УДК 519.2

Ю. И. Скалько

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Задача Римана о распаде разрыва в случае многих пространственных переменных

В работе изложено решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных. Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

Ключевые слова: распад разрыва, условия сопряжения, гиперболические системы, обобщенные функции, задача Коши, матрица-функция Грина, характеристики, инварианты Римана, уравнения упругой динамики.

Y. I. Skalko

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Riemann problem of a discontinuity decay in the case of several spatial variables

The paper presents the solution of the generalized Riemann problem of a discontinuity decay of for hyperbolic systems of linear