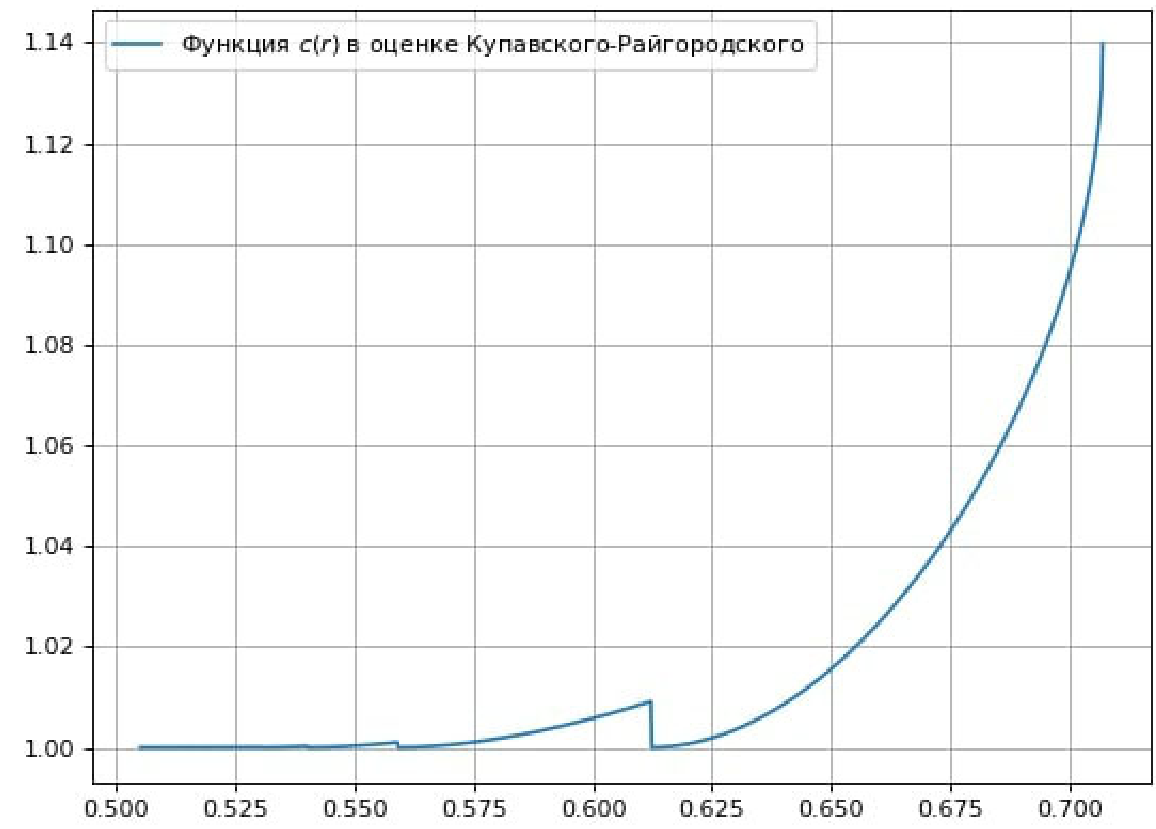

Рис. 1. График функции $c(r)$ из теоремы 1

Таблица 1

Оценка теоремы 1

r	$k(r)$	$c(r)$
0.510	13	1.0000005
0.520	7	1.0000140
0.530	5	1.0000766
0.535	4	1.0000598
0.536	4	1.0000868
0.537	4	1.0001184
0.538	4	1.0001544
0.539	4	1.0001944
0.540	4	1.0002384
0.542	3	1.0000124
0.544	3	1.0000499
0.546	3	1.0001110
0.548	3	1.0001941
0.550	3	1.0002980
0.552	3	1.0004211
0.554	3	1.0005622
0.556	3	1.0007203
0.558	3	1.0008941
0.560	2	1.0000043
0.570	2	1.0004968
0.580	2	1.0016989
0.590	2	1.0034858
0.600	2	1.0057660
0.610	2	1.0084779
0.620	1	1.0006819
0.630	1	1.0035464
0.640	1	1.0085262
0.650	1	1.0155692
0.660	1	1.0247235
0.670	1	1.0361867
0.680	1	1.0504288
0.690	1	1.0685623
0.700	1	1.0941122
$1/\sqrt{2}$	1	1.1397535

2. Формулировки результатов

Наиболее простая идея улучшения оценки Купавского–Райгородского состоит в следующем. В доказательстве теоремы 1 используются $(-1,1)$-векторы с равным количеством положительных и отрицательных координат, поэтому логичным представляется использовать произвольные доли единиц и минус единиц. Кроме того, при доказательстве теоремы 1 используется сфера с центром в начале координат, мы же попробуем рассмотреть более общую ситуацию.

Прежде чем сформулировать полученный нами результат, введем ряд необходимых обозначений. Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы. Зададим действительные числа $k'_1 \geqslant k'_{-1}$, удовлетворяющие соотношению $k'_1 + k'_{-1} = 1$, произвольное действительное число α, а также функцию $g'(k) = 1/2 - (k'_1 - k'_{-1})^{2k}/2$ (считая числа k'_1 и k'_{-1} фиксированными, мы опускаем зависимость от этих параметров). Определим натуральное число k из соотношения

$$k = \min\left\{k' \in \mathbb{N}\colon \frac{(\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k') + 2k'}{8k'} < r^2\right\}.$$

Данное определение является корректным, поскольку $r > 1/2$, а выражение, стоящее в левой части неравенства, стремится к $1/4$ при $k' \to \infty$. Зададим

$$n = \max\{m\colon m \equiv 0 \pmod 4,\ \sum_{i=0}^{2k} C_m^i < d\}.$$

Обозначим $k_1 = [k_1' n],\ k_{-1} = n - k_1$.

Далее, рассмотрим функцию $u(a)$:

$$u(a) = \frac{(\alpha+1)^2 g'(k) + (\alpha-1)^2(1-g'(k)) + 2ka^{2k-1}}{2 + 4ka^{2k-1} + (4k-2)a^{2k}}.$$

Заметим, что данная функция непрерывна на отрезке $[0,1]$, при этом в силу определения параметра k

$$u(1) = \frac{(\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k) + 2k}{8k} < r^2.$$

Заметим, что $u(0) = (\alpha-1)^2 + 4\alpha g'(k)$, и допустим, что $u(0) > r^2$. В таком случае уравнение

$$u(a) = r^2$$

имеет по меньшей мере одно решение. Обозначим $a_0 \in (0,1)$ минимальное решение данного уравнения. Наконец, пусть a минимальное натуральное число, большее $a_0 n$, при котором $p = \dfrac{a}{4} + \dfrac{n}{4}$ является простым числом. Заметим, что последнее ограничение не является существенным с точки зрения выбора a при $d \to \infty$. Действительно, известно, что между числами x и $x + O(x^{0.525})$ всегда найдется простое число (см. [14]), поэтому мы можем подобрать такое значение параметра d (и, соответственно, параметра n), что $p = \dfrac{a}{4} + \dfrac{n}{4}$ будет простым числом, при этом a асимптотически будет вести себя как $a_0 n$. Обозначим $p' = \dfrac{a_0}{4} + \dfrac{1}{4}$. В таком случае ясно, что $p \sim p'n$.

