УДК 519.865.3

Н. П. Пильник[1,2], *И. П. Станкевич*[2]

[1]Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Многопродуктовая модельная декомпозиция компонент валового внутреннего продукта России

В статье предлагается методика многопродуктовой декомпозиции компонент ВВП по использованию, позволяющая использовать в макроэкономических моделях несколько разных индексов цен. Главной отличительной характеристикой предложенной декомпозиции является отсутствие привязки к экспорту или импорту, что решает проблему несовместности итоговой системы уравнений и снимает ограничения на поведение дефляторов экспорта и импорта. Приводится теоретическое обоснование процедуры, описывается методика расчёта на статистических данных и приводятся результаты работы процедуры декомпозиции на данных по компонентам ВВП России. Полученная двухпродуктовая декомпозиция представляет ценность не только как промежуточный этап при построении макроэкономических моделей, но и позволяет сделать ряд выводов о поведении макроэкономических агентов. В работе также предлагается способ декомпозиции изменения запасов, которые в силу особенностей природы этого показателя в моделях экономики обычно игнорируется.

Ключевые слова: экономика России, элементы ВВП по использованию, декомпозиция, потребление, инвестиции, запасы.

1. Введение

В данной статье исследуется вопрос о возможности декомпозиции валового внутреннего продукта (ВВП) для описания реального сектора экономики. С вопросами декомпозиции (она же – дезагрегирование) очень тесно связана проблема агрегирования. Агрегирование решает задачу, противоположную рассматриваемой в данной работе: не разлагает имеющиеся данные на более «мелкие» составляющие, а, напротив, собирает отдельные показатели в более крупные агрегаты. Из-за близости задач многие концепции и идеи могут быть использованы в обоих случаях, а в силу того, что разработка методов агрегирования началась раньше (применительно, прежде всего, к агрегированию потребительского спроса на отдельные товары) и литература на эту тему более обширна, целесообразным выглядит начать рассмотрение именно с работ, посвященных тематике агрегирования.

Для начала стоит сделать небольшое терминологическое замечание: под «агрегированием» в приложении к потребительскому спросу (а значимая часть работ посвящена именно этим вопросам) могут пониматься две различные процедуры. Первая – это агрегирование по индивидам. Здесь изучается возможность агрегирования спросов (либо функций полезности) отдельных индивидов в единый агрегированный спрос. Вторая, интересующая нас, – это агрегирование по товарам. Тут рассматривается вопрос возможности агрегирования отдельных товаров в более крупные группы с какими-то общими характеристиками. Несложно догадаться, что процедура дезагрегирования (декомпозиции) в таком случае – это разложение одного продукта на несколько групп с общими характеристиками.

2. Подходы к агрегированию и дезагрегированию

2.1. Иерархическая полезность

Одной из основополагающих концепций, позволяющих агрегировать (и дезагрегировать) показатели, является так называемая иерархическая (также называемая сепарабельной, separable, а дословно – «древовидной») полезность (utility tree). Разработка этого направления началась в середине прошлого века с ключевых работ Strotz [11] и [12] и Gorman [9]. В отличие от стандартной полезности: $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, где U – полезность агента, $q_1, \ldots, q_n$ – объёмы потребления отдельных товаров, иерархическая функция полезности, предложенная в [11], может быть записана следующим образом:

$$U = W(U_1(q_{1\,1}, q_{1\,2}, \ldots, q_{1\,n_1}), U_2(q_{2\,1}, q_{2\,2}, \ldots, q_{2\,n_2}), \ldots, U_k(q_{k\,1}, q_{k\,2}, \ldots, q_{k\,n_k})),$$

где $U_1, \ldots, U_k$ – полезности групп товаров.

То есть все товары разбиваются на группы (что важно, непересекающиеся и в совокупности образующие всё множество товаров) таким образом, что потребитель сначала оценивает полезность от группы и лишь затем из полезностей групп получает общую полезность. Интерес (особенно для вопросов агрегирования и дезагрегирования) представляет тот факт, что при выполнении определённых условий на вид такой функции полезности для принятия решений об объёме потребления групп достаточно информации лишь об индексах цен групп товаров.

Обзор работ, предлагающих разные формы функции полезности, удовлетворяющие рассмотренным требованиям, приводит, к примеру, Blundell [6]. Среди разных функциональных форм очень большое распространение получила форма иерархической полезности, основанная на CES-функции полезности – S-branch utility tree. В [7] она определяется следующим образом:

$$U = \left\{ \sum_{s=1}^{S} \alpha_s \left[\sum_{i \in s}^{n_s} \beta_{si} (q_{si} - \gamma_{si})^{\rho_s} \right]^{\rho/\rho_s} \right\}^{1/\rho}.$$

Параметры γ_{si} рассматриваются как минимально необходимые объёмы потребления товаров q_{si}, β и α – параметры. В такой функции полезности CES-функциями представлены как полезности групп, так и общая полезность. Эту схему можно экстраполировать и на большее число уровней, как это сделано в [10], чтобы получить функцию полезности с последовательно вложенными друг в друга группами.

Такая функция полезности часто используется при оценке потребительского спроса на практике (см, к примеру, [5] или [8] для многоуровневой функции).

