

Финальный тур
Всероссийской студенческой олимпиады
по механике и математическому моделированию
(20 мая 2012 г.)

Задача 1. Дырявая салфетка

Салфеткой Серпинского называют фрактал, имеющий следующее построение. Равносторонняя однородная треугольная пластина Φ_0 со стороной a делится средними линиями на 4 меньших треугольника, центральный треугольник изымается. С тремя частями полученной фигуры Φ_1 проводят аналогичную операцию, получается фигура Φ_2 , и так далее (рис. 1). В итоге фигура Φ_∞ и называется салфеткой Серпинского.

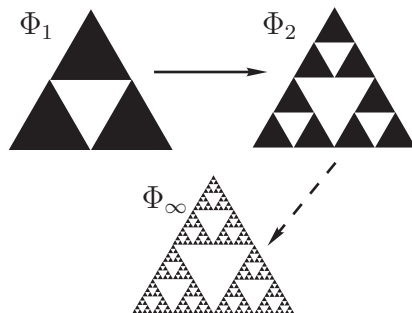


Рис. 1

В итоге фигура Φ_∞ и называется салфеткой Серпинского.

1. Определите массу m_n фигуры Φ_n , если масса исходной фигуры Φ_0 равна m_0 .
2. Определите момент инерции I_2 фигуры Φ_2 относительно оси Oz , проходящей перпендикулярно плоскости фигуры через центр масс.
3. Определите момент инерции I_n фигуры Φ_n относительно оси Oz .
4. Определите радиус инерции салфетки Серпинского относительно оси Oz $r_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$.

Примечание. Радиусом инерции r называется характеристика момента инерции:

$$I = mr^2.$$

Задача 2. Пинг-понг

На каком расстоянии a друг от друга следует расположить две узкие горизонтальные опоры чтобы лежащий на них лист ДСП длины $2l$ был наиболее пригоден в качестве стола для игры в пинг-понг. В качестве критерия пригодности рассмотрите условие минимальности максимального наклона стола.

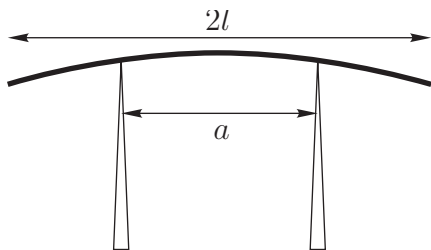


Рис. 2

Задача 3. Гляжу в озёра синие

Для наблюдения за озером Байкал ($\lambda = 53^\circ$ с. ш., $\varphi = 107^\circ$ в. д.) на околоземную круговую орбиту ($R = 6800$ км) выведен спутник с установленной на нем камерой. Орбита образует с экваториальной плоскостью угол $i = 53^\circ$. Спутник (точка 1 на рисунке) движется так, что пересекает плоскость экватора с юга на север в точке 3 (нулевой меридиан), а камера направлена на точку наблюдения (точка 2 на рисунке). Радиус Земли $R_3 = 6400$ км, в земных сутках 24 часа. Геоцентрическая гравитационная постоянная $\Gamma = \gamma M_3 = 398\,600,5 \cdot 10^9$ м³/с².

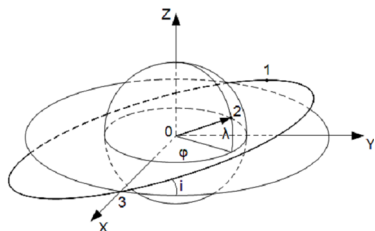


Рис. 3

Для постоянного наблюдения система автоматического управления должна направлять оптическую ось камеры на озеро.

1. Считая, что камера не вращается вокруг оптической оси, найдите зависимость абсолютной угловой скорости $\omega_{\text{абс}}$ камеры от времени. Из найденной зависимости рассчитайте значение проекций $\omega_{\text{абс}}$ на оси неподвижной системы координат $Oxyz$ в моменты времени $t = 0, 200, 400, \dots 2000$.
2. Определите время τ реального наблюдения спутника за озером на первом витке орбиты с учётом непрозрачности Земли.

Все требуемые значения должны быть вычислены с относительной погрешностью, не превышающей 1 %.

Задача 4. А всё-таки оно вертится

Твёрдое тело массы $m = 2,78$ кг движется в однородном поле тяжести вокруг неподвижной точки O . Геометрия масс тела соответствует волчку Лагранжа ($A = B = 2$ кг · м², $C = 1$ кг · м², центр тяжести лежит на оси динамической симметрии тела на расстоянии $l = 0,5$ м от точки O).

В начальный момент времени

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$\dot{\theta}_0 = 0 \text{ с}^{-1}, \quad \dot{\psi}_0 = -\sqrt{2} \text{ с}^{-1}, \quad \dot{\varphi}_0 = 11 \text{ с}^{-1}.$$

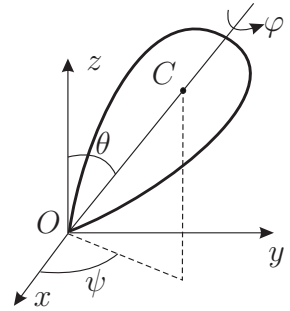


Рис. 4

1. Найдите все экстремальные значения угла θ при последующем движении тела.
2. Качественно изобразите траекторию центра тяжести тела на сфере с центром в точке O .
3. Рассчитайте длину пути, пройденного центром масс тела за время $t_1 = 5$ с, $t_2 = 1$ час.