Теперь мы можем перейти к формулировке теоремы.

Теорема 2. *Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы S_r^{d-1}, а величины k_1', k_{-1}', α, k и p' определены выше. При $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$ определим выражение $c_x^y = \dfrac{x^x}{y^y (x-y)^{x-y}}$ (здесь при необходимости формально $0^0 = 1$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k_1'}}{c_1^{p'}} + o(1)\right)^{\sqrt[2k]{d\cdot(2k)!}}.$$

Данную теорему мы докажем в разделе 3. Заметим, что от ε в формулировке теоремы 2 можно избавиться, но это требует значительно более громоздких формулировок, а на численных результатах не отразится. Поэтому в настоящей работе мы доказываем именно такой результат.

Следующая идея улучшения заключается в том, чтобы расширить класс векторов, на которых строится доказательство, а именно, использовать $(-1,0,1)$-векторы. Данные векторы оказались достаточно полезными для ряда классических задач комбинаторной геометрии, к примеру, проблемы Эрдеша–Нелсона–Хадвигера (см. [15], [6]), поэтому их использование в нашей задаче также выглядит логичным. Идея доказательства соответствующего результата близка к идее доказательства теоремы 2, но требует использования большего числа параметров.

Итак, зафиксируем неотрицательные действительные числа k_1', k_{-1}', k_0', удовлетворяющие соотношениям $k_1' + k_{-1}' + k_0' = 1$ и $k_1' \geqslant k_{-1}'$. Пусть

$$g_0'(k) = 1 - (k_1' + k_{-1}')^{2k};$$
$$g_+'(k) = \frac{(k_1' + k_{-1}')^{2k} + (k_1' - k_{-1}')^{2k}}{2};$$
$$g_-'(k) = \frac{(k_1' + k_{-1}')^{2k} - (k_1' - k_{-1}')^{2k}}{2}.$$

Здесь для упрощения записи мы опускаем зависимость функций g_0', g_-' и g_+' от параметров k_1', k_{-1}' и k_0', которые предполагаем фиксированными. Пусть α — произвольное действительное число. Введем функцию $u_1(k')$:

$$u_1(k') = \frac{(\alpha+1)^2 g_-'(k') + (\alpha-1)^2 g_+'(k') + \alpha^2 g_0'(k') + 2k'(k_{-1}' + k_1')}{2(k_1' + k_{-1}')^{2k'} + 4k'(k_1' + k_{-1}' + 1) - 2}.$$

Определим натуральное число k из соотношения

$$k = \min\left\{k' \in \mathbb{N} \colon u_1(k') < r^2\right\}.$$

Покажем, что данное определение корректно. В самом деле, если $k_{-1}' + k_1' = 1$, то мы находимся в ситуации предыдущей теоремы, и корректность доказана. В противном случае легко установить пределы функций $g_0'(k'), g_-'(k')$ и $g_+'(k')$ при $k' \to \infty$:

$$\lim_{k' \to \infty} g_0'(k') = 1;$$
$$\lim_{k' \to \infty} g_+'(k') = \lim_{k' \to \infty} g_-'(k') = 0.$$

Данные соотношения позволяют вычислить предел $\lim\limits_{k' \to \infty} u_1(k')$ при фиксированных параметрах k_1', k_{-1}', k_0' и α:

$$\lim_{k' \to \infty} u_1(k') = \lim_{k' \to \infty} \frac{2k'(k_1' + k_{-1}')}{4k'(1 + k_1' + k_{-1}')} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1 + k_1' + k_{-1}'}\right) < 1/4,$$

что доказывает корректность определения параметра k. Зададим

$$n = \max\{m \in \mathbb{N} \colon \sum_{i_1 + 2i_2 \leqslant 2k} C_m^{i_1} C_{m-i_1}^{i_2} < d\}$$

и обозначим $k_1 = [k_1' n],\ k_{-1} = [k_{-1}' n],\ k_0 = n - k_1 - k_{-1}$.

Аналогично предыдущей теореме рассмотрим функцию $u(a)$:

$$u(a) = \frac{(\alpha+1)^2 g_-'(k) + (\alpha-1)^2 g_+'(k) + \alpha^2 g_0'(k) + 2ka^{2k-1}(k_1' + k_{-1}')}{2(k_1' + k_{-1}')^{2k} + 4ka^{2k-1}(k_1' + k_{-1}') + (4k-2)a^{2k}}.$$

Данная функция непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и при этом, согласно определению параметра k,

$$u(1) = u_1(k) < r^2.$$

Несложно видеть, что

$$u(0) = \frac{(\alpha+1)^2 g_-'(k) + (\alpha-1)^2 g_+'(k) + \alpha^2 g_0'(k)}{2(k_1' + k_{-1}')^{2k}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $u(0) > r^2$. Тогда уравнение $u(a) = r^2$ имеет по крайней мере одно решение на интервале $(0, 1)$. Обозначим a_0 минимальное решение данного уравнения и пусть a минимальное натуральное число, превосходящее $[a_0 n]$, при котором $p = a + k_1 + k_{-1}$ является простым числом. Обозначим также $p' = a_0 + k_1' + k_{-1}'$, тогда ясно, что $p \sim p'n$. Теперь мы готовы дать итоговую формулировку теоремы.

Теорема 3. *Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы S_r^{d-1}, а величины k'_1, k'_{-1}, k и p' определены выше. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k'_1} c_{1-k'_1}^{k'_{-1}}}{\max\limits_{(m'_1, m'_2)\in \mathcal{B}'} c_1^{m'_1} c_{1-m'_1}^{m'_2}} + o(1) \right)^{\sqrt[2k]{d\cdot(2k)!}},$$

где

$$\mathcal{B}' = \{(m_1, m_2) \colon m_1 + m_2 \leqslant 1,\ m_1 + 2m_2 \leqslant p'\}.$$

Справедливость данного результата будет установлена в разделе 4.