2.2. Дезагрегирование

Многие приёмы, использующиеся для агрегирования данных (см., к примеру, [5] и [3]), можно использовать и для декомпозиции. Техника разложения ВВП, близкая предлагаемой в данной работе, представлена, к примеру, в [1] и [4]. Она основывается на предположении о том, что наблюдаемые показатели (компоненты ВВП) состоят из нескольких продуктов. В рассмотренных работах предлагается разложение на внутренний продукт, произведенный и потребленный на территории страны, экспортный (произведённый на территории страны для экспорта) и импортный. Тогда каждый из показателей основного макроэкономического баланса можно представить в форме $C(t) = X_C(t) + I_C(t)$, где $C(t)$ – объём потребления, $X_C(t)$ – объём производства внутреннего товара, связанного с потреблением, $I_C(t)$ – объём импорта, связанного с потреблением. Аналогичные соотношения можно представить для других компонент ОМБ. При этом суммарное (государственными расходами здесь пренебрегаем) внутреннее производство $X(t)$ и суммарный объём импорта $I(t)$: $X(t) = J_X(t) + C_X(t)$, $I(t) = J_I(t) + C_I(t)$. Вместе с тем внутреннее производство и компоненты потребления и инвестиций не наблюдаются в статистике.

Считаем, что величины C_X, C_I, J_X и J_I определяются с учётом предпочтений агентов, описываемых однородными функциями полезности:

$$C = g(C_I, C_X), J = h(J_I, J_X),$$

а производство описывается (также однородной) функцией $Y = f(X, E)$.

При этом выполнены финансовые балансы (для потребителя и аналогичные для инвестора и производителя):

$$p_c(t)g(C_I(t), C_X(t)) = p_I(t)C_I(t) + p_X(t)C_X(t),$$

где $p_C(t), p_I(t), p_X(t)$ – дефляторы потребления, импортного и внутреннего товаров соответственно.

Из рациональности агентов получаем соотношения:

$$\frac{\partial_1 g(C_I(t), C_X(t))}{\partial_2 g(C_I(t), C_X(t))} = \frac{p_I(t)}{p_X(t)}$$

и аналоги для инвестора и производителя.

На этапе калибровки модели предпочтения задаются CES-функциями, в условиях рациональности допускаются погрешности и параметры функций и значения ненаблюдаемых переменных находятся в процессе решения задачи минимизации суммы квадратов этих расхождений.

Такая декомпозиция имеет один значимый недостаток. При соблюдении простейшего баланса для разложения макроэкономических показателей на два продукта в номинальном выражении:

$$p_t^X X_t = p_t^A X_t^A + p_t^B X_t^B,\ X \in \{Y, C, G, J, Ex, Im\}$$

и того же баланса в реальном выражении:

$$X_t = X_t^A + X_t^B,\ X \in \{Y, C, G, J, Ex, Im\},$$

где X_t^A и X_t^B – объёмы продуктов A и B, относящихся к агрегату X_t, соответственно.

Оказывается, что каждый (наблюдаемый) дефлятор является средним взвешенным (с суммой весов, равной единице) дефляторов этих двух продуктов:

$$p_t^X = \frac{X_t^A}{X_t} p_t^A + \frac{X_t^B}{X_t} p_t^B,\ X \in \{Y, C, G, J, Ex, Im\}.$$

Следовательно, дефляторы всех показателей должны находиться между дефляторами этих двух продуктов во все моменты времени. Из-за привязки к импортному продукту при использовании такой декомпозиции получается, что все дефляторы (ВВП, потребления, государственных расходов и т.д.) должны лежать между дефлятором внутреннего продукта и наблюдаемым дефлятором импортного продукта. А значит, дефлятор импорта должен быть либо наименьшим, либо наибольшим из всех дефляторов на протяжении всего периода наблюдения. Но при рассмотрении реальных данных оказывается, что это требование не выполняется. Соответственно, простая декомпозиция на части ряда просто не будет работать (либо будет, но с очень низкой точностью), что обуславливает потребность в разработке метода, не требующего привязки к наблюдаемым дефляторам.

Предлагаемый в данной работе способ декомпозиции, хотя и является идейным продолжением описанного выше подхода, имеет ряд важных отличий. Во-первых, это отсутствие привязки к дефлятору импорта. Во-вторых, декомпозиция здесь будет проводиться на данных с устранённой сезонной компонентой. Наличие сезонности в данных, помимо прочих проблем, может привести к тому, что процедура оценивания будет подгонять сезонные пики в разных рядах (потому что именно пики будут вносить самый большой вклад в расхождения) друг к другу, тем самым смещая оценки коэффициентов. Удаление же сезонности устранит эту проблему и позволит повысить точность процедуры ещё и за счёт уменьшения разброса данных.

3. Процедура декомпозиции: теоретическое обоснование

Квазилинейная рационализация

Идея рационализации спроса состоит в том, чтобы считать, что для процессов $A = \{J, C, G, E\}$

$$\mathbf{x}_t^A \in \operatorname*{Argmax}_x\{U^A(x)| < \mathbf{p_t}, \mathbf{x} >\leqslant \tilde{\mathbf{A}}_\mathbf{t}\} \tag{1}$$

при некотором $U^A(\cdot) \in U$, $A \in \mathcal{C}$.

При этом хотелось бы, чтобы индекс объема соответствовал реальному объему, который мы либо наблюдаем, либо хотим реконструировать, потому что реальные объемы, в отличие от полезностей, складываются в балансах.

Потребуем, чтобы на траектории, т.е. при оптимальном потреблении (1),

$$U^A(\mathbf{x}_t) = k^A(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_0) \cdot A_t, A_t = \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{x}_t \rangle\,, \tag{2}$$

A_t – реальный объём использования.

Частный случай $k(\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_0) \equiv 1$ возможен, но требует функции полезности специального вида, причем эта полезность должна соизмерять не «штуки» благ, а их стоимости в базовых ценах.

