Понятие о бифуркации. Бифуркации положений равновесия. Дифференциальные уравнения динамических систем часто зависят не только от фазовых переменных, но и параметров, т.е. имеют следующую структуру:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Здесь и далее будут рассматриваться автономные системы. В некоторых случаях качественные свойства системы - ее фазовый портрет - существенно изменяются при переходе параметров через определенные значения. Такая перестройка картины движения называется бифуркацией, а соответствующие значения параметров называются бифуркационными. Например, исследуя положения равновесия массивной бусинки на гладкой окружности в поле тяготения, вращающейся относительно вертикали с постоянной угловой скоростью, мы видели, что число положений равновесия и их устойчивость определяются величиной угловой скорости. Причем появление "боковых" положений равновесия и потеря устойчивости "нулевого" положения равновесия происходит при достижении угловой скоростью некоторой величины.

Общие свойства качественных перестроек фазового портрета при изменении параметров системы изучаются в теории бифуркаций, основы которой были заложены в начале XX века. В настоящее время эта область теории динамических систем весьма обширна. Мы же ограничимся первым знакомством с ее основами и будем говорить о только о бифуркациях положений равновесия.

Наиболее простая ситуация реализуется в одномерном случае, когда x, α, $f(x, \alpha)$ – скаляры. Положения равновесия находятся из уравнения

$$f(x, \alpha) = 0.$$

Это уравнение задает на плоскости параметров (x, α) кривую в параметрическом виде, называемую кривой равновесий. В общем случае кривая равновесий может иметь несколько ветвей. Например, для системы $\dot{x} = x^2 - \alpha^2$ она состоит их двух ветвей $x = \pm\alpha$. Далее рассмотрим кривую равновесий, также состоящую из двух ветвей и имеющую форму, изображенную на рис. 1.

Кривая равновесий делит плоскость на области, в которых функция f сохраняет знак. В наиболее простой и наиболее распространенной ситуации в соседних областях, граничащих по кривой равновесий, знаки функции f различаются. На рис. 1 проведена расстановка этих знаков. Предположим, что в "нижней" области функция f положительна, что обозначено на рис. 1. знаками "$+$". При переходе через кривую функция f становится отрицательной, что обозначено на рис. 1 знаками "$-$".

Линеаризация функции f по x в окрестности произвольной точки x^* на кривой равновесий дает следующую систему линейного приближения:

$$\dot{\delta} = f' \cdot \delta, \quad \delta = x - x^*, \quad f' = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^*}.$$

Таким образом, характер устойчивости определяется знаком производной f'. Если при увеличении x при переходе через кривую равновесия знак функции f меняется с "$+$" на "$-$", то $f' < 0$ и положение равновесия x^* асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Наоборот, при переходе от "$-$" к "$+$" производная $f' > 0$ и по той же теореме положение равновесия неустойчиво. Таким образом, у кривой равновесий имеются ветви, состоящие из

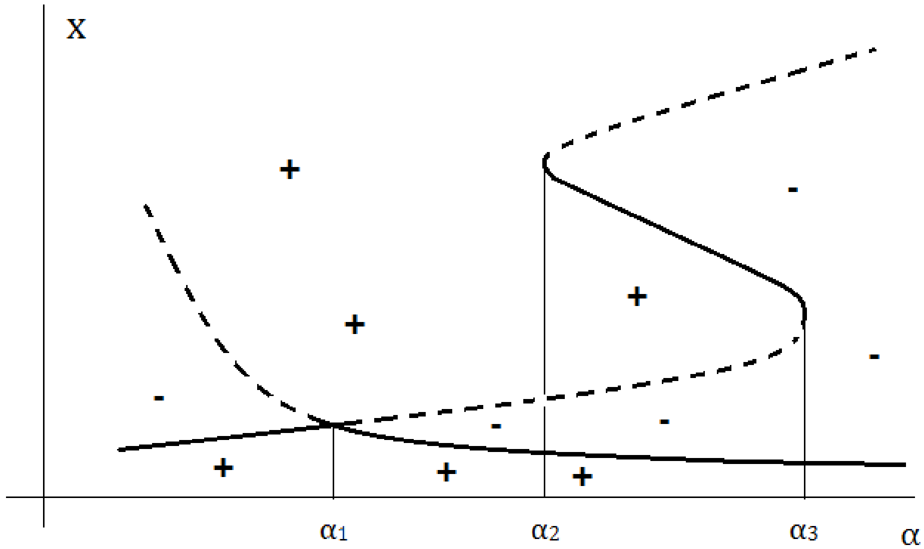

Рис. 1: Кривая равновесий.