При расчётах полагайте ускорение свободного падения равным $g = 10$ м/с². Все требуемые значения должны быть приведены с погрешностью не более 1 %.

Задача 5. Оби Ван Дер Поль

Осциллятор Ван-дер-Поля¹ описывается уравнением:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

1. Определите координату x при $\mu = 1$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$ в моменты времени $t = 1, 2, \dots, 10$. Приведите ответ в виде таблицы.
2. Определите период T_1 и амплитуду² A_1 установившихся колебаний при $\mu = 1$.

¹Осциллятор с нелинейным демпфированием.

²Амплитудой называется модуль максимального отклонения от положения равновесия.

3. Приведите уравнение осциллятора к системе уравнений первого порядка вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x) + q(y), \\ \dot{y} = r(x) + s(y). \end{cases}$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$f(x)\dot{x} = \frac{d}{dt}F(x), \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x).$$

4. Определите период T_0 и амплитуду A_0 установившихся колебаний при $\mu \ll 1$.
5. Выполните задание предыдущего пункта при $\mu \gg 1$.
6. Если в условиях пункта 4 отклонить осциллятор так, что его амплитуда станет равна $A = A_0 + \Delta A_0$ ($\Delta A_0 \ll A_0$), то за какое время τ смещение амплитуды $\Delta A = A - A_0$ сократится вдвое?

Все требуемые значения амплитуд и координат должны быть приведены с абсолютной погрешностью не более 10^{-3} . Значения периодов должны быть вычислены с погрешностью не более 1 %

Задача 6. Троллейбусные салочки

Два троллейбуса движутся по кольцевому маршруту с равномерно расположенными 10 остановками, находясь изначально на диаметрально противоположных точках маршрута и затрачивая 10 минут на дорогу между двумя остановками. В начальный момент на остановках нет людей, а в каждую следующую минуту на остановку с вероятностью p приходит один человек. На вход в троллейбус каждый пассажир затрачивает одну минуту, временем выхода можно пренебречь, а вместимость троллейбуса неограничена.

1. Определите вероятность p , при которой средняя скорость троллейбусов будет неограниченно уменьшаться.
2. Если $p = 0,15$, определите среднее время $\langle t \rangle$ (количество минут), через которое один троллейбус догонит другой, с погрешностью не более 5 %. Оцените дисперсию D_t с погрешностью не более 20 %.

Задача 7. Привет от гидрологов

Известно, что при размывании грунта критический размер переносимых потоком частиц d можно считать функцией средней скорости течения v , плотности частиц ρ_0 , плотности воды ρ и ускорения свободного падения g . Используя анализ размерностей, получите вид зависимости массы m переносимых потоком частиц от скорости течения v .

Решения

Задача 1. Дырявая салфетка

1. На каждом этапе построения фрактала из каждого маленького треугольника изымается $1/4$ часть, поэтому:

$$m_{n+1} = \frac{3}{4}m_n, \quad \text{откуда} \quad m_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n m_0.$$

2. Момент инерции треугольника $I_0 = m_0 a^2 / 12$. Фигуру Φ_{n+1} можно представить, как составленную из трёх фигур Φ_n , уменьшенных в два раза и смещённых из центра на расстояние $d = a\sqrt{3}/6$. Тогда по теореме Гюйгенса–Штейнера:

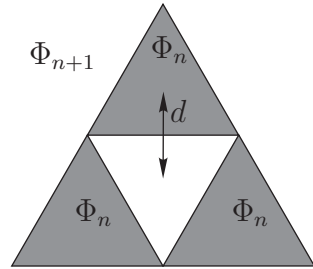


Рис. 5

$$I_{n+1} = 3 \left(\frac{I_n}{16} + \frac{m_n}{4} d^2 \right) = \frac{3}{16} I_n + \left(\frac{3}{4} \right)^n \frac{m_0 a^2}{16}. \quad (1)$$

Используя (1), можно найти сначала $I_1 = 5m_0 a^2 / 24$, а затем и момент инерции I_2 :

$$I_2 = \frac{63}{1024} m_0 a^2.$$

3. Момент инерции I_n удобнее вычислять через радиус инерции r_n . Используя (1), найдём:

$$\begin{aligned} r_{n+1}^2 &= \frac{1}{m_{n+1}} \left(\frac{3}{16} m_n r_n^2 + \frac{m_n a^2}{16} \right) = \frac{1}{16} \frac{m_n}{m_n (3/4)} (3r_n^2 + a^2) = \\ &= \frac{1}{4} r_n^2 + \frac{a^2}{12} = \alpha r_n^2 + \beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 r_0^2 &= r_0^2, \\
 r_1^2 &= \alpha r_0^2 + \beta, \\
 r_2^2 &= \alpha^2 r_0^2 + \alpha\beta + \beta, \\
 r_3^2 &= \alpha^3 r_0^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta, \\
 &\dots \\
 r_n^2 &= \alpha^n r_0^2 + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta + \beta = \\
 &= \alpha^n r_0^2 + \beta \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = \frac{r_0^2}{4^n} + \frac{a^2}{9} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, искомый момент инерции:

$$I_n = m_n r_n^2 = \frac{m_0 a^2}{36} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(4 - \frac{1}{4^n}\right).$$