Индекс-дефлятор

Из выражения максимальной полезности и условия оптимальности получаем, что $\mathbf{x}_t^A = k^A \cdot A_t \cdot \nabla\bar{U}^A(\mathbf{p})$. Умножая это равенство на базовые цены $\mathbf{p}_0$ и учитывая второе соотношение в (2), получаем, что $k^A(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \frac{1}{\langle \mathbf{p}_0, \nabla\bar{U}^A(\mathbf{p})\rangle}$, и окончательно:

$$\mathbf{x}_t = A_t \cdot \frac{\nabla\bar{U}^A(\mathbf{p}_t)}{\langle \mathbf{p}_0, \nabla\bar{U}^A(\mathbf{p}_t)\rangle}. \tag{3}$$

Для номинального объема покупки из (3):

$$\tilde{A}_t \langle \mathbf{p}_t, \mathbf{x}_t \rangle = \frac{A_t \langle \mathbf{p}_t, \nabla\bar{U}^A(\mathbf{p}_t)\rangle}{\langle \mathbf{p}_0, \nabla\bar{U}^A(\mathbf{p}_t)\rangle} = A_t \frac{\bar{U}^A(\mathbf{p}_t)}{\langle \mathbf{p}_0, \nabla\bar{U}^A(\mathbf{p}_t)\rangle}.$$

Поэтому получается, что агент покупает реальный продукт A_t по агрегированной цене

$$p_t^A = \frac{\bar{U}^A(\mathbf{p}_t)}{\langle \mathbf{p}_0, \nabla\bar{U}^A(\mathbf{p}_t)\rangle}, \tag{4}$$

которая называется **индекс-дефлятором** для данного агента, $A_t = p_t^A \cdot A_t$.

Как видно из (4), автоматически следует, что $p_0^A = 1$.

3.1. Агрегированные продукты

Группы благ (продукты)

Пусть список благ разбивается на множество N непересекающихся групп $\mathcal{G} = \sum\limits_{\nu\in N} \mathcal{G}^\nu$

Группу благ называем продуктом и отмечаем греческим индексом. Так, например, реальный объём производства продукта ν обозначаем: $X_t(\nu) = \langle \mathbf{p}_0(\nu), \mathbf{x}_t^X(\nu)\rangle$, номинальный: $\tilde{X}_t(\nu) = \langle \mathbf{p}(\nu), \mathbf{x}_t^X(\nu)\rangle$, дефлятор: $\tilde{X}_t(\nu) = p_t^X(\nu) \cdot X_t(\nu)$.

Для краткости используем обозначения: $\mathbf{x}_t^A(\mathcal{G}^\nu) = \mathbf{x}_t^A(\nu), \mathbf{p}(\mathcal{G}^\nu) = \mathbf{p}(\nu)$.

Для этих величин выполнены балансы:

$$Y_t(\nu) + I_t(\nu) = C_t(\nu) + G_t(\nu) + J_t(\nu) + E_t(\nu),$$

$$p_t^Y(\nu)\cdot Y_t(\nu)+p_t^I(\nu)\cdot I_t(\nu)=p_t^C(\nu)\cdot C_t(\nu)++p_t^G(\nu)\cdot G_t(\nu)+p_t^J(\nu)\cdot J_t(\nu)+p_t^E(\nu)\cdot E_t(\nu)$$

и можно показать, что выполняются соотношения:

$$A_t=\sum_{\nu\in N}A_t(\nu),\quad p_tA_t=\sum_{\nu\in N}p_t(\nu)A_t(\nu),\quad A\in\{X,V,J,C,G,E,I\}.$$

Иерархическая полезность

Предположим, что функция полезности всей совокупности благ зависит от однородных полезностей отдельных продуктов:

$$U(\mathbf{x})=W(\{\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x}(\nu))\}_{\nu\in N}),\mathbf{u}_\nu(\cdot),\,W(\cdot)\in U. \tag{5}$$

Каждая из полезностей отдельных продуктов – со своими аргументами. Тогда для определенного класса функций полезности можно получить, что

$$\partial_\nu W(\mathbf{u}_N)\nabla\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x}^U(\nu))=\frac{\mathbf{p}(\nu)}{\bar U(\mathbf{p})}. \tag{6}$$

Здесь и ниже жирной буквой с индексом N вверху или внизу обозначается вектор размерности $|N|$.

Можно показать, что сопряженная к функции полезности всей совокупности благ может быть представлена как сопряженная функция от сопряженных функций полезности отдельных продуктов, то есть

$$\bar U(\mathbf{p})=\bar W(\bar{\mathbf{u}}_N)=\bar W\left(\{\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}(\nu))\}_{\nu\in N}\right). \tag{7}$$

Тогда при иерархической полезности (5):

$$\nabla W(\mathbf{u}_N)=\frac{\bar{\mathbf{u}}_N}{\bar W(\bar{\mathbf{u}}_N)},\nabla\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x}^U(\nu))=\frac{\mathbf{p}(\nu)}{\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}(\nu))}. \tag{8}$$

При этом если есть бюджетное ограничение $\tilde U=\left\langle\mathbf{p},\mathbf{x}^U\right\rangle$, то по теореме Эйлера из (8) получаем $\left\langle\mathbf{p}(\nu),\mathbf{x}^U(\nu)\right\rangle=\bar{\mathbf{u}}_\nu\cdot\mathbf{u}_\nu$. Соотношение (8) означает, что агент-потребитель с иерархической полезностью определяет объемы продуктов $\mathbf{u}_N$, исходя из их индексов цен $\bar{\mathbf{u}}_N$, а затем, исходя из цен $\mathbf{p}(\nu)$, определяет покупки отдельных благ в продукте.