3. Доказательство теоремы 2

3.1. Начало доказательства теоремы 2

Рассмотрим множество векторов

$$\Sigma = \big\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \{-1, 1\},\ x_1 = 1,\ |i \colon x_i = 1| = k_1,\ |i \colon x_i = -1| = k_{-1}\big\}.$$

Обозначим $n' = n^{2k}$ и $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_{n'}\}$ множество всех слов длины $2k$ над алфавитом $\{1, \ldots, n\}$. Пусть $a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,2k})$. Зафиксируем теперь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$. Рассмотрим

$$\mathbf{x}^* = \left(x_{a_{1,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{1,2k}}, \ldots, x_{a_{n',1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{n',2k}}, \sqrt{2ka^{2k-1}}x_1, \ldots, \sqrt{2ka^{2k-1}}x_n\right).$$

Введем

$$\Omega' = \{\mathbf{x}^* \colon x \in \Sigma\}.$$

Несложно понять, что каждый вектор $\mathbf{x}^* \in \Omega'$ состоит из $n' + n$ координат. При этом для любого i имеем $x_i^2 = 1$ и для любой перестановки сомножителей имеем одно и то же произведение. Поэтому $\Omega' \subset \mathbb{R}^{d'}$, где $d' = \sum\limits_{i=0}^{2k} C_n^i < d$.

Посчитаем количество отрицательных координат среди координат вида $x_{a_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{j,2k}}$. Очевидно, что данное произведение будет отрицательным, если среди координат вида $x_{a_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{j,2k}}$ будет нечетное количество отрицательных. Пусть $1 \leqslant i \leqslant 2k-1$ — нечетное число. Тогда существует ровно $C_{2k}^i k_{-1}^i k_1^{2k-i}$ способов выбрать i отрицательных и $2k - i$ положительных координат $x_{a_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{j,2k}}$ (напомним, что мы рассматриваем выбор с повторением, при этом порядок расположения отрицательных координат важен). Если теперь взять сумму по всем возможным i, мы получим количество отрицательных координат среди первых n' координат вида $x_{a_{j,1}}, \ldots, x_{a_{j,2k}}$:

$$g_-(k_1, k_{-1}, k) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2k-1,\\ i\equiv 1 \pmod 2}} C_{2k}^i k_{-1}^i k_1^{2k-i} = \frac{(k_1 + k_{-1})^{2k} - (k_1 - k_{-1})^{2k}}{2} = \frac{n^{2k} - (k_1 - k_{-1})^{2k}}{2}.$$

Разумеется, количество положительных координат равно

$$g_+(k_1, k_{-1}, k) = n^{2k} - g_-(k_1, k_{-1}, k) = \frac{n^{2k} + (k_1 - k_{-1})^{2k}}{2}.$$

Нашей целью будет построение множества Ω диаметра 1, лежащего на подходящей сфере S_r^{d-1}, при помощи множества Ω'. Как нетрудно заметить, в силу симметрии относительно перестановки координат векторы из Ω' лежат на сфере $S_\rho^{d'-1}$ с центром $(\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n'}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$.

Вычислим радиус данной сферы в зависимости от параметра α:

$$\rho^2 = (\alpha + 1)^2 g_-(k_1, k_{-1}, k) + (\alpha - 1)^2 g_+(k_1, k_{-1}, k) + 2ka^{2k-1}n.$$

С другой стороны, скалярное произведение векторов $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \Omega'$ можно выразить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &= \sum_{i=1}^{n'} x_{a_{i,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{i,n'}} y_{a_{i,1}} \cdot \ldots \cdot y_{a_{i,n'}} + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_{2k}=1}^{n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{2k}} \cdot y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_{2k}} + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1} y_{i_1} \right) \ldots \left(\sum_{i_{2k}=1}^{n} x_{i_{2k}} y_{i_{2k}} \right) + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\
&= (\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2k} + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что минимальное скалярное произведение $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ достигается в том и только том случае, когда скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a$. Наличие таких векторов гарантируется тем, что $a \sim a_0 n$, где $a_0 < 1$, в то время как $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > k_1 - 3k_{-1} \geqslant -n$. Таким образом, минимально возможное значение скалярного произведения $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ равно $a^{2k} - 2ka^{2k}$.

Следовательно,

$$\operatorname{diam}^2 \Omega' = 2(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) - 2(a^{2k} - 2ka^{2k}) = 2n^{2k} + 4ka^{2k-1}n + (4k-2)a^{2k}.$$

Умножим все векторы из Ω' на константу $1/\operatorname{diam}^2 \Omega'$. В результате мы получим некоторое новое множество векторов Ω диаметра 1, которое лежит на сфере радиуса

$$(r')^2 = \frac{(\alpha+1)^2 g_-(k_1, k_{-1}, k) + (\alpha-1)^2 g_+(k_1, k_{-1}, k) + 2ka^{2k-1}}{2n^{2k} + 4ka^{2k-1}n + (4k-2)a^{2k}}. \tag{2}$$

Ясно, что $r' \sim r$ при $n \to \infty$. Значит, при достаточно больших n выполнено неравенство $r' < r + \varepsilon$. Тогда $\Omega \subset S_{r'}^{d'-1} \subset S_{r+\varepsilon}^{d-1}$. Таким образом, данное множество векторов является искомым.

Теперь покажем, что множество Ω не может быть разбито на $f \leqslant \frac{C_n^{k_1}}{\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}$ частей меньшего диаметра. Однако множества Ω' и Ω отличаются лишь умножением на константу, поэтому достаточно показать, что множество Ω' невозможно разбить на f частей меньшего диаметра. Допустим, что это неверно, и Ω' допускает представление

$$\Omega' = \Omega_1' \sqcup \ldots \sqcup \Omega_f',$$

где $\operatorname{diam} \Omega_i' < \operatorname{diam} \Omega'$. Как нетрудно понять, по вектору $\mathbf{x}^* \in \Omega'$ легко восстановить его прообраз $\mathbf{x} \in \Sigma$, значит между множествами Ω' и Σ существует взаимно однозначное соответствие, и разбиение множества Ω' индуцирует разбиение множества Σ:

$$\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \Sigma_f.$$

Согласно принципу Дирихле, существует Σ_i, для которого

$$|\Sigma_i| > \frac{|\Sigma|}{f} = \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i.$$

Нам понадобится следующая лемма, дающая с помощью линейно-алгебраического метода (см. [16], [17]) оценку для размера совокупности векторов с запрещенным скалярным произведением.

Лемма 1. *Пусть $Q \subset \Sigma$ обладает свойством, что $|Q| > \sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i$. Тогда существуют такие векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a$.*

Данная лемма будет доказана в параграфе 3.2. Ее результат означает, что в множестве Σ_i найдутся два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, скалярное произведение которых равно $-a$. Однако из этого следует, что

$$\operatorname{diam}^2 \Omega_i' = |\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*| = \operatorname{diam}^2 \Omega'.$$

Данное равенство приводит нас к противоречию, поэтому множество Ω не может быть разбито на f частей меньшего диаметра. Таким образом:

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \frac{C_n^{k_1}}{\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

При помощи формулы Стирлинга и стандартных методов асимптотического анализа легко показать, что

$$C_n^{k_1} = (c_1^{k_1'} + o(1))^n, \quad \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i = (c_1^{p'} + o(1))^n.$$

Ясно, что

$$\sum_{i=0}^{2k} C_n^i \sim \frac{n^{2k}}{(2k)!}.$$

Поэтому из определения параметра n сразу следует, что

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k_1}}{c_1^{p'}} + o(1)\right)^n = \left(\frac{c_1^{k_1}}{c_1^{p'}} + o(1)\right)^{\sqrt[2k]{d\cdot(2k)!}}.$$

Данная цепочка неравенств завершает доказательство теоремы.

