УДК 533.6.011

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа

На основе анализа полных уравнений Эйлера исследуются плоские безвихревые течения идеального совершенного газа. Предлагается признак наличия точки торможения в установившемся потоке.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, дозвуковой принцип максимума, признак точки торможения.

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Sign of the presence of braking points in a planar irrotational flow of an ideal gas

Based on the analysis of the full Euler equations, the planar irrotational flow of an ideal gas is investigated. A sign of the presence of braking points in a steady flow is proposed.

Key words: Euler equations, the maximum principle subsonic, a sign of braking points.

1. Введение

В случае, когда в энергетической установке смешение струй подогретого газообразного топлива и окислителя происходит не в камере сгорания, а в отдельном устройстве, необходимо обеспечить такие условия, при которых в нем смесь не будет воспламеняться и, тем не менее, не будет терять способность к возгоранию. При столкновении струй газа и при последующем течении смеси по каналам наличие зон низкой скорости, в которых достигается высокая температура, может приводить к развитию нежелательных химических процессов, в том числе к неконтролируемому самовозгоранию. Таким образом, в ряде аэродинамических устройств наличие зон с низкой скоростью может представлять потенциальную опасность. Поэтому в программу испытаний энергоустановок должна быть включена проверка на наличие таких зон. При этом измерения скорости во всей области течения дают избыточную информацию, поскольку при решении этой узкой проблемы неважно, где находится зона с низкой скоростью, а важно лишь знать, есть ли она в потоке. В данной работе, на основе анализа полных уравнений Эйлера, предложено достаточное условие (признак) присутствия точки торможения. Этот признак позволяет значительно сократить количество точек, в которых необходимо измерить скорость, чтобы утверждать о присутствии точки торможения в случае, если она есть в зоне течения. Пусть, например, измерения показали, что на границе течения число Маха лежит в пределах $0.8 \leqslant \mathrm{M} \leqslant 1.5$. До настоящей работы было ясно, что если внутри течения есть точка торможения $\mathrm{M} = 0$, то, в силу непрерывности, точка с промежуточным значением, например $\mathrm{M} \approx 0.55$, будет обнаружена в одном из измерений во внутренней точке. Но оказывается, и в этом состоит суть предлагаемого признака, что наличие хотя бы одной точки, значение числа Маха в которой меньше единицы и меньше минимума на границе (в рассматриваемом примере $0.55 < 0.8$), означает присутствие точки торможения $\mathrm{M} = 0$. Это позволяет остановить измерения сразу после обнаружения точки $\mathrm{M} \approx 0.55$ и утверждать о присутствии точки торможения.

2.

Предложенный в данной работе признак основан на неизвестном ранее принципе минимума дозвуковых течений идеального газа. Согласно этому принципу в дозвуковом течении без точек торможения число Маха достигает минимума на границе течения. (Полная формулировка приведена ниже.) До настоящей работы был известен только дозвуковой ($\mathrm{M} < 0$)принцип максимума, доказательство которого можно найти в [1, гл. II]. Согласно этому принципу, если модуль скорости не постоянен, то его максимум достигается на границе и только на границе дозвукового течения. Для течений со звуковыми точками ($\mathrm{M} \leqslant 0$) дозвуковой принцип максимума не выполняется. Его место занимает так называемое «свойство прямолинейности» звуковых линий [2]. Это свойство использовалось, например, на этапе проектирования аэродинамических конструкций [2], что говорит о полезности исследования экстремальных свойств течений.

Нередко свойства максимума и свойства минимума различны. Например, эти свойства различны у функции Бернулли в (вихревом) течении вязкой несжимаемой жидкости. В работе [3], показано, что функция Бернулли может достигать максимума только на границе, и был приведен пример достижения минимума во внутренней точке такого течения.