В силу теоремы о максимуме однородной трансферабельной полезности соотношения из (8) эквивалентны соотношениям:

$$\frac{\mathbf{u}_\nu}{W(\mathbf{u}_N)}=\partial_\nu\bar W(\bar{\mathbf{u}}_N),\frac{\mathbf{x}^U(\nu)}{\mathbf{u}_N(\mathbf{x}^U(\nu))}=\nabla\bar{\mathbf{u}}_N(\mathbf{p}(\nu)). \tag{9}$$

Индекс-дефляторы и реальные объемы продуктов

Применяя выражения для индекс-дефляторов к агентам-потребителям, предполагая, что каждый из них имеет свою иерархическую полезность:

$$U^A(\mathbf{x})=W^A\left(\{\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x}(\nu))\}_{\nu\in N}\right),\quad A\in\mathcal{C}.$$

Можем получить спрос на реальные объёмы продуктов:

$$A_t(\nu)=\frac{A_t}{\sum\limits_{\mu\in N}\frac{\bar{\mathbf{u}}_\mu\cdot\partial_\mu\bar W^A(\bar{\mathbf{u}}_N)}{p_t(\mu)}}\frac{\bar{\mathbf{u}}_\nu\cdot\partial_\nu\bar W^A(\bar{\mathbf{u}}_N)}{p_t(\nu)}, \tag{10}$$

где $\bar{\mathbf{u}}_\nu=\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu))$.

3.2. Замыкание системы индекс-дефляторов на мезоуровне

Постановка

Хотелось бы, чтобы спрос (10) зависел бы только от дефляторов, а не от мелких цен. Для этого достаточно, чтобы $\bar{\mathbf{u}}_\nu = \bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu))$ зависели только от дефляторов. Но поскольку $\bar{\mathbf{u}}_\nu$ зависит только от своих цен, она может зависеть только от своего дефлятора:

$$p_t(\nu) = \frac{\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu))}{\langle \mathbf{p}_0(\nu), \nabla\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu))\rangle}, \bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu)) \equiv f(p_t(\nu))\forall \mathbf{p}_t(\nu). \tag{11}$$

Условие на сопряженную полезность

Поскольку $\bar{\mathbf{u}}_\nu(\cdot)$ однородна и дефлятор (11) тоже однороден, заменяя во втором уравнении (11) $\mathbf{p}_t(\nu)$ на $\alpha\cdot\mathbf{p}_t(\nu)$, получаем $\alpha\cdot\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu)) \equiv f(\alpha\cdot p_t(\nu))$. Подставляя сюда выражение для $\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu))$ из (11), получим $\alpha \cdot f(p_t(\nu)) \equiv f(\alpha \cdot p_t(\nu))$. Но однородная функция одной переменной $p_t(\nu)$ может быть только линейной: $\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu)) \equiv \kappa_\nu(\mathbf{p}_0(\nu)) \cdot p_t(\nu)$.

Тогда $\langle \mathbf{p}_0(\nu), \nabla\bar{\mathbf{u}}_\nu(\mathbf{p}_t(\nu))\rangle = \kappa_\nu(\mathbf{p}_0(\nu))$.

При выполнения этого уравнения из (10)

$$A_t(\nu) = A_t \cdot \frac{\kappa_\nu(\mathbf{p}_0(\nu)) \cdot \partial_\nu \bar{W}\left(\{\kappa_\lambda(\mathbf{p}_0(\lambda)) \cdot p_t(\lambda)\}_{\lambda\in\mathrm{N}}\right)}{\sum\limits_{\mu\in N} \kappa_\mu(\mathbf{p}_0(\mu)) \cdot \partial_\mu \bar{W}\left(\{\kappa_\lambda(\mathbf{p}_0(\lambda)) \cdot p_t(\lambda)\}_{\lambda\in N}\cdot\right)} \tag{12}$$

3.3. Независимость полезности от базовых цен

Зависимость полезности от базовых цен с теоретической точки зрения выглядит неестественно, а с практической – делает невозможным переход в модели к другим базовым ценам. Единственную возможность выполнения необходимых соотношений для не зависящей от параметров $\mathbf{p}_0(\nu)$ функции $\bar{\mathbf{u}}_\nu(\cdot)$ при смене значений этих параметров представляет линейная функция $\bar{\mathbf{u}}_\nu(\cdot)$.

В итоге можно показать, что спрос на реальные объемы продуктов имеет вид

$$A_t(\nu) = A_t \frac{\langle \mathbf{p}_0(\nu), \mathbf{b}(\nu)\rangle \cdot \partial_\nu \bar{W}^A\left(\{\langle \mathbf{p}(\lambda), \mathbf{b}(\lambda)\rangle\}_{\lambda\in N}\right)}{\sum\limits_{\mu\in N} \langle \mathbf{p}_0(\mu), \mathbf{b}(\mu\rangle \cdot \partial_\mu \bar{W}^A\left(\{\langle \mathbf{p}(\lambda), \mathbf{b}(\lambda)\rangle\}_{\lambda\in N}\right)}. \tag{13}$$

4. Техника оценки декомпозиции на статистических данных

Соотношение (13) является ключевым для проведения декомпозиции на практике. Оно позволяет, задав вид функции полезности W^A (а следовательно, и сопряжённой функции $\bar{W}^A$, потому что они должны принадлежать одному классу), получить в явном виде формулу для расчёта (ненаблюдаемых) продуктов для всех компонент ВВП. Положим, мы имеем ряд данных длины T и стандартное разложение валового внутреннего продукта по использованию на потребление, инвестиции (валовое накопление), государственные расходы, экспорт и импорт в постоянных и текущих ценах и их дефляторы. Тогда рассматривая множество (макро)продуктов N: для каждого момента времени t, для каждого ряда $A \in \{C, J, G, E, I\}$[1] мы имеем следующие соотношения:

$$A_t(\nu) = A_t \frac{k_\nu^A(\mathbf{p}_0) \cdot \partial_\nu \bar{W}^A\left(\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_N\right)}{\sum\limits_{\mu\in N} k_\mu^A(\mathbf{p}_0) \cdot \partial_\mu \bar{W}^A\left(\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_N\right)},\ \nu \in N, \tag{14}$$

$$p_t^A A_t = \sum_{\nu\in N} p_t(\nu) A_t(\nu)\,. \tag{15}$$

[1]Мы пренебрегаем промежуточным потреблением, потому что оно составляет практически постоянную пропорцию в ВВП, в связи с чем большого смысла моделировать его отдельно нет.