3.2. Доказательство леммы 1

Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ и для любой пары различных векторов $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ верно, что

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq -a.$$

Наша задача — продемонстрировать, что

$$s < \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i.$$

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из совокупности Σ. Сопоставим этому вектору многочлен

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \not\equiv n \pmod p}}^{p-1} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \text{ где } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, что условие

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod p$$

эквивалентно условию

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv n \pmod p.$$

Раскрыв скобки в определении многочлена, приведем его к следующему виду:

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_m \\ \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}}} c_{i_1, \ldots, i_m} y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots y_{i_m}^{\alpha_{i_m}}.$$

Заменим в полученном выражении все нечетные степени единицами, а все четные — нулями. В результате каждому многочлену $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ мы сопоставим новый многочлен $\tilde{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, значения которого совпадают со значениями $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ на множестве $(-1,1)$-векторов, а значит, и на множестве Σ. Покажем теперь, что полиномы

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}$$

линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Допустим, что это неверно и найдутся такие отличные от нуля константы $c_1, \ldots, c_s$, что для всякого $\mathbf{y} \in \Sigma$

$$c_1\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + c_s\tilde{P}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Возьмем $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда, с одной стороны, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = n$, и, согласно утверждению выше, $\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Покажем, что, с другой стороны, $\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку $n \equiv 0 \pmod{4}$, скалярное произведение $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{4}$. Согласно определению множества Q, для любой пары различных векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$ их скалярное произведение $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq -a$. Наконец, $a > 0$, поэтому $n - 8p < -n$. Поэтому для различных векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$ из множества Q

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \notin \{n-8p, n-7p, n-6p, n-5p, n-4p, n-3p, n-2p, n-p\},$$

и это приводит к требуемому утверждению:

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Отсюда мы получаем, что $c_i \equiv 0 \pmod{p}$. Произвольность выбора i гарантирует, что полиномы $\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы.

Стало быть, s не может превышать размерность пространства данных многочленов. Базис в данном пространстве образуют мономы вида $y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}$, где $m \leqslant p-1$. Но число способов выбрать такой моном в точности равно $\sum\limits_{i=0}^{p-1} C_n^i$. Поэтому окончательно

$$s < \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i,$$

и лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 3

4.1. Начало доказательства теоремы 3

Построим совокупность Ω примерно тем же способом, что и в теореме 2. Рассмотрим множество $(-1,0,1)$-векторов с фиксированным количеством положительных, отрицательных и нулевых координат:

$$\Sigma = \big\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \{-1,0,1\},\ x_1 = 1, \\ |i\colon x_i = 1| = k_1,\ |i\colon x_i = 0| = k_0,\ |i\colon x_i = -1| = k_{-1}\big\}.$$

Пусть $n' = n^{2k}$ и $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_{n'}\}$ — совокупность всех слов длины $2k$ над алфавитом $\{1, \ldots, n\}$, где $a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,2k})$. Зафиксируем теперь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$. Рассмотрим, как и ранее,

$$x^* = \left(x_{a_{1,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{1,2k}}, \ldots, x_{a_{n',1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{n',2k}}, \sqrt{2ka^{2k-1}}x_1, \ldots, \sqrt{2ka^{2k-1}}x_n\right).$$

И, наконец, введем

$$\Omega' = \{x^* \colon x \in \Sigma\}.$$

Подобно соображениям из доказательства теоремы 2 можно установить, что $\Omega' \subset \mathbb{R}^{d'}$, где $d' = \sum\limits_{i_1+2i_2\leqslant 2k} C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} < d$.

Очевидно, количество ненулевых координат среди координат вида $x_{a_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_{a_{j,2k}}$ равно $(k_1+k_{-1})^{2k}$. Таким образом, количество нулевых координат выражается как

$$g_0(k) = n^{2k} - (k_1 + k_{-1})^{2k}.$$

Здесь, как и в случае соответствующих функций g', мы опускаем зависимость функций g_0, g_- и g_+ от параметров k_1, k_{-1} и k_0. Количество единиц и минус единиц среди координат вида $x_{a_{j,1}}, \ldots, x_{a_{j,2k}}$ вычисляется аналогично доказательству предыдущей теоремы:

$$g_-(k) = \frac{(k_1+k_{-1})^{2k} - (k_1-k_{-1})^{2k}}{2}; \;\; g_+(k) = \frac{(k_1+k_{-1})^{2k} + (k_1-k_{-1})^{2k}}{2}.$$

Построим теперь совокупность Ω диаметра 1. Вспомним, что векторы из Ω' лежат на сфере $S_\rho^{d'-1}$ с центром $(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{n'},\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$, и вычислим радиус данной сферы в зависимости от параметра α:

$$\rho^2 = (\alpha+1)^2 g_-(k) + (\alpha-1)^2 g_+(k) + \alpha^2 g_0(k) + 2ka^{2k-1}(k_{-1}+k_1).$$

С другой стороны, как мы знаем из доказательства предыдущей теоремы, скалярное произведение векторов $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \Omega'$ можно выразить в следующем виде:

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^{2k} + 2ka^{2k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

и минимальное скалярное произведение $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ по-прежнему достигается в том и только том случае, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a$. Наличие таких векторов гарантируется тем, что $a \sim a_0 n$, где $a_0 < 1$, в то время как $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > -n$. Следовательно, минимально возможное значение скалярного произведения $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ равно $a^{2k} - 2ka^{2k}$.

Диаметр множества Ω' вычисляется подобно доказательству предыдущего результата, однако скалярный квадрат $\mathbf{x}^*$ теперь зависит от параметров k_1 и k_{-1}:

$$\operatorname{diam}^2 \Omega' = 2(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) - 2(a^{2k} - 2ka^{2k}) = 2(k_1+k_{-1})^{2k} + 4ka^{2k-1}(k_1+k_{-1}) + (4k-2)a^{2k}.$$

Путем умножения векторов из Ω' на константу $1/\operatorname{diam}\Omega'$ мы получаем множество векторов Ω диаметра 1, которое лежит на сфере радиуса

$$(r')^2 = \frac{(\alpha+1)^2 g_-(k) + (\alpha-1)^2 g_+(k) + \alpha^2 g_0(k) + 2ka^{2k-1}(k_{-1}+k_1)}{2(k_1+k_{-1})^{2k} + 4ka^{2k-1}(k_1+k_{-1}) + (4k-2)a^{2k}}.$$

Ясно, что $r' \sim r$ при $n \to \infty$. Значит, при достаточно больших n выполнено неравенство $r' < r + \varepsilon$. Тогда $\Omega \subset S_{r'}^{d'-1} \subset S_{r+\varepsilon}^{d-1}$, и текущий шаг доказательства завершен.