устойчивых и неустойчивых положений равновесия. Устойчивые ветви кривой равновесий изображены на рис. 1 сплошными линиями, неустойчивые - пунктирными.

Замечание. Может быть, что знаки функции f в соседних областях совпадают (например, $f = (x-\alpha)^2$), или ее производные, в том числе порядка выше первого, обнуляются (например, $f = (x-\alpha)^3$). Анализ устойчивости ветвей в этих случаях для одномерной системы обычно не представляет сложностей, но здесь рассматриваться не будет.

Рассматривая кривую равновесия, можно найти бифуркационные значения параметра α. Так, при переходе параметра через значение $\alpha = \alpha_1$ ветви кривой равновесий пересекаются и устойчивая ветвь теряет устойчивость, а неустойчивая наоборот становится устойчивой. Соответствующая бифуркация называется *сменой устойчивости.*

При варьировании параметра вблизи $\alpha = \alpha_{2,3}$ положение равновесия исчезает, либо появляются два близких положения равновесия, одно из которых устойчиво, а второе - неустойчиво. Соответствующая бифуркация называется *складкой.*

В системах с четными зависимостями f от фазовой переменной x встречается третий тип бифуркаций – *вилка.* Покажем каким образом она может получаться на простом примере. Пусть $f = x(\alpha - x^2)$. Кривая равновесий, очевидно, будет иметь вид, представленный на рис. 2. При переходе через бифуркационное значение параметра $\alpha = 0$ дополнительно появляются две ветви кривой равновесия $x = \pm\sqrt{\alpha}$, при этом ветвь $x = 0$ остается, однако изменяется характер ее устойчивости.

Кривые равновесия могут быть построены и для механических систем с одной степенью свободы, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка. По теореме о разрешимости уравнений Лагранжа относительно старших производных это уравнение всегда приводится к виду

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \alpha), \tag{2}$$

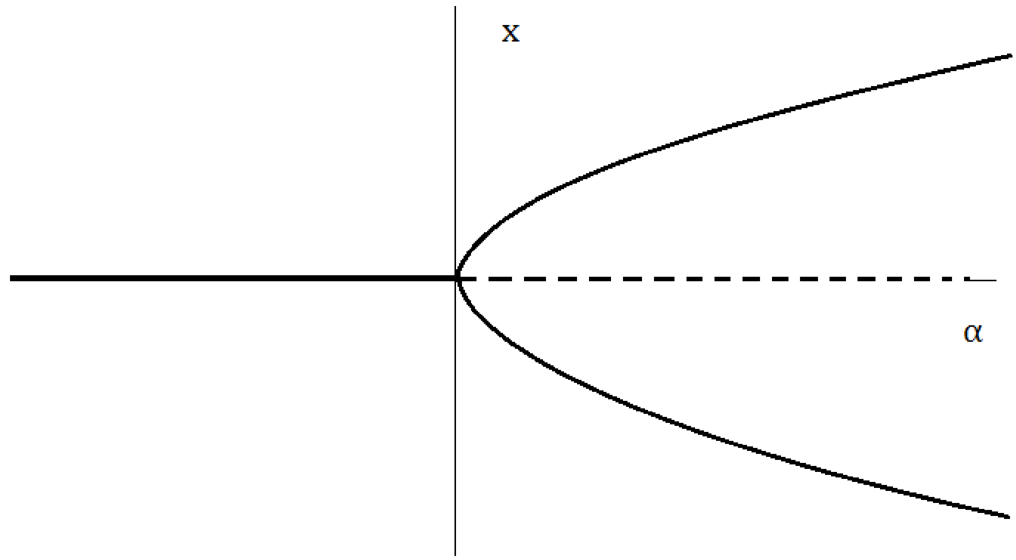

Рис. 2: Бифуркация типа вилка.