Соотношение (14) – это просто адаптированная для удобства вычислений версия (13). $k^A_\nu(\mathbf{p}_0)$ здесь – константа, меняющаяся только при смене базового года (корректирующаяся на отношение дефляторов нового базового года и старого). Стоит сразу заметить, что если рассматривать цены $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_N$ как дефляторы, то при смене базового года они будут пересчитываться. Тогда в функции полезности их также придётся корректировать, чтобы избежать влияния смены базового года на результаты разложения.

Соотношение (15) – баланс в текущих ценах. Можно также заметить, что выполнение аналогичного ему баланса в постоянных ценах: $A_t = \sum\limits_{\nu \in N} A_t(\nu)$ автоматически следует из (14), что доказывается простым суммированием по ν.

Таким образом, мы получаем $|N|+1$ уравнений для каждого из 5 рядов, то есть в общей сложности для каждого момента времени мы имеем $5(|N|+1)$ уравнений на $6|N|$ неизвестных ($|N|$неизвестных цен и 5 раз по $|N|$ неизвестных компонент разложения каждого из показателей). Дополнительно к неизвестным следует добавить параметры функций полезности, но их количество зависит от вида выбранной функции полезности и не зависит от длины ряда (поэтому даже если в каждый момент времени будет оставаться только одна степень свободы, их идентификация возможна при использовании достаточно длинного ряда данных). Чтобы сохранить возможность получения оценок, необходимо, чтобы уравнений было не меньше, чем неизвестных, то есть $5(|N|+1) > 6|N|$, следовательно, $|N| < 5$ (строгое равенство в каждый момент времени нужно для того, чтобы оставить хотя бы одну степень свободы на оценку параметров функций полезности).

Другой вопрос связан с тем, что в большинстве случаев уравнений будет больше, чем неизвестных, соответственно, точное выполнение всей системы будет невозможно и где-то придётся вводить невязки (и находить неизвестные в процессе минимизации этих невязок). В данной работе предлагается сохранить строгое равенство в условиях (15), но допустить расхождения в части условий (14). Тому есть несколько причин. Во-первых, (15) – это баланс в текущих ценах, и пускай даже мы не можем его наблюдать, именно балансы в текущих ценах, как правило, выполняются точнее всего, потому что только их возможно явно и прямым образом посчитать (тогда как балансы в постоянных ценах считаются пересчётом показателей в текущих ценах в показатели в постоянных ценах при помощи дефляторов, процедура подсчёта которых также вызывает вопросы, равно как и точность полученных таким образом соотношений). Во-вторых, (14) – это условия рациональности, в сумме дающие баланс в постоянных ценах, и расхождения в обоих показателях выглядят достаточно разумно. Агенты могут допускать небольшие отклонения от рационального поведения в силу несовершенства информации и экономических механизмов, а баланс в постоянных ценах, как уже было сказано выше, – показатель достаточно синтетический и потенциально подверженный значительным ошибкам при вычислении.

Последний вопрос, который стоит решить перед переходом непосредственно к оценке – это выбор вида функции полезности. В данной работе был использован, пожалуй, самый популярный и удобный вариант: CES-функция полезности. Для удобства лучше сразу начинать работать с сопряженной ей функцией от цен, которая тоже будет CES, и сразу оценивать её коэффициенты.

5. Двухпродуктовая декомпозиция

В данной работе рассматривается двухпродуктовая (продукты будем называть a и b) декомпозиция основного макроэкономического баланса. Для каждой из пяти составляющих ВВП в разложении по использованию вводятся два условия рациональности соответствующих агентов (либо, что эквивалентно, условие рациональности и баланс в постоянных ценах) и баланс в текущих ценах. Сопряженная функция полезности в данном случае имеет вид

$$\bar{W}(p_a, p_b) = \left(\alpha p_a^\rho + (1-\alpha) p_b^\rho\right)^{1/\rho}, \tag{16}$$

где p_a и p_b – цены товаров a и b, α и ρ – параметры.

Тогда частные производные по ценам p_a и p_b:

$$\partial_a \bar{W} = \alpha p_a^{\rho-1} \left(\alpha p_a^\rho + (1-\alpha) p_b^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}, \partial_b \bar{W} = (1-\alpha) p_b^{\rho-1} \left(\alpha p_a^\rho + (1-\alpha) p_b^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}.$$

Отсюда можно в явном виде получить выражение для компонент A_a и A_b разложения ряда $A \in \{C, J, G, E, I\}$:

$$A_a = A \frac{k_a^A \alpha_A p_a^{\rho_A - 1}}{k_a^A \alpha_A p_a^{\rho_A - 1} + k_b^A (1-\alpha_A) p_b^{\rho_A - 1}}, A_b = A \frac{k_b^A (1-\alpha_A) p_b^{\rho_A - 1}}{k_a^A \alpha_A p_a^{\rho_A - 1} + k_b^A (1-\alpha_A) p_b^{\rho_A - 1}}, \tag{17}$$