4. Полагая в формуле (2) $n \rightarrow \infty$, получим

$$r_\infty^2 = \frac{a^2}{9}, \quad \text{откуда} \quad r_\infty = \frac{a}{3}.$$

Задача 2. Пинг-понг

Лист длиной $2l$ лежит симметрично на опорах, расстояние между которыми равно $a = 2\xi l$, и представляет свободно опёртую балку с двумя свешивающимися консолями, нагруженную равномерно распределённой нагрузкой интенсивности:

$$q = \frac{m_{\text{л}} g}{l} = \rho g b h,$$

где ρ — плотность, b — ширина и h — толщина листа.

Уравнение изгиба балки для малых изгибов (ось y направлена вниз):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI},$$

здесь E — модуль Юнга, I — момент инерции поперечного сечения балки.

Поскольку нас не интересуют абсолютные значения прогиба, а распределение сил остаётся одинаковым при масштабировании, то задачу можно обезразмерить. Пусть вес балки и её длина равны 2, а $EI = 1$. Выберем за начало координат середину балки, тогда абсцисса правого конца балки равна 1, а абсцисса правой опоры — ξ .

На левой консоли ($x > \xi$) изгибающий момент:

$$M_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x)^2.$$

Между опорами балки ($x < \xi$):

$$M_2(x) = \frac{1}{2}(1 - x)^2 - (\xi - x).$$

Для безразмерного прогиба $\psi(x) = y'(x)/6$ (коэффициент 6 выбран для удобства) можно записать дифференциальное уравнение

$$6\psi'(x) = \begin{cases} M_2(x), & x < \xi, \\ M_1(x), & x > \xi, \end{cases}$$

с условием на непрерывность в точке $x = \xi$ и начальным условием $\psi(0) = 0$ (в силу симметрии). Решением уравнения будет:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^3 + 3(1 - 2\xi)x, & x < \xi, \\ (x - 1)^3 + 1 - 3\xi^2, & x > \xi, \end{cases}$$

Определим возможные положения максимума функции $|\psi(x)|$: это может быть либо край балки $x = 1$, либо точка опоры $x = \xi$, либо внутренний экстремум функции $x^3 - 3(1 - 2\xi)x$, который достигается при $x = \sqrt{2\xi - 1}$.

Таким образом, значение максимума функции $|\psi(x)|$ равно либо $\psi_1 = |1 - 3\xi^2|$ (край балки), либо $\psi_2 = |\xi^3 - 6\xi^2 + 3\xi|$ (в точке опоры), либо $\psi_3 = 2(2\xi - 1)^{3/2}$ (в точке экстремума).

Построив график этих функций (рис. 6), заметим, что минимум $\max\{\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \psi_3(\xi)\}$ лежит на пересечении $\psi_1(\xi)$ и $\psi_3(\xi)$.

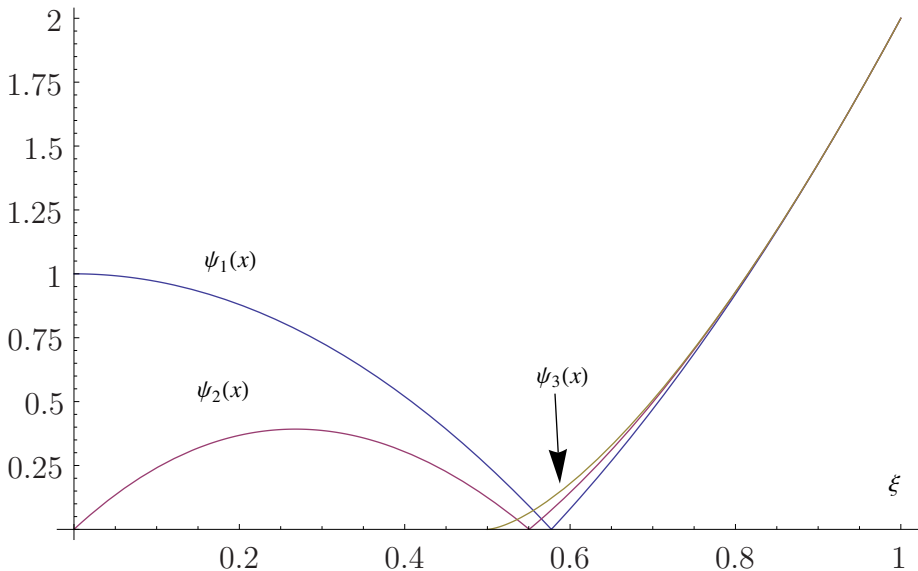


Рис. 6

Решая уравнение

$$|1 - 3\xi^2| = 2(2\xi - 1)^{3/2},$$

найдём $\xi = 5/9$ и $a = 10l/9$.