Покажем, что множество Ω' не может быть разбито на

$$f \leqslant \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}}$$

частей меньшего диаметра, где $\mathcal{B} = \{(m_1, m_2)\colon m_1 + m_2 \leqslant n, m_1 + 2m_2 \leqslant p-1\}$. Допустим, что это неверно и Ω' допускает представление

$$\Omega' = \Omega'_1 \sqcup \ldots \sqcup \Omega'_f,$$

где $\operatorname{diam}\Omega'_i < \operatorname{diam}\Omega'$. Как было показано ранее, между множествами Ω' и Σ существует взаимно однозначное соответствие, и разбиение множества Ω' индуцирует разбиение множества Σ:

$$\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \Sigma_f.$$

Согласно принципу Дирихле, существует Σ_i, для которого

$$|\Sigma_i| > \frac{|\Sigma|}{f} = \sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}.$$

Следующая лемма использует линейно-алгебраический метод для $(-1,0,1)$-векторов и показывает, что размер совокупности векторов $Q \subset \Sigma$, в которой встречается скалярное произведение $-a$, не может превышать определенной величины. Данную лемму мы докажем в параграфе 4.2.

Лемма 2. *Пусть $Q \subset \Sigma$ обладает свойством, что $|Q| > \sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_n^{m_2}$. Тогда существуют такие векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a$.*

Поскольку $-a$ является минимально возможным скаляруным произведением векторов из Σ, из результата леммы напрямую следует, что

$$\operatorname{diam}^2 \Omega_i' = |\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*| = \operatorname{diam}^2 \Omega'.$$

Полученное противоречие означает, что Ω не может быть разбито на f частей меньшего диаметра, следовательно,

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant f = \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}}.$$

При помощи формулы Стирлинга и стандартных методов асимптотического анализа легко показать, что

$$C_n^{k_1} = \left(c_1^{k_1'} + o(1)\right)^n, \quad C_{n-k_1}^{k_{-1}} = \left(c_{1-k_1'}^{k_{-1}'} + o(1)\right)^n,$$
$$\sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} = \max_{(m_1',m_2')\in\mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'}.$$

Принимая во внимание рассуждения из доказательства прошлой теоремы и замечая, что $\sum\limits_{i_1+2i_2\leqslant 2k} C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} \sim \dfrac{n^{2k}}{(2k)!}$,

$$f_{r+\varepsilon}(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{k_1'} c_{1-k_1'}^{k_{-1}'}}{\max\limits_{(m_1',m_2')\in\mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'}} + o(1) \right)^n = \left(\frac{c_1^{k_1'} c_{1-k_1'}^{k_{-1}'}}{\max\limits_{(m_1',m_2')\in\mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'}} + o(1) \right)^{\sqrt[2k]{d\cdot(2k)!}}.$$

Данная цепочка неравенств завершает доказательство теоремы.

4.2. Доказательство леммы 2

Доказательство данного результата во многом близко к доказательству леммы 1, однако есть и довольно важные отличия. Пусть, как и прежде, $Q = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ — множество векторов, попарные скалярные произведения которых отличны от $-a$. Покажем, что

$$s < \sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}.$$

Каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma$ сопоставим многочлен

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\not\equiv k_1+k_{-1} \pmod p}}^{p-1} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \text{ где } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Стандартным способом преобразуем многочлен в выражение вида

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m \\ \alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}}} c_{i_1,\ldots,i_m} y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots y_{i_m}^{\alpha_{i_m}}$$

и заменим в нем все нечетные степени единицами, а все четные — двойками. В результате мы получим некоторый новый многочлен $\tilde{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, значения которого совпадают со значениями $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ на всем множестве $(-1, 0, 1)$-векторов.

Условия леммы гарантируют, что попарное скалярное произведение двух векторов из Q не принимает значение $-a = k_1 + k_{-1} - p$. Проверим, что $k_1 + k_{-1} - 2p$ меньше минимально возможного скалярного произведения $\underline{s}$ векторов из Σ. Оценим $\underline{s}$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, тогда скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ будет минимальным в том случае, когда максимальное количество слагаемых $x_i y_i$ принимает отрицательное значение, а из оставшихся минимальное число слагаемых принимает положительное значение. Слагаемых, равных -1, не больше, чем $2k_{-1}$, и они дают общий вклад в сумму не менее $-2k_1$. Количество слагаемых, равных 1, не меньше, чем $\max(0, k_1 - k_{-1} - k_0)$, и их «положительный» вклад в сумму оценивается этим количеством. В итоге

$$\underline{s} \geqslant -2k_{-1} + \max(0, k_1 - k_{-1} - k_0).$$

Нетрудно проверить с помощью явного примера, что данная оценка является точной, то есть $\underline{s} = -2k_{-1} + \max(0, k_1 - k_{-1} - k_0)$. Но

$$k_1 + k_{-1} - 2p = -k_1 - k_{-1} - 2a < -2k_{-1} - 2a < \underline{s}.$$

Полученное неравенство означает, что для различных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ следующие условия эквивалентны:

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p} \Longleftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq -a.$$

Далее, покажем, что полиномы $\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Пусть это неверно, и найдутся такие нетривиальные константы $c_1, \ldots, c_s$, что следующая линейная комбинация обращается в ноль при всяком $\mathbf{y} \in \Sigma$:

$$c_1 \tilde{P}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + c_s \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Заметим, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = k_1 + k_{-1}$, следовательно,

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

При этом в силу определения множества Q при всяком $j \neq i$

$$\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{p},$$

то есть $c_i \equiv 0 \pmod{p}$, и, в силу произвольности выбора i, полиномы $\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы.

Вычислим размерность пространства, образуемого данными полиномами. Базис в нем образуют мономы вида $y_{i_1}^{\beta_{i_1}} \cdot \ldots \cdot y_{i_m}^{\beta_{i_m}}$, где $m \leqslant n$, а $\beta_i \in \{1, 2\}$. Оценим число таких мономов. Существует $C_n^{m_1}$ способов выбрать m_1 переменных, отвечающих первым степеням, и $C_{n-m_1}^{m_2}$ способов выбрать в оставшемся наборе m_2 переменных, отвечающих квадратам. Вспомним, что степень исследуемых полиномов не превосходит $p - 1$, и получим окончательно:

$$s < \sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}.$$

Доказательство леммы завершено.