A_a будем вычислять из этих условий, но вместо второго соотношения будем использовать баланс в текущих ценах (в противном случае при вычислении A_b из условий рациональности будет сходиться только баланс в постоянных ценах): $A_b = \frac{p_A A - p_a A_a}{p_b}$. Получив прямым вычислением ряды A_a и A_b, можем вычислить баланс в постоянных ценах. Будем считать его выполненным с погрешностью $A(1+\varepsilon_A) = A_a + A_b$, $\varepsilon_A = \frac{A_a + A_b - A}{A}$. При идеальном выполнении этого баланса ошибка $\varepsilon_A = 0$. Таким образом, мы получаем 5 ошибок (по одной для каждой компоненты ВВП). Все они пронормированы на величину соответствующего им показателя, поэтому сопоставимы друг с другом. Неизвестные в задаче (два ряда цен и пять набор параметров функции полезности) хотелось бы, что ожидаемо, выбрать так, чтобы ошибки были минимальны. В качестве критерия будем использовать сумму квадратов ошибок. Тогда задача принимает вид

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{A \in \{C,J,G,E,I\}} \varepsilon_A(t)^2 \to \min_{p_a(t), p_b(t), \alpha_A, \rho_A, t=1,\ldots,T, A \in \{C,J,G,E,I\}}.$$

5.1. Использованные данные

При оценке использовались официальные данные Федеральной службы государственной статистики. Были взяты квартальные данные по валовому внутреннему продукту и его компонентам из разложения по использованию за период с 2001 года по III квартал 2013 года (более ранние наблюдения не включены в целях сохранения большей однородности данных): расходы на конечное потребление домашних хозяйств (переменная C, потребление), расходы на конечное потребление государственного управления (переменная G, госрасходы), валовое накопление основного капитала (переменная J, инвестиции), экспорт, импорт.

Использовались ряды в текущих ценах, постоянных ценах 2008 года и их дефляторы.

Все показатели сглаживались при помощи процедуры удаления сезонности, инвариантной к операции дефлирования[2].

5.2. Результаты декомпозиции

К сожалению, в связи с высокой сложностью поставленной задачи, невозможно найти оценки неизвестных переменных в общем виде, и решение находилось численно. Несмотря на это, при правильном подборе начальных значений параметров удаётся достаточно быстро найти решение, которое к тому же остаётся достаточно устойчивым к изменениям начальных условий в разумных пределах (при сильном изменении начальных условий, к сожалению, процедура находит другие локальные минимумы). При этом полученные результаты выглядят очень правдоподобно и дают неплохую пищу для размышлений.

[2] Пильник Н.П., Поспелов И.Г., Станкевич И.П. Об использовании фиктивных переменных для решения проблемы сезонности в моделях общего экономического равновесия // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2015 (в печати).

Ещё один приём, использованный при получении оценок, заключается в пересчёте всех данных к базовым ценам года, находящегося за пределами интервала наблюдения (в нашем случае – к ценам 2000 года), с последующим возвращением к старым (2008 года) ценам. Нюанс в том, что, когда базовый год находится внутри интервала наблюдения, все дефляторы пересекаются в одной точке (в базовом году они все должны быть равны 1), из-за чего система балансов в текущих ценах для этой точки приобретает вид

$$\frac{A_a}{A}p_a + \frac{A_b}{A}p_b = 1, \quad A \in \{C, J, G, E, I\}$$

И в случае, если все $\frac{A_a}{A}$ и все $\frac{A_b}{A}$ не равны друг другу (а считать их равными нет никаких оснований), система не имеет решений. Благодаря тому, что на квартальных данных идеальное совпадение всех дефляторов с 1 не наблюдается (оно должно соблюдаться в среднем за год), какое-то решение найти можно, но оно может оказаться очень неустойчивым. Перенос базового года за пределы интервала наблюдения устраняет эту проблему. Возврат же к старым базовым ценам, как было указано выше, не представляет значительной сложности: и процедура декомпозиции, и использованные данные (сглаженные инвариантным к дефлированию алгоритмом) это позволяют.

На рис. 1–3 приводится динамика реальных и смоделированных рядов для некоторых компонент ВВП.

Смоделированные данные получались путём суммирования оцененных по формулам (17) рядов продуктов a и b для каждой из компонент ВВП. Как видно, точность воспроизведения статистики крайне высока. Расхождения (и те очень небольшие) можно заметить только на графике госрасходов. Получившиеся цены продуктов p_a и p_b представлены на графике рис. 4.

Любопытно посмотреть и на оцененные коэффициенты функций полезности, приведенные в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Оценки коэффициентов функций полезности

	C	J	G	E	I
α	0.286	0.267	0.153	0.602	0.491
ρ	0.017	0.000	0.000	0.258	0.004

Можно, к примеру, заметить, что две функции из пяти – для инвестиций и государственных расходов – свелись, по сути, к функциям Кобба–Дугласа (в пределе при ρ стремящимся к 0^3 CES-функция сходится к функции Кобба–Дугласа). При этом исключительно «внутренние» функции (потребление, инвестиции и госрасходы) достаточно сильно похожи друг на друга, импорт похож по функциональной форме, но по-другому взвешивает два товара, а экспорт отличается и по функциональной форме, и по взвешиванию. Можно предположить, что механизм экспорта (продажи продукта) отличается от механизмов, связанных с его использованием, что выглядит достаточно разумно. Отличия в значениях α для «внутренних» и «внешних» функций можно объяснить разной структурой потребления продуктов внутри страны и международной торговли.

Собственно результаты разложения (ряды каждого из продуктов) в текущих ценах (которые мы рассматриваем как более точные) для некоторых компонент ВВП приведены на рис. 5–7.