Поясним, в чем с математической точки зрения состоит причина такого различия для течений газа. Дозвуковой ($M < 0$) принцип максимума впервые опубликован в [4]. Доказательство, как и в [1], основано на применении теоремы Хопфа [5, 6] для компонент скорости течения, описываемого уравнениями Эйлера. Эта теорема предлагает различные варианты принципа максимума для решений квазилинейных уравнений эллиптического типа в зависимости от свойств коэффициентов этих уравнений. В результате получается, что компоненты скорости достигают как своего максимума, так и своего минимума на границе и только на границе дозвукового течения. Из этого легко следует упомянутый выше принцип максимума модуля скорости. Однако относительно минимума модуля скорости из этого никаких выводов сделать нельзя. Это не случайно. Действительно, уравнение для модуля скорости V в прямоугольной декартовой системе координат (O, x_1, x_2) может быть записано в виде

$$\sum_{i,m=1}^{2} c_{i,m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_m} + \sum_{i=1}^{2} d_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = b,$$

где $c_{i,m}$ — компоненты матрицы положительно определенной (в дозвуковых областях) квадратичной формы, а коэффициенты d_i и $b \geqslant 0$ ограничены. Это неоднородное уравнение. Неравенство $b \geqslant 0$, согласно теореме Хопфа, обеспечивает справедливость вывода о месте точек достижения максимума (на границе). С другой стороны, это же неравенство не позволяет применить теорему Хопфа для вывода о точках минимума. И это же неравенство не позволяет применить широко распространенный прием получения противоречия при линеаризации в предполагаемой точке минимума.

В данной работе также применена теорема Хопфа, причем к впервые полученному для модуля скорости однородному уравнению эллиптического типа. Однородность уравнения обеспечивает «полноценный» принцип, в котором речь идет и о максимуме и о минимуме. Для формирования однородного уравнения была использована криволинейная система естественных координат.

Ниже все рассматриваемые функции и линии считаются достаточно гладкими для обоснованности выкладок и рассуждений.

3.

Рассмотрим плоское стационарное безвихревое изоэнтропическое течение идеального совершенного газа в отсутствие внешних сил. Обозначим: $\mathbf{V}$ — скорость, ρ — плотность, k — показатель адиабаты, $p = C_0\rho^k$ — давление (величина $C_0 > 0$ постоянна во всем потоке). Движение газа описывается уравнениями Эйлера [7]:

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0.$$

Если записать первое их этих уравнений в форме Громеки–Ламба [7]:

$$[\mathbf{rot V} \times \mathbf{V}] = -\nabla \left(\frac{k}{k-1} C_0 \rho^{k-1} + \frac{V^2}{2} \right), \quad V^2 = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}),$$

то, поскольку $\mathbf{rot V} = 0$, получается известное свойство — полная энтальпия $h_0 = \frac{k}{k-1} C_0 \rho^{k-1} + \frac{V^2}{2} > 0$ постоянна во всем поле течения.

Рассмотрим замкнутую область дозвукового течения без точек торможения, т.е. течение, в котором значение квадрата параметра Чаплыгина $\tau^2 = \dfrac{V^2}{2h_0}$ лежит в пределах:

$$0 < \tau^2 < \frac{k-1}{k+1}. \tag{1}$$

В плоскопараллельном течении введем ортогональную систему естественных координат (O, s, n) так, чтобы равенства вида $s = \text{const}$ и $n = \text{const}$ задавали бы, соответственно, эквипотенциальные линии и линии тока. Пусть H_s и H_n — коэффициенты Ламе этой системы координат [7]. В координатах (s, n) уравнение неразрывности и условие отсутствия завихренности выглядят соответственно так:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(H_n \left(1 - \tau^2\right)^{\dfrac{1}{k-1}} \tau \right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n} (\tau H_s) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial s} H_n = H_n \frac{\alpha \tau^2 - 1}{(1 - \tau^2)} \frac{\partial}{\partial s} \ln \tau, \text{ где } \alpha = \frac{k+1}{k-1}, \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n} H_s = -H_s \frac{\partial}{\partial n} \ln \tau. \tag{2}$$