5. Численные результаты и обсуждение

В результате численной оптимизации мы выяснили, что в оценке теоремы 2 оптимальными параметрами являются $\alpha = 0$ и $k_1' = k_{-1}'$, что в точности соответствует случаю теоремы 1. При этом, однако, нам удалось улучшить данный результат за счет более точного подсчета размерности сферы, на которой лежит совокупность Ω. Что же касается теоремы 3, то в случае, когда оценка отлична от тривильной (то есть $(1+o(1))^n$), численная оптимизация показала, что наилучшая оценка достигается в довольно простом случае $\alpha = 0$ и $k_1' = k_{-1}' \leqslant 1/4$. Отметим, что при $\alpha = 0$ функции u, фигурирующие в формулировках теорем 2 и 3, монотонны (данный факт мы докажем в параграфе 5.1). Монотонность функции u позволяет в явном виде гарантировать, что в доказательстве данных теорем конструкция Ω лежит на сфере радиуса $r' < r$, поэтому мы можем избавиться от ε в формулировках. Кроме того, логично дать более простую версию теоремы 3 при $\alpha = 0$ и $k_1' = k_{-1}'$.

Теорема 4. *Пусть $r > 1/2$ — радиус сферы S_r^{d-1}, параметр $\kappa \in [0, 1/2]$ (данный параметр соответствует сумме $k_1' + k_{-1}' = 2k_1'$). Определим натуральные числа n и k из соотношений*

$$n = \max\{m\colon m \equiv 0 \pmod 4,\ \sum_{i_1+2i_2 \leqslant 2k} C_m^{i_1} C_{m-i_1}^{i_2} < d\},$$

$$k = \min\left\{k' \in \mathbb{N}\colon \frac{\kappa^{2k'} + 2k'\kappa}{2\kappa^{2k'} + 4k\kappa + (4k-2)} < r^2\right\} \tag{3}$$

и введем функцию

$$u(a) = \frac{\kappa^{2k} + 2k\kappa a^{2k-1}}{2\kappa^{2k} + 4k\kappa a^{2k-1} + (4k-2)a^{2k}}.$$

Повторяя соображения, предваряющие формулировку теоремы 3, получаем, что уравнение

$$u(a) = r^2$$

имеет по меньшей мере один корень на отрезке $[0, 1]$ (отметим, что в данном случае условие $u(0) > r^2$ выполняется автоматически). Обозначим минимальный среди таких корней a_0. Определим a как минимальное число, большее $a_0 n$, при котором $p = a + \kappa n$ является простым числом, и обозначим $p' = p/n$.

Тогда

$$f_r(d) \geqslant \left(\frac{c_1^{\kappa/2} c_{1-\kappa/2}^{\kappa/2}}{\max\limits_{(m_1', m_2') \in \mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'}} + o(1)\right)^{\sqrt[2k]{d \cdot (2k)!}}, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{B}' = \{(m_1, m_2)\colon m_1 + m_2 \leqslant 1,\ m_1 + 2m_2 \leqslant p'\}.$$

В таблице ниже приведено сравнение констант в основании экспоненты из оценок теоремы Купавского–Райгородского и новых теорем 2 и 4. Строки таблицы отвечают значениям радиуса r в пределах от 0.51 до $1/\sqrt{2}$, причем область больших радиусов детализирована. Отметим, что значения функции $k(r)$ в формулировках данных теорем совпадают при оптимальном выборе параметров, поэтому мы указываем ее значение лишь в одном столбце. В последнем столбце мы также указываем значение оптимального параметра κ из теоремы 4. Жирным шрифтом выделена наилучшая для данного значения r оценка. Из этой таблицы видно, что теорема 2, использующая $(-1, 1)$-векторы, всегда превосходит оценку Купавского–Райгородского возведением в степень $\sqrt[2k]{(2k)!}$. При этом вблизи $r = 1/\sqrt{2}$ оказывается становится выгоднее использовать $(-1, 0, 1)$-векторы, и теорема 4 оказывается сильнее теоремы 2.

Таблица 2

Сравнение оценок теорем 1, 2 и 4

r	$k(r)$	Теорема 1	Теорема 2	Теорема 4	Оптимальное κ
0.510	13	1.0000005	**1.0000052**	1.0000000	—
0.520	7	1.0000140	**1.0000845**	1.0000000	—
0.530	5	1.0000766	**1.0003468**	1.0000000	—
0.540	4	1.0002384	**1.0008978**	1.0000000	—
0.550	3	1.0002980	**1.0008924**	1.0000000	—
0.560	2	1.0000043	**1.0000094**	1.0000000	—
0.570	2	1.0004968	**1.0010999**	1.0000000	—
0.580	2	1.0016989	**1.0037642**	1.0000000	—
0.590	2	1.0034858	**1.0077317**	1.0000000	—
0.600	2	1.0057660	**1.0128070**	1.0000000	—
0.610	2	1.0084779	**1.0188611**	1.0000000	—
0.620	1	1.0006819	**1.0009645**	1.0000000	—
0.630	1	1.0035464	**1.0050190**	1.0000000	—
0.640	1	1.0085262	**1.0120792**	1.0000000	—
0.650	1	1.0155692	**1.0220889**	1.0000000	—
0.660	1	1.0247235	**1.0351425**	1.0000000	—
0.670	1	1.0361867	**1.0515566**	1.0000000	—
0.675	1	1.0429135	**1.0612237**	1.0051568	0.49
0.680	1	1.0504288	**1.0720547**	1.0211042	0.49
0.685	1	1.0588895	**1.0842866**	1.0391555	0.49
0.690	1	1.0685623	**1.0983206**	1.0603233	0.47
0.695	1	1.0799356	**1.1148892**	1.0861596	0.49
0.700	1	1.0941122	**1.1356430**	1.1189050	0.43
0.701	1	1.0975025	**1.1406228**	1.1267955	0.43
0.702	1	1.1011791	**1.1460302**	1.1353528	0.43
0.703	1	1.1052291	**1.1519956**	1.1447820	0.43
0.704	1	1.1097975	**1.1587355**	1.1554241	0.43
0.705	1	1.1151616	1.1666639	**1.1679301**	0.43
0.706	1	1.1220065	1.1768039	**1.1839439**	0.42
0.707	1	1.1397535	1.2032138	**1.2127397**	0.42
$1/\sqrt{2}$	1	1.1397535	1.2032138	**1.2255790**	0.42

Для наглядности мы также приводим график с тремя оценками при $0.7 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2}$. На нем четко видно, что теорема 4 начинает улучшать теорему 2 только вблизи $r_0 = 0.705$, и при $r > r_0$ разница с теоремой 2 только возрастает.

При взгляде на таблицу 2 может возникнуть закономерный вопрос: может ли в принципе теорема 4 давать нетривиальную оценку при небольших значениях радиусов? Следующие рассуждения показывают, что как минимум при $0.525\ldots = \sqrt{5/18} < r < 2/3$ это невозможно.