В большинстве рядов доминирует «быстрый» продукт b, «медленный» a преобладает только в импорте (и в отдельные моменты времени – в экспорте), что вполне вписывается в приведенные выше рассуждения о разной природе «внутренних» показателей и «внешних» экспорта и импорта, различается и поведение продуктов для разных рядов.

[3]Стоит также заметить, что, конечно же, коэффициенты не получились строго равными нулю (иначе возникли бы проблемы со сходимостью процедуры оценивания), но оказались к нему настолько близкими, что при округлении разница оказалась незаметна.

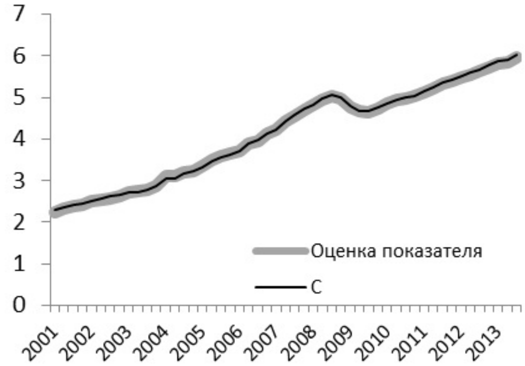

Рис. 1. Динамика реального и смоделированного потребления, трлн руб.

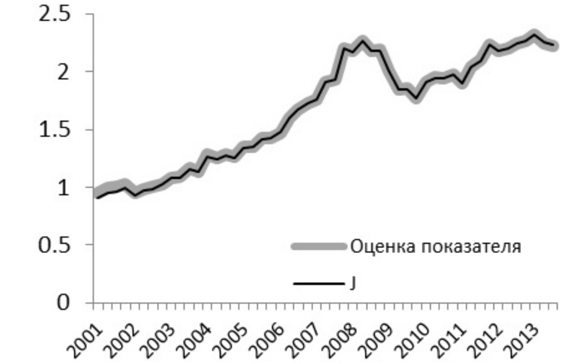

Рис. 2. Динамика реальных и смоделированных инвестиций, трлн руб.

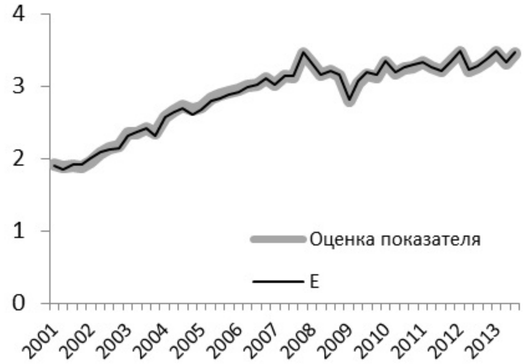

Рис. 3. Динамика реального и смоделированного экспорта, трлн руб.

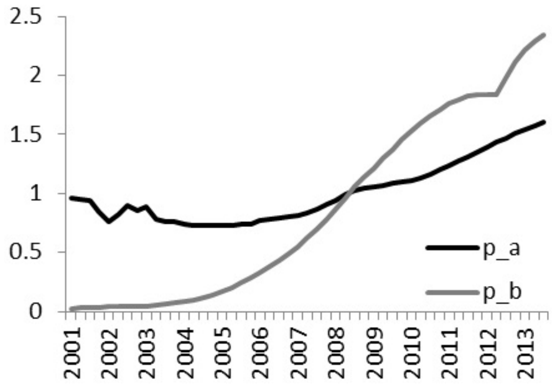

Рис. 4. Цены модельных продуктов

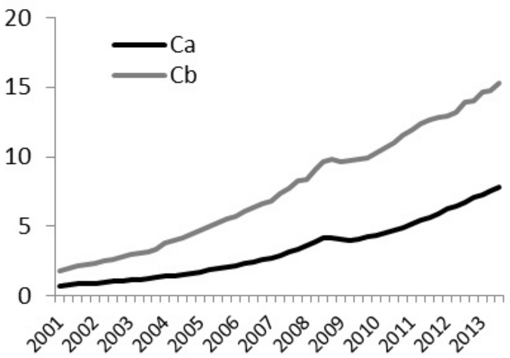

Рис. 5. Динамика компонент потребления, трлн руб. в текущих ценах

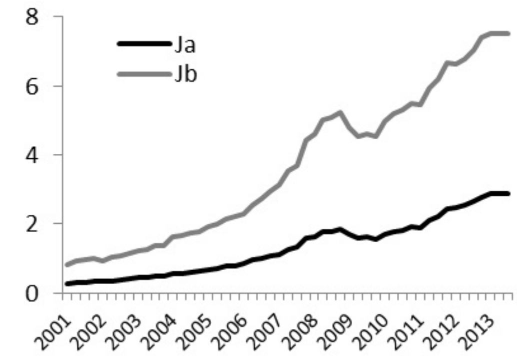

Рис. 6. Динамика компонент инвестиций, трлн руб. в текущих ценах

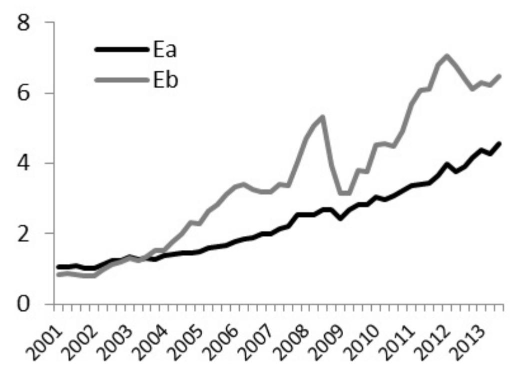

Рис. 7. Динамика компонент экспорта, трлн руб. в текущих ценах

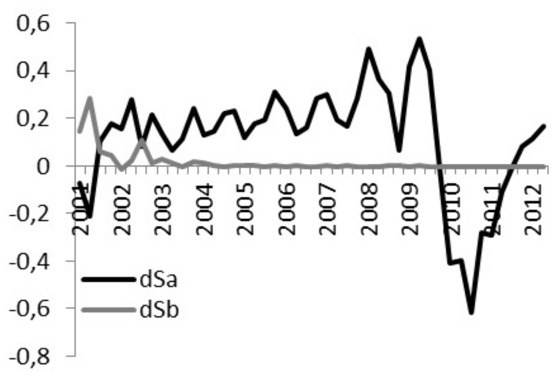

Рис. 8. Динамика компонент изменения запасов, трлн руб.