Задача 3. Гляжу в озёра синие

В неподвижной системе координат (Oxy совпадает с экваториальной плоскостью, Oz — с осью вращения Земли) радиус-векторы спутника \mathbf{r}_1 и озера \mathbf{r}_2 выражаются следующим образом:

$$\mathbf{r}_1 = R \begin{pmatrix} \cos(\omega_{\text{орб}}t) \\ \sin(\omega_{\text{орб}}t) \cos i \\ \sin(\omega_{\text{орб}}t) \sin i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = R_3 \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos(\varphi + \Omega_3 t) \\ \cos \lambda \sin(\varphi + \Omega_3 t) \\ \sin \lambda \end{pmatrix},$$

где Ω_3 - угловая скорость вращения Земли, а $\omega_{\text{орб}}$ - орбитальная угловая скорость спутника.

$$\Omega_3 = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}, \quad \omega_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{\gamma M_3}{R^3}} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}.$$

1. Радиус-вектор от спутника к озеру $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, а его производная по времени:

$$\dot{\mathbf{r}}_{12} = \begin{pmatrix} -R_3\Omega_3 \cos \lambda \sin(\varphi + \Omega_3 t) + R\omega_{\text{опб}} \sin \omega_{\text{опб}} t \\ R_3\Omega_3 \cos \lambda \cos(\varphi + \Omega_3 t) - R\omega_{\text{опб}} \cos \omega_{\text{опб}} t \\ R_3 \sin \lambda - R\omega_{\text{опб}} \sin i \cos \omega_{\text{опб}} t \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\dot{\mathbf{r}}_{12} = \dot{r}_{12} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \mathbf{r}_{12},$$

где $\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}}$ — вектор угловой скорости камеры в неподвижных осях, то учитывая, что по условию $\mathbf{r}_{12} \perp \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}}$, получим

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} = \frac{\mathbf{r}_{12} \times \dot{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2}$$

Ниже приведена таблица значений $\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}}(t)$:

| | | | | | | |
|--|------|-------|-------|-------|------|------|
| $t, \text{ с}$ | 0 | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 |
| $\omega_{\text{абс}}^x, 10^{-6} \text{ рад/с}$ | 14,1 | 17,2 | 20,9 | 25,5 | 31,3 | 37,7 |
| $\omega_{\text{абс}}^y, 10^{-6} \text{ рад/с}$ | -486 | -489 | -492 | -498 | -510 | -533 |
| $\omega_{\text{абс}}^z, 10^{-6} \text{ рад/с}$ | 372 | 379 | 391 | 410 | 444 | 518 |
| $t, \text{ с}$ | 1200 | 1400 | 1600 | 1800 | 2000 | |
| $\omega_{\text{абс}}^x, 10^{-6} \text{ рад/с}$ | 40,4 | -17,8 | -1977 | -446 | -169 | |
| $\omega_{\text{абс}}^y, 10^{-6} \text{ рад/с}$ | -600 | -918 | -5336 | -1083 | -647 | |
| $\omega_{\text{абс}}^z, 10^{-6} \text{ рад/с}$ | 718 | 1641 | 13768 | 1865 | 717 | |

2. Запишем уравнение плоскости касательной к Земле в точке наблюдения. Эта плоскость проходит через конец вектора \mathbf{r}_2 , причём вектор \mathbf{r}_2 ей ортогонален:

$$r_2^x(x - r_2^x) + r_2^y(y - r_2^y) + r_2^z(z - r_2^z) = 0$$

Искомое время τ определим как разность t_2 и t_1 — первых двух моментов времени, в которые конец вектора \mathbf{r}_1 принадлежит этой плоскости:

$$r_2^x(r_1^x - r_2^x) + r_2^y(r_1^y - r_2^y) + r_2^z(r_1^z - r_2^z) = 0.$$

Численный расчёт даёт $t_1 = 1296,27$ с, $t_2 = 1927,67$ с, откуда:

$$\tau = t_2 - t_1 = 631,4 \text{ с} = 10,5 \text{ мин.}$$

Задача 4. А всё-таки оно вертится

Запишем динамические и кинематические уравнения Эйлера для движения динамически симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой в поле тяжести:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= M_O^\xi, & \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \\ A\dot{q} + (C - A)pr &= M_O^\eta, & \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) / \sin \theta, \\ C\dot{r} &= 0, & \dot{\theta} &= (p \cos \varphi - q \sin \varphi). \end{aligned}$$

Здесь p , q , r — проекции угловой скорости тела на главные оси инерции тела в т. O , M_O^ξ , M_O^η — проекции момента силы тяжести на те же оси.

$$M_O^\xi = mgl \sin \theta \cos \varphi, \quad M_O^\eta = -mgl \sin \theta \sin \varphi$$

Интегрируя эти уравнения на интервале $t \in [0, 6]$ с начальными условиями:

$$\begin{aligned} p(0) &= 0, & q(0) &= -1, & r(0) &= 10, \\ \varphi(0) &= 0, & \psi(0) &= \pi/2, & \theta(0) &= \pi/4, \end{aligned}$$

получим следующий закон движения по углу нутаций θ .