Сначала проверим, что при $r > \sqrt{5/18}$ параметр k, определяемый из соотношения (3), равен 1. В самом деле, достаточно установить, что при $k = 1$ и $r > \sqrt{5/18}$ выполняется неравенство $u(1) < r^2$. Как нетрудно видеть,

$$u(1) = \frac{\kappa^{2k} + 2k\kappa}{2\kappa^{2k} + 4k\kappa + 4k - 2} = \frac{1}{2} - \frac{2k-1}{2\kappa^{2k} + 4k\kappa + 4k - 2}.$$

Подставляя в данное выражение $k = 1$, получим

$$u(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\kappa^2 + 4\kappa + 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\kappa+1)^2}.$$

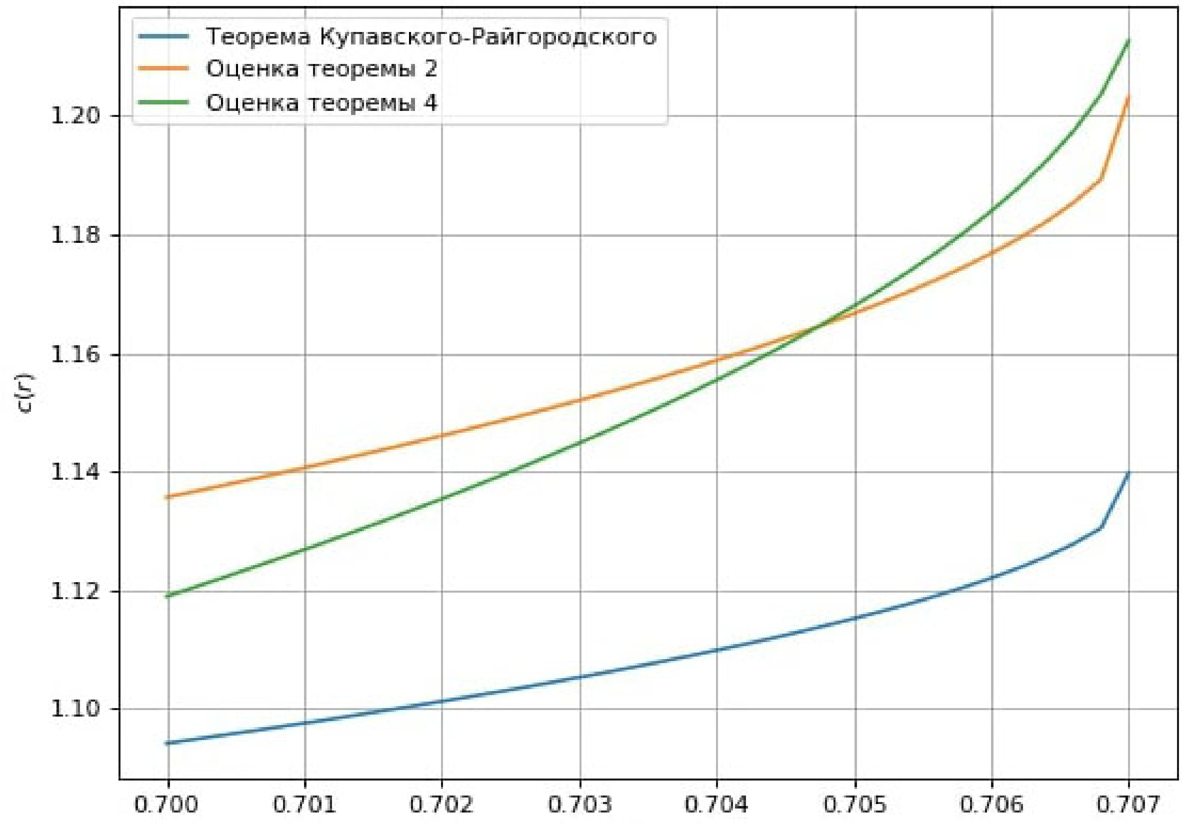

Рис. 2. Сравнение оценок теорем 1, 2 и 4 при $0.7 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2}$

Очевидно, функция в правой части достигает своего максимального значения 5/18 при $\kappa = 1/2$ (напомним, что $\kappa \leqslant 1/2$). Значит, при радиусе сферы $r > \sqrt{5/18}$

$$u(1) < r^2,$$

и уравнение $u(a) = r^2$ имеет решение на отрезке $[0, 1]$. Поскольку в качестве k выбирается минимальное натуральное число, которое обеспечивает выполнение данного свойства, то $k = 1$ при $r > \sqrt{5/18}$.

При $k = 1$ уравнение $u(a) = r^2$ становится квадратным:

$$\frac{\kappa^2 + 2\kappa a}{2\kappa^2 + 4\kappa a + 2a^2} = r^2.$$

Несложно проверить, что данное уравнение имеет единственное решение $a_0 \in [0, 1]$:

$$a_0 = \kappa \frac{1 - 2r^2 + \sqrt{1 - 2r^2}}{2r^2}.$$

Покажем, что при $\sqrt{5/18} < r < 2/3$ параметр p, определяющий область максимизации $\mathcal{B}'$, оказывается настолько большим, что числитель оценки (4) не больше знаменателя. Путем элементарных преобразований можно проверить, что при $\sqrt{5/18} < r < 2/3$

$$\frac{1 - 2r^2 + \sqrt{1 - 2r^2}}{2r^2} > 1/2,$$

то есть $a_0 > \kappa/2$. Вспомним, что $p' = p/n \geqslant a_0 + \kappa$, то есть в рассматриваемом случае

$$p' > \frac{3}{2}\kappa.$$

Тогда в области максимизации $\mathcal{B}'$ есть точка $(m_1, m_2) = (\kappa/2, \kappa/2)$, которая гарантирует, что знаменатель оценки можно ограничить снизу числителем:

$$\max_{(m_1', m_2') \in \mathcal{B}'} c_1^{m_1'} c_{1-m_1'}^{m_2'} \geqslant c_1^{\kappa/2} c_{1-\kappa/2}^{\kappa/2},$$

поэтому итоговая оценка теоремы 4 не может быть лучше $(1+o(1))^{2\sqrt{d}}$ при всех $\kappa \in [0, 1/2]$ и $\sqrt{5/18} < r < 2/3$, что согласуется с полученными нами численными результатам.