5.3. Учет изменения запасов

Ещё один важный и интересный вопрос представляет декомпозиция изменения запасов в рамках предложенной схемы. Использовать ту же логику, что и при декомпозиции других рядов, здесь не получится в силу того, что и сама величина имеет другую природу (не поток, а изменение запаса), и сложнее представить, что это результат максимизации функции полезности каким-то агентом. Поэтому будет выводить его из других соображений. Пусть для разложения изменения запасов на два продукта одновременно выполнены балансы в текущих и постоянных ценах:

$$dS_a p_a + dS_b p_b = pdS, dS_a + dS_b = dS,$$

где pdS и dS – ряды изменения запасов в текущих и постоянных ценах соответственно (оба есть в статистике), а dS_a и dS_b – компоненты изменения запасов.

Если оба соотношения выполнены и цены p_a и p_b известны (а мы уже нашли их в процессе декомпозиции других рядов), мы получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Из неё несложно выразить компоненты изменения запасов: $dS_b = \frac{pdS - dSp_a}{p_b - p_a}, dS_a = \frac{dSp_b - pdS}{p_b - p_a}$. В результате можно получить разложение изменения запасов, представленное на рис. 8.

Внимание привлекает, прежде всего, тот факт, что достаточно быстро всё изменение запасов начинает происходить за счёт единственного продукта – «медленного». Это неслучайно как с чисто технической точки зрения (достаточно внимательно посмотреть на формулы для расчета dS_b и dS_a), так и с содержательной: нет большого смысла запасать быстро теряющий свою цену товар.

Декомпозиция изменения запасов – важный результат, потому что в рамках предыдущих версий этой процедуры возникали сложности с учётом этого показателя.

6. Заключение

В данной работе представлена процедура, позволяющая проводить многопродуктовую декомпозицию реальных данных без привязки к экспортному и импортному продуктам.

Рассматривается модельная декомпозиция компонент ВВП России. На основе приведенных теоретических выкладок описывается и проводится на реальных данных процедура, позволяющая разделить данные на несколько компонент (подробно рассматривается случай двухпродуктовой декомпозиции, в приложении рассматривается трёхпродуктовая и показывается отсутствие необходимости вводить третий продукт). Приведенная в работе методика декомпозиции данных позволяет снять привязку к импорту и экспорту, свойственную предыдущим работам в этой области, что приводит к значительному росту точности модели: реальные данные воспроизводятся практически идеально.

Помимо этого, рассматривается способ декомпозиции изменения запасов (применимый только к двухпродуктовому случаю, что, как уже упоминалось, не является серьезным ограничением).

Полученные результаты имеют ценность не только как промежуточный этап на пути к построению макроэкономических моделей, но и сами по себе как инструмент анализа реального сектора экономики.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00432).

Литература

1. *Вржещ В.П., Поспелов И.Г., Хохлов М.А.* Модельное дезагрегирование макроэкономической статистики // Экономический журнал Высшей школы экономики. — 2010. — Т. 14, № 1. С. 88–104.

2. *Шананин А.А.* Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса. — М. : ВЦ АН СССР, 1986.
3. *Петров А.А., Шананин А.А.* Системный анализ экономики: проблема агрегированного описания экономических отношений / Математическое моделирование. Методы описания и исследования сложных систем. — М. : Наука, 1989.
4. *Andreyev M.Yu., Vrzheshch V.P., Pilnik N.P., Pospelov I.G., Khokhlov M.A., Jukova A.A., Radionov S.A.* Intertemporal General Equilibrium Model of the Russian Economy Based on National Accounts Deaggregation // Journal of Mathematical Sciences,. — 2014. — V. 197, N 2.
5. *Blackorby C., Boyce R., Russell R.R.* Estimation of demand systems generated by the Gorman polar form; a generalization of the s-branch utility tree // Econometrica: Journal of the Econometric Society. — 1978. — P. 345–363.
6. *Blundell R.* Consumer behaviour: Theory and empirical evidence — A survey // The Economic Journal. — 1988. — P. 16–65.
7. *Brown M., Heien D.* The S-branch utility tree: A generalization of the linear expenditure system // Econometrica. — 1972. — V. 40, N 4. — P. 737–747.
8. *Edgerton D.L.* Weak separability and the estimation of elasticities in multistage demand systems // American Journal of Agricultural Economics. — 1997. — V. 79, N 1. — P. 62–79.
9. *Gorman W.M.* Separable Utility and Aggregation // Econometrica. — 1959. — V. 27, N 3. — P. 469–481.
10. *Keller W.J.* A nested CES-type utility function and its demand and price-index functions // European Economic Review. — 1976. — V. 7, N 2. — P. 175–186.
11. *Strotz R.H.* The Empirical Implications of a Utility Tree // Econometrica. — 1957. — V. 25, N 2. — P. 269–280.
12. *Strotz R.H.* The Utility Tree-A Correction and Further Appraisal // Econometrica. — 1959. — V. 27, N 3. — P. 482–488.

Поступила в редакцию 15.12.2014.