В работе [8] было показано, что независимо от природы плоского течения справедливо дифференциальное равенство

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial s} H_n \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{H_n} \frac{\partial}{\partial n} H_s \right).$$

Подставим в это равенство выражения (2). После перестановки слагаемых получим

$$\left\{ \frac{H_n}{H_s} \frac{1 - \alpha \tau^2}{1 - \tau^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{H_s}{H_n} \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{H_n}{H_s} \frac{1 - \alpha \tau^2}{1 - \tau^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{H_s}{H_n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \right\} \ln \tau = 0.$$

Если течение дозвуковое $1 - \alpha \tau^2 > 0$, то последнее уравнение для $ln\tau$ представляет собой уравнение эллиптического типа с ограниченными коэффициентами при первых производных. В отличие от уравнения, приведенного во введении, оно является однородным. Поэтому, согласно теореме Хопфа, величина $ln\tau$, а, потому и число Маха M достигают и максимума, и минимума на границе и только на границе течения. Как сказано во введении, утверждение о максимуме давно известно [4]. Результатом данной работы является следующий принцип минимума.

Пусть плоское стационарное безвихревое изоэнтропическое течение идеального совершенного газа происходит в отсутствие внешних сил. И пусть во всей замкнутой области G отсутствуют точки торможения, а течение является дозвуковым. Тогда, если число Маха M *не постоянно, то минимум* M *достигается на границе и только на границе области G.*

Условие $\tau^2 > 0$, входящее в (1), соответствует отсутствию точек торможения. А условие $\tau^2 < \dfrac{k-1}{k+1}$ — отсутствию звуковых и сверхзвуковых точек. Эти ограничения отражены в приведенной формулировке. Первое ограничение неустранимо, т.к. можно привести пример достижения нулевого (а, потому, минимального) значения числа Маха во внутренней точке течения. Например, точка торможения может возникать при столкновении двух противоположно направленных струй газа. Второе ограничение связано с вырождением уравнения и вопрос об устранении этого ограничения выходит за рамки работы.

4.

Возможность нарушения принципа минимума при наличии точек торможения в некоторых случаях позволяет утверждать о существовании точки торможения в течении. Для этого может оказаться достаточно измерений скорости только в зоне, в которой нет точек торможения. Действительно, из отсутствия точки торможения следует принцип минимума. Следовательно, нарушение принципа минимума внутри какой-либо части дозвукового течения свидетельствует о существовании точки торможения.

Рассмотрим область течения с произвольным числом Маха. Обозначим M_1 — минимальное значение числа Маха на границе области. Допустим, что в течении существует дозвуковая точка A, значение числа Маха M_A в которой меньше M_1. Т.е. $\mathrm{M}_A < \min\{\mathrm{M}_1; 1\}$. Тогда A является внутренней точкой дозвуковой области G, определяемой неравенством $\mathrm{M} < M_2 = (\mathrm{M}_A + \min\{\mathrm{M}_1; 1\})/2$. Поскольку $\mathrm{M}_A < \mathrm{M}_2$, во внутренней точке области G есть точка минимума. Согласно доказанному выше принципу минимума это означает наличие в G точки торможения. Таким образом, доказан следующий признак наличия точки торможения.

Пусть плоское стационарное безвихревое изоэнтропическое течение идеального совершенного газа происходит в отсутствие внешних сил. И пусть в некоторой внутренней точке течения число Маха меньше своего минимального значения на границе течения и меньше единицы. Тогда в течении есть хотя бы одна точка торможения.

Из признака, в частности, следует, что если течение является сверхзвуковым во всех точках границы, а внутри есть хотя бы одна дозвуковая точка, то есть и точка торможения.

5.