5.1. Монотонность функции $u(a)$ из теорем 2 и 3

Покажем сначала, что функция $u(a)$, фигурирующая в формулировке теоремы 3, является монотонной при выполнении одного из двух условий: $\alpha = 0$ или $k_1' = k_{-1}'$. Напомним вид данной функции:

$$u(a) = \frac{(\alpha+1)^2 g_-'(k) + (\alpha-1)^2 g_+'(k) + \alpha^2 g_0'(k) + 2ka^{2k-1}(k_{-1}' + k_1')}{2(k_1' + k_{-1}')^{2k} + 4ka^{2k-1}(k_1' + k_{-1}') + (4k-2)a^{2k}},$$

где

$$g_0'(k) = 1 - (k_1' + k_{-1}')^{2k};$$
$$g_+'(k) = \frac{(k_1' + k_{-1}')^{2k} + (k_1' - k_{-1}')^{2k}}{2};$$
$$g_-'(k) = \frac{(k_1' + k_{-1}')^{2k} - (k_1' - k_{-1}')^{2k}}{2}.$$

Обозначим дополнительно

$$\kappa = k_1' + k_{-1}';$$
$$C(\alpha) = (\alpha+1)^2 g_-'(k) + (\alpha-1)^2 g_+'(k) + \alpha^2 g_0'(k).$$

В таких обозначениях функция u принимает более простой вид:

$$u(a) = \frac{C(\alpha) + 2ka^{2k-1}\kappa}{2\kappa^{2k} + 4k\kappa a^{2k-1} + (4k-2)a^{2k}}.$$

Путем элементарных вычислений можно найти производную данной функции:

$$u'(a) = -\frac{k(2k-1)a^{2k}(\kappa(C(\alpha) - \kappa^{2k}) + \kappa a^{2k} + C(\alpha)a}{2k\kappa a^{2k} + a\kappa^{2k} + (2k-1)a^{2k+1}}.$$

Для того чтобы проверить, что функция монотонно убывает, достаточно показать, что

$$\kappa(C(\alpha) - \kappa^{2k}) + \kappa a^{2k} + C(\alpha)a \geqslant 0,$$

а это в свою очередь будет следствием неравенства $C(\alpha) - \kappa^{2k} \geqslant 0$. Как нетрудно видеть, при $\alpha = 0$

$$C(\alpha) = g_-'(k) + g_+'(k) = (k_1' + k_{-1}')^2 k,$$

и утверждение доказано.

Пусть теперь $k_1' = k_{-1}'$. Найдем минимум $C(\alpha)$ по α. Данную функцию можно переписать в виде

$$C(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha(g_+(k) - g_-(k)) + g_+(k) - g_-(k).$$

Очевидно, при $\alpha = g_+(k) - g_-(k)$ данная функция достигает своего минимального значения:

$$C_{\min} = g_-(k) + g_+(k) - (g_+(k) - g_-(k))^2 = (k_1' + k_{-1}')^{2k} - (k_1' - k_{-1}')^{4k} = (k_1' + k_{-1}')^{2k} = \kappa^{2k}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $k_1 = k_{-1}$. Таким образом, при выполнении любого из условий $\alpha = 0$ или $k'_1 = k'_{-1}$ справедливо неравенство

$$C(\alpha) - \kappa^{2k} \geqslant 0,$$

которое показывает, что функция $u(a)$ монотонно убывает на отрезке $[0, 1]$.

Что же касается функции u в формулировке теоремы 2, то ее монотонность доказывается полностью аналогично рассмотренному случаю, поэтому соответствующие рассуждения мы не приводим.

Литература

1. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math. 1933. V. 20. P. 177–190.
2. *Boltyanski V.G., Martini H., Soltan P.S.* Excursions into combinatorial geometry. Berlin : Springer, Universitext. 1997.
3. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. Berlin : Springer, 2005.
4. *Grünbaum B.* Borsuk's problem and related questions // Proc. Sympos. Pure Math. 1963. V. 7. P. 271–284.
5. *Raigorodskii A.M.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. 2007. V. 347. P. 202–248.
6. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 107–146.
7. *Райгородский А.М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика». 2007. Т. 23. С. 147–164.
8. *Perkal J.* Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur // Colloq. Math. 1947. V. 1, N 1. P. 45.
9. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bulletin of the American Mathematical Society. 1993. V. 29, N 1. P. 60–62.
10. *Jenrich T., Brouwer A.E.* A 64-dimensional counterexample to Borsuk's conjecture // The Electronic Journal of Combinatorics. 2014. V. 21, N 4. P. 4–29.
11. *Райгородский А.М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54, № 2. С. 185–186.
12. *Schramm O.* Illuminating sets of constant width // Mathematika. 1988. V. 35, N 2. P. 180–189.
13. *Kupavskii A.B., Raigorodskii A.M.* Counterexamples to Borsuk's conjecture on spheres of small radii // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2012. V. 2, N 4. P. 27–48.
14. *Baker R.C., Harman G., Pintz J.* The difference between consecutive primes, II // Proceedings of the London Mathematical Society. 2001. V. 83, N 3. P. 532–562.
15. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. 1944. V. 4. P. 140–144.
16. *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368.
17. *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. Москва : МЦНМО, 2007.

References

1. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. Fundamenta Math. 1933. V. 20. P. 177–190.
2. *Boltyanski V.G., Martini H., Soltan P.S.* Excursions into combinatorial geometry. Berlin : Springer, Universitext. 1997.
3. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. Berlin : Springer, 2005.
4. *Grünbaum B.* Borsuk's problem and related questions. Proc. Sympos. Pure Math. 1963. V. 7. P. 271–284.
5. *Raigorodskii A.M.* Three lectures on the Borsuk partition problem. London Mathematical Society Lecture Note Series. 2007. V. 347. P. 202–248.
6. *Raigorodskii A.M.* Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces. Russian Mathematical Surveys. 2001. V. 56, N 1. P. 103–139. (in Russian).
7. *Raigorodskii A.M.* Around Borsuk's hypothesis. Itogi nauki i tekhniki. Series «Sovremennaya matematika». 2007. V. 23. P. 147–164 (in Russian).
8. *Perkal J.* Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur. Colloq. Math. 1947. V. 1, N 1. P. 45.
9. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture. Bulletin of the American Mathematical Society. 1993. V. 29, N 1. P. 60–62.
10. *Jenrich T., Brouwer A.E.* A 64-dimensional counterexample to Borsuk's conjecture. The Electronic Journal of Combinatorics. 2014. V. 21, N 4. P. 4–29.
11. *Raigorodskii A.M.* On a bound in Borsuk's problem. Russian Mathematical Surveys. 1999. V. 54, N 2. P. 453–454. (in Russian).
12. *Schramm O.*, Illuminating sets of constant width. Mathematika. 1988. V. 35, N 2. P. 180–189.
13. *Kupavskii A.B., Raigorodskii A.M.* Counterexamples to Borsuk's conjecture on spheres of small radii. Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2012. V. 2, N 4. P. 27–48.
14. *Baker R.C., Harman G., Pintz J.* The difference between consecutive primes, II. Proceedings of the London Mathematical Society. 2001. V. 83, N 3. P. 532–562.
15. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum. Portugaliae Math. 1944. V. 4. P. 140–144.
16. *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences. Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368.
17. *Raigorodskii A.M.* The linear-algebraic method in combinatorics. Moscow : MCCME, 2007. (in Russian).

Поступила в редакцию 09.10.2019