1. Угол θ изменяется периодически, меняя своё значение между минимумом θ_{\min} и максимумом θ_{\max} . Численное определение этих значений даёт:

$$\theta_{\min} = 0,7854 = 45,0001^\circ, \quad \theta_{\max} = 1,7142 = 98,22^\circ.$$

Заметим, что θ_{\min} , которая численно оценивалась в конце временного интервала, с хорошей точностью совпадает с начальным значением θ , что, во-первых, не удивительно, поскольку в начальный

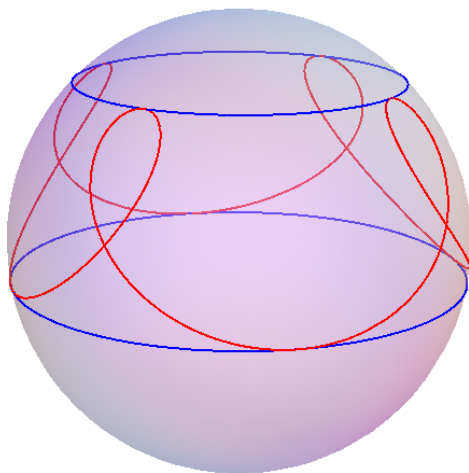


Рис. 7

момент $\dot{\theta} = 0$, а во-вторых, указывает на разумную точность вычислительной процедуры.

2. Траектория, которую описывает центр тяжести тела на сфере радиуса OC и с центром в точке O , представлена на рисунке 7.

Как видно из рисунка, траектория центра масс соответствует одному из трёх возможных и описанных в литературе типов траекторий — «кривая с петлями». Вычисления показывают, что время между каждыми двумя максимумами θ , $\tau = 1,2958$ с.

3. Найдём длину пути пройденного центром масс. Для момента времени $t_1 = 5$ с численное интегрирование даёт:

$$S_1 = 6,0988 \text{ м.}$$

Длина пути S_τ , где $\tau = 1,2958$ с — время, за которое точка C проходит путь между двумя максимумами равна $S_\tau = 1,5532$ с. За 1 час точка C целиком проходит 2778 таких участков кривой длины S_τ каждый. За оставшиеся 0,3747 с центр масс проходит $S_{\text{ext}} = 0,3267$ м.

Таким образом, длина пути центра масс за 1 час составляет:

$$S_2 = 2778 \cdot S_\tau + S_{\text{ext}} = 4315,06 \text{ м.}$$

Задача 5. Оби Ван Дер Поль

1. Проинтегрируем уравнение численно. Приведём ответ в виде графика и таблицы.

| | | | | | |
|-----|-------|--------|--------|---------|---------|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| x | 1,298 | 0,4212 | -1,635 | -1,744 | -0,8787 |
| t | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| x | 1,187 | 1,933 | 1,246 | -0,3296 | -2,008 |

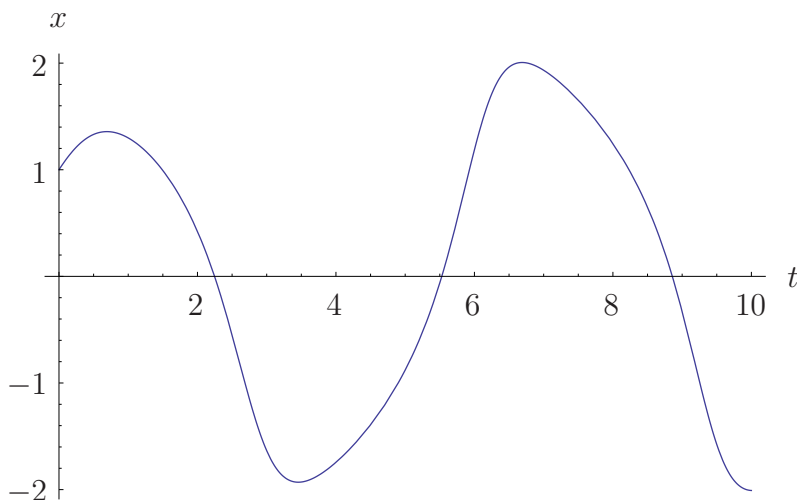


Рис. 8

2. Чтобы найти период и амплитуду устоявшихся колебаний проинтегрируем уравнение в течение более продолжительного времени. Заметим, что колебания устанавливаются практически за один период (рис. 9). Определим период и амплитуду с требуемой точностью (например, найдя координаты максимумов):

$$T_1 = 6,663, \quad A_1 = 2,009.$$

3. Уравнение осциллятора Ван-дер-Поля является частным случаем уравнения Лиенара:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