Чтобы воспользоваться полученным признаком существования точки торможения, можно заложить в алгоритм экспериментального исследования стратегию случайного выбора точки измерения скорости. Речь идет о случайном, но полном и без повторений переборе всех точек из заранее заданной сетки. Изначально неизвестно, есть в исследуемой зоне точка торможения или нет. Предположим, что исследуется область течения, в которой нет точки торможения. Тогда экспериментатору придется провести тотальные измерения, т.е. измерить модуль скорости в каждом узле сетки, чтобы в итоге выяснить факт отсутствия точек торможения. Но количество измерений будет таким же, как если бы точки выбирались согласно некоторому порядку. Например, при сетке с шагом 5 см в одном квадратном метре плоского течения потребуется около 400 измерений. Но в случае наличия точки торможения количество необходимых измерений может оказаться значительно меньше. Действительно, пусть, например, на границе течения число Маха лежит в пределах $0.8 \leqslant \mathrm{M} \leqslant 1.5$. В силу существования точки торможения, зона течения с числом Маха $\mathrm{M} < 0.8$ существует. И пусть её объем составляет, например, 30% от исследуемого объема. Тогда, при использовании случайного выбора точки измерения, с вероятностью $1 - (1 - 0.3)^{10} \approx 0.97$ потребуется не более 10 измерений. В одном из них может оказаться, например, $\mathrm{M} = 0.55$ или $\mathrm{M} = 0.7$. Поскольку эти значения меньше единицы и меньше минимума на границе, равного 0.8, то можно будет сделать заключение о наличии точки торможения $\mathrm{M} = 0$ и, следовательно, о наличии зоны высокой температуры.

6. Заключение

Проведен анализ полных уравнений Эйлера плоского безвихревого стационарного изоэнтропического течения идеального совершенного газа. Показано, что в дозвуковом течении без точек торможения число Маха M достигает минимума на границе и только на границе течения.

В качестве следствия принципа минимума предложено достаточное условие (признак) наличия точки торможения. Хотя использование этого признака не позволяет указать место расположения точки торможения, оно позволяет значительно сократить количество измерений скорости для выявления факта её наличия.

Результаты могут быть применены для качественного анализа течений и для выяснения факта наличия точки торможения.

Литература

1. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой аэродинамики. М.: Издательство иностранной литературы. 1961. 208 с.
2. *Крайко А.Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1987. Т. 51, вып. 6. С. 941–950.
3. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* Принцип максимума функции Бернулли // Ученые записки ЦАГИ, 2015. Т. XLVI, № 5. С. 53–56.
4. *Shiffman M.* On the existence of subsonic flows of a compressible fluid // J. Ration. And Analysis. 1952. V. 1. P. 605–652.
5. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957.
6. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1927. V. 19. P. 147–152.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
8. *Сизых Г.Б.* Критерий Бернулли для установившегося плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости // Труды МФТИ. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 81–87.

References

1. *Bers L.* Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, Surveys in Applied Mathematics, V. 3, John Wiley & Sons Inc., New York, 1958. 164 p.
2. *Kraiko A.N.* Planar and axially symmetric configurations which are circumvented with the maximum critical Mach number. J. Appl. Math. Mech. 51 (1987), N 6, 723–730 (1989); translated from Prikl. Mat. Mekh. 51 (1987), N 6, 941–950. (in Russian).
3. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Maximum principle for Bernoulli function. TSAGI Science Journal. 2015. V. XLVI, N 5. P. 53–56. (in Russian).
4. *Shiffman M.* On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. J. Ration. And Analysis. 1952. V. 1. P. 605–652.
5. *Miranda C.* Partial Differential Equations of Elliptic Type. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970. 370 p.
6. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1927. V. 19. P. 147–152.
7. *Loytsyansky L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Pergamon Press, Oxford. 1966. 804 p.
8. *Sizykh G.B.* Bernoulli criterion for plane-parallel steady flow of viscous incompressible fluid. Proceedings of MIPT. 2013. V. 5, N 2. P. 81–87. (in Russian).

Поступила в редакцию 12.06.2015.