где α – некоторый параметр задачи. Поскольку между положениями равновесия и точками вида $(q, \dot{q}) = (q^*, 0)$ в фазовом пространстве имеется взаимно-однозначное соответствие, для нахождения положений равновесия получаем уравнение $f(q, 0, \alpha) = 0$, которое также задает кривую равновесий на плоскости параметров (q, α). Как и в случае уравнения первого порядка, кривая равновесий может иметь несколько ветвей и возможны все описанные выше типы бифуркаций. Однако при исследовании устойчивости ветвей кривой равновесий системы (2) нужно иметь в виду, что система описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Поэтому следует использовать адекватные методы анализа устойчивости положений равновесий таких систем (например, теоремы об устойчивости консервативных систем, если изучаемая система консервативна и т.п.).

Дифференциальное уравнение механической системы (2) заменой $\dot{q} = u$ сводится к системе первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u \\ \dot{u} &= f(q, u, \alpha) \end{aligned} \tag{3}$$

и, таким образом, является частным случаем динамических систем второго порядка, описываемых уравнениями вида (1) с двумерным фазовым вектором $x = (x_1, x_2)^T$. В двумерных динамических системах встречается третий тип бифуркаций - *рождение предельного цикла*. Опишем это явление на качественном уровне, по прежнему считая параметр α скаляром. Пусть в системе имеется устойчивое положение равновесия. При переходе параметром через бифуркационное значение это положение равновесия теряет устойчивость, однако в его окрестности появляется замкнутая асимптотически устойчивая траектория, характерный размер которой увеличивается при дальнейшем изменении параметра α. Соответствующая бифуркационная картина представлена на рис. 3.

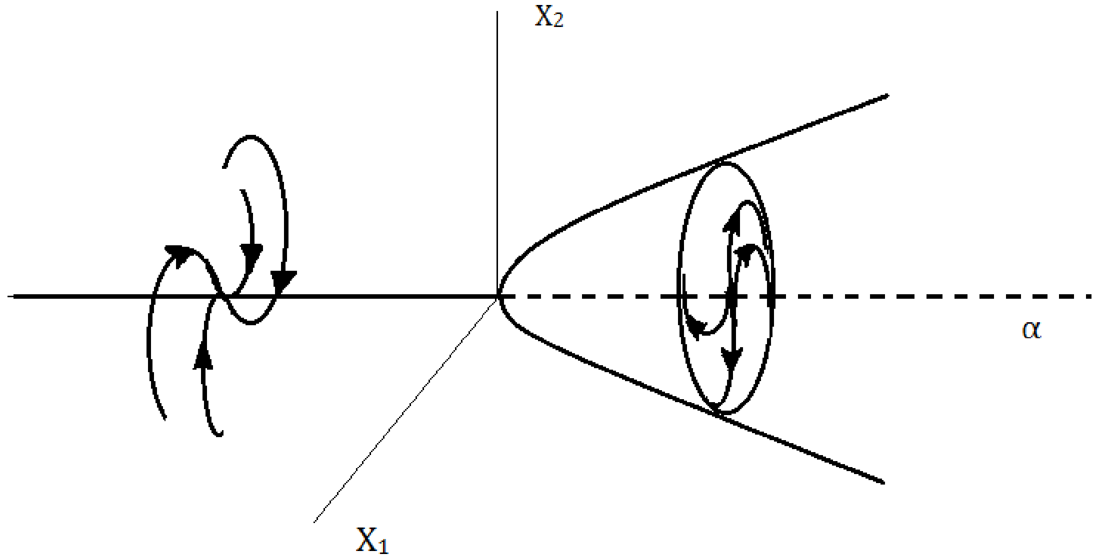

Рис. 3: Бифуркация рождение цикла.