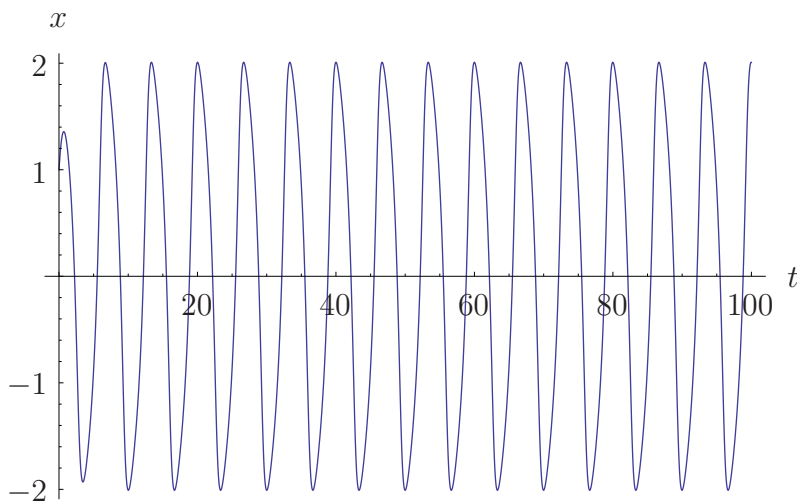


Рис. 9

где $f(x)$ — чётная, а $g(x)$ — нечётная функции. Если $F'(x) = f(x)$, то уравнение можно преобразовать к виду:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + F(x)) = -g(x).$$

Тогда обозначая $z = \dot{x} + F(x)$, получим искомую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) + z, \\ \dot{z} = -g(x). \end{cases}$$

Для осциллятора Ван-дер-Поля эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(x - x^3/3 - y), \\ \dot{y} = x/\mu, \end{cases} \quad (3)$$

где $y = -z/\mu$.

4. При $\mu \ll 1$ уравнение колебаний локально совпадает с уравнением гармонических колебаний (вкладом трения можно пренебречь на временах, сопоставимых с периодом колебаний). Таким образом,

период устоявшихся колебаний совпадает с периодом осциллятора $\ddot{x} + x = 0$:

$$T_0 = 2\pi.$$

Тем не менее, при $\mu > 0$ система всё равно содержит предельный цикл. Чтобы найти его амплитуду, преобразуем уравнение осциллятора, домножив его на \dot{x} :

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{x} + \dot{x}x &= \mu(1 - x^2)\dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right) &= \mu(\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^2) \end{aligned}$$

Полагая $x = A \cos t$, усредним уравнение по периоду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right) &= \mu \left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{8} \right) \\ \frac{d}{dt} A^2 &= \mu \frac{A^2}{4} (4 - A^2). \end{aligned} \quad (4)$$

У этого уравнения есть две предельные точки $A^2 = 0$ и $A^2 = 4$, причём первая неустойчивая, а вторая устойчивая. Следовательно, установившаяся амплитуда $A_0 = 2$.

5. Проанализируем полученную систему (3). Для этого изобразим на фазовой плоскости xy нулевые изоклины — кривые, для которых $\dot{x} = 0$ или $\dot{y} = 0$. Этими кривыми будут являться кубическая парабола $y = x - x^3/3$ и ось ординат $x = 0$ (рис. 10). Нулевые изоклины разделяют области, в которых (\dot{x}, \dot{y}) имеют постоянные сигнатуры. Таким образом, \dot{y} положительно в правой полуплоскости и отрицательно в левой, а \dot{x} больше нуля под параболой и отрицательно над параболой. Также, так как $\mu \gg 1$, $|\dot{x}| \gg |\dot{y}|$ за исключением узкой области вблизи кубической параболы (рис. 10), что приводит к тому, что части кубической параболы с отрицательным наклоном будут устойчивыми (притягивающими), а средняя часть с положительным наклоном — неустойчивой.

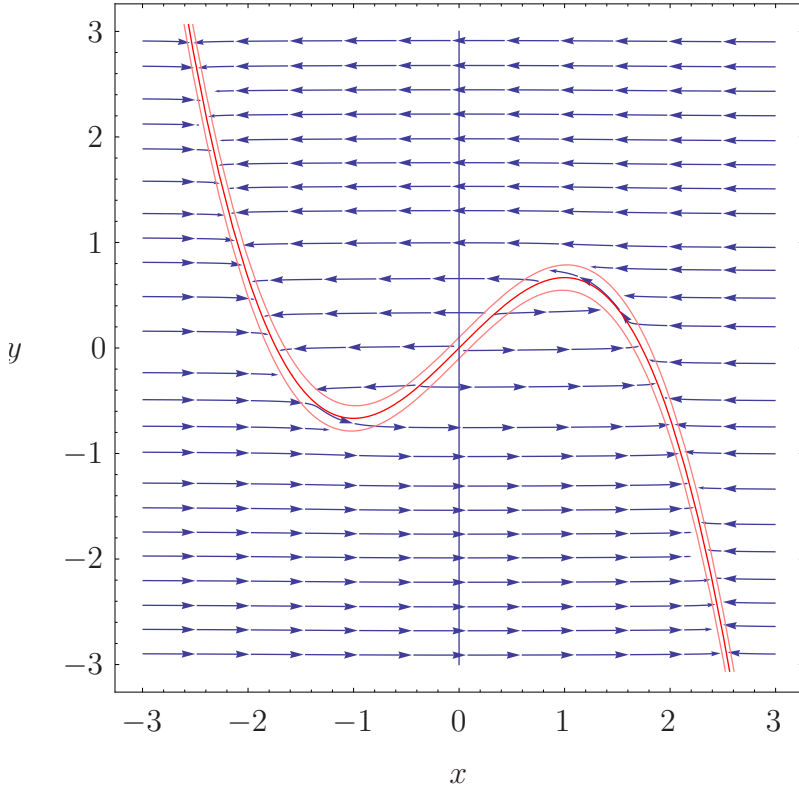


Рис. 10

После такого анализа векторного поля системы не составляет труда понять вид предельного цикла. Действительно, где бы мы не выбрали начальную точку, вначале систему притянет на одну из устойчивых ветвей кубической параболы, после чего система будет двигаться вдоль ветви к одному из экстремумов параболы, дойдя до которого, соскочит на другую ветвь (рис. 11).

Найдём амплитуду подобных предельных колебаний. Экстремумы функции $y(x) = x - x^3/3$ достигаются в точках -1 и 1 и равны $-2/3$ и $2/3$ соответственно. Второй корень уравнения $y(x) = -2/3$ равен $x = 2$ (а $y(-2) = 2/3$). Следовательно $A_\infty = 2$.

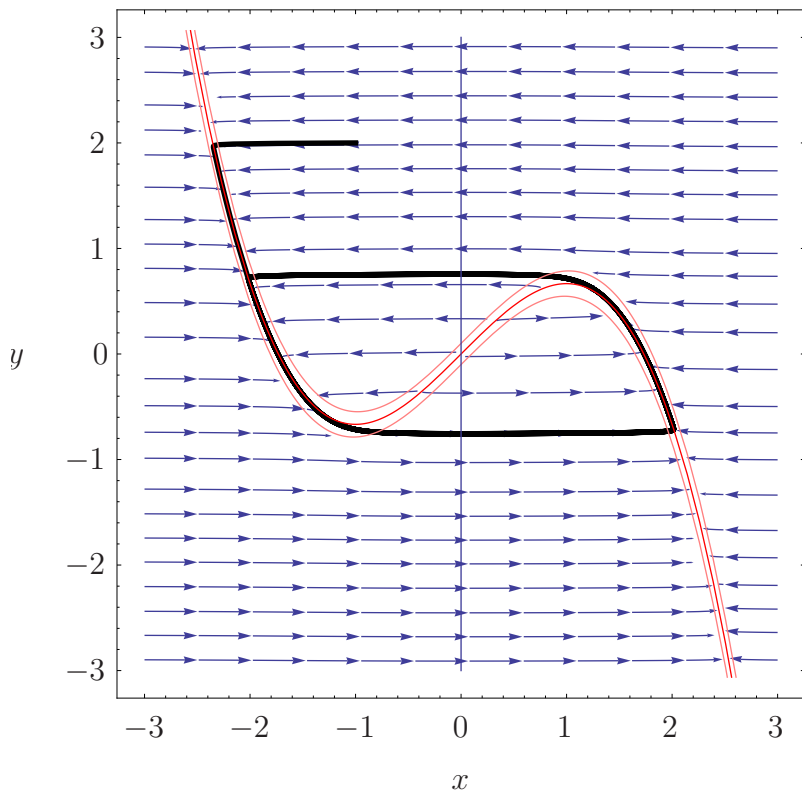


Рис. 11

Чтобы найти период, заметим, что система достаточно долго движется вдоль ветви параболы и за пренебрежимо малое время перескакивает с ветви на ветвь. Тогда периодом будет являться удвоенный интеграл:

$$\begin{aligned}
 T_{\infty} &= 2 \int \frac{dy}{\dot{y}} = 2 \int_2^1 \frac{(1-x^2)dx}{x/\mu} = \\
 &= 2\mu \left(\frac{3}{2} - \ln 2 \right) = \mu(3 - 2 \ln 2) = 1,614 \mu.
 \end{aligned}$$

6. Разложим уравнение (4) вблизи точки $A_0 = 2$, используя обозначение $\Delta A = A - A_0$

$$2A \frac{d}{dt} \Delta A = \mu \frac{A^2}{4} (4 - (2 + \Delta A)^2),$$

$$\frac{d}{dt} \Delta A = -\mu \frac{A_0^2}{2} \Delta A = -2\mu \Delta A.$$

Таким образом, вблизи A_0 амплитуда ведёт себя как

$$A = A_0 + \Delta A_0 e^{-2\mu t}.$$

Время, за которое отклонение амплитуды уменьшается вдвое, найдём из условия:

$$e^{-2\mu\tau} = \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad \tau = \frac{\ln 2}{2\mu} = \frac{0,3466}{\mu}.$$

Примечание. Заметим, что при $\mu \rightarrow 0$ характерное время установления колебаний $\tau \rightarrow \infty$. В результате, при выполнении пункта 4 численно, а не аналитически, есть опасность, выбрав достаточно малое μ , не дожидаться установления колебаний и значительно ошибиться в оценке A_0 .