Для пояснения механизма возникновения цикла рассмотрим простейший пример, легко исследуемый аналитически:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Система имеет нулевое положение равновесия. Исследуем его устойчивость по линейному приближению. Матрица линеаризованной системы A и корни характеристического уравнения $\det(\lambda E - A) = 0$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i.$$

Таким образом, по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению получаем, что при $\alpha < 0$ положение равновесия асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ – неустойчиво. Для исследования поведения системы при потере устойчивости перейдем к полярным координатам

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\phi \\ x_2 &= r\sin\phi. \end{aligned}$$

Делая формальную замену переменных (или умножая первое уравнение (4) на x_1, второе – на x_2 и складывая для быстрого вывода уравнения для переменной r), нетрудно получить систему в полярных координатах r, ϕ:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\alpha - r^2) \\ \dot{\phi} &= 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что уравнение для r отделяется и при $\alpha > 0$ имеет два положения равновесия – $\{r = 0,\ r = \sqrt{\alpha}\}$. Нулевое положение равновесия неустойчиво по линейному приближению. Напротив, второе положение равновесия оказывается асимптотически устойчивым, поскольку линеаризация в его окрестности имеет отрицательный коэффициент: $\frac{d}{dr}r(\alpha - r^2)|_{r=\sqrt{\alpha}} = -2\alpha$. Это означает, что в окрестности положения равновесия появляется асимптотически устойчивый цикл, к которому притягиваются все фазовые кривые.

Исследования динамических систем, относящиеся к началу XX в., показали, что рождение цикла с характерным размером, пропорциональным $\sqrt{\alpha}$ – явление достаточно общего характера, происходящее при переходе пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения линеаризованной системы их левой полуплоскости в правую (как это и было в рассмотренном примере). Однако для большинства систем циклы имеют более сложную форму, чем окружность, что усложняет соответствующие выкладки в сравнении с рассмотренным выше примером. Бифуркацию рождения цикла также называют бифуркацией Пуанкаре - Андронова - Хопфа. Важно иметь в виду, что данный тип бифуркаций встречается исключительно в нелинейных системах.

Потеря устойчивости, происходящая при рождении цикла, называется мягкой, однако на практике это явление может приводить к катастрофическим последствиям. Один из наиболее известных примеров – колебания крыльев или хвостового оперения самолета при превышении скоростью набегающего потока некоторого критического (бифуркационного) значения. Это явление, называемое "флаттером" приводило к разрушению самолетов в конце 30-х годов XX в., когда их скорости достигли величин, достаточных для возникновения флаттера. Основополагающий вклад в математическую модель флаттера, позволившую объяснить это явление и выработать методы борьбы с ним, внесли М.В. Келдыш и М.А. Лаврентьев.

Жесткой потерей устойчивости, называемой в практических задачах "дивергенцией", соответствует бифуркация типа складки. Рассмотрим соответствующий механический пример. Допустим, что к математическому маятнику длины l приложена постоянная сила F, ортогональная подвесу. Тогда маятник имеет 2 положения равновесия $\phi_1 = \arcsin\frac{F}{mg}, \phi_2 = \pi - \phi_1$, где ϕ – угол между подвесом и вертикалью. При $F = mg$ эти два положения равновесия сливаются в одно, а при $F > mg$ оно исчезает. В отличии от мягкой потери устойчивости, при дивергенции решение покидает окрестность положения равновесия, потерявшего устойчивость, что объясняет применение терминов "жесткая" и "дивергенция" ("дивергенция" в буквальном переводе означает "расхождение"). Жесткая потеря устойчивости происходит при прохождении корней характеристического уравнения линеаризованной системы через ноль. Нетрудно убедиться, что это условие выполнено в рассмотренном примере.

Полезно отметить, что фазовые кривые автономной системы не могут пересекаться по теореме Коши о существовании и единственности решений. В плоском случае ($x = (x_1, x_2)^T$) это накладывает существенные ограничения на структуру фазового портрета и поэтому нахождение положений равновесия, предельных циклов или других периодических решений практически полностью определяет фазовый портрет системы. Соответственно, изменение "расстановки" этих объектов на фазовой плоскости при бифуркации будет означать перестройку фазового портрета и поведения системы, о чем и говорилось в самом начале материала.

При размерности фазового вектора выше двух картина движения существенно усложняется. Многообразие возникающих явлений исследуется в работах по нелинейной динамике и в нашем курсе рассматриваться не будет. Однако заметим, что во всех рассмотренных случаях появление бифуркаций соответствует неоднозначности решения уравнения $f(x, \alpha) = 0$ относительно x. По теореме о неявной функции это происходит при

$$\det \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Данное соотношение определяет точку бифуркации при произвольной размерности фазового вектора системы (1).