Задача 6. Троллейбусные салочки

1. На все остановки суммарно в среднем приходит $Q_1 = 10p$ человек в минуту. С другой стороны, средняя скорость попадания пассажиров в троллейбусы не может превысить $Q_2 = 2$ человека в минуту. Из условия $Q_1 < Q_2$ находим, что при

$$p \geq k/n = p_{\text{кр}} = 0,2$$

троллейбусы не будут успевать забирать всех людей с остановки, и их средняя скорость движения по маршруту будет стремиться к нулю.

2. Нетрудно понять, откуда берётся эффект кучкования транспорта. Если в силу случайных флуктуаций появления людей на остановках второй троллейбус начнёт догонять первый, то он будет в среднем

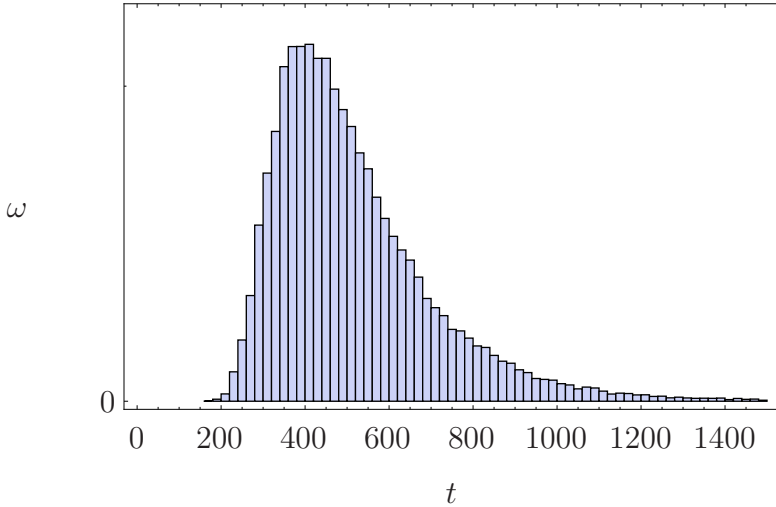


Рис. 12

двигаться быстрее, так как перед ним будет меньше остановок и на этих остановках будет скапливаться не так много людей по сравнению с другим троллейбусом. Получившаяся положительная обратная связь будет дестабилизировать изначально равномерное распределение троллейбусов по маршруту и приведёт, в конечном итоге, к тому, что расстояние между троллейбусами сократится до нуля.

Чтобы определить среднее время их сближения $\langle t \rangle$ при $p = 0,15$, смоделируем движение троллейбусов. Запуская моделирование достаточное число раз (N), соберём статистику по временам t .

Гистограмма распределения t показана на рисунке 12. Математическое ожидание $\langle t \rangle$ оценим как среднее по выборке:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N} \sum_i t_i = 516 \text{ мин.}$$

Чтобы оценить погрешность, оценим стандартное отклонение как

среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (t_i - \langle t \rangle)^2} = 195 \text{ мин.}$$

Воспользовавшись центральной предельной теоремой, найдём стандартное отклонение среднего значения как

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Таким образом, чтобы с вероятностью 99,9% попасть в требуемую погрешность ($\Delta \langle t \rangle = 0,05 \cdot \langle t \rangle \approx 26$ мин), нужно взять N больше, чем

$$N_{\min} = \left(\frac{\sigma}{\Delta \langle t \rangle / 3} \right)^2 \approx 625.$$

Чтобы убедиться, что полученное значение σ отличается от настоящего не более, чем на 20%, сделаем ещё несколько раз по N прогонов и увидим, что значения требуемых коэффициентов не выходят за рамки погрешности.

Задача 7. Привет от гидрологов

Проанализируем размерности введённых величин:

| | | |
|------------------------------|----------|-----------|
| Скорость потока | v | LT^{-1} |
| Характерный размер частицы | d | L |
| Плотность частицы | ρ | ML^{-3} |
| Плотность воды | ρ_0 | ML^{-3} |
| Ускорение свободного падения | g | LT^{-2} |

Ранг матрицы размерностей A :

$$A = \begin{matrix} & L & T & M \\ \begin{matrix} v \\ d \\ \rho \\ \rho_0 \\ g \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, & \text{rang } A = 3. \end{matrix}$$

Таким образом, из 5 величин можно составить $5 - 3 = 2$ независимые безразмерные комбинации:

$$C_1 = dV^{-\alpha}\rho^{-\beta}g^{-\gamma} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Из первого соотношения имеем выражения для размерностей:

$$d = C_1 V^\alpha \rho^\beta g^\gamma, \quad \text{или} \quad [L] = [LT^{-1}]^\alpha [ML^{-3}]^\beta [LT^{-2}]^\gamma.$$

Откуда, решая систему уравнений, имеем $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$. В совокупности со второй безразмерной комбинацией это даёт:

$$d = f\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{v^2}{g}.$$

Анализ размерностей не позволяет найти функцию f , но она нам и не нужна. Окончательно, для массы, переносимых потоком частиц, имеем

$$m \propto d^3 \propto v^6,$$

что для гидрологов известно как закон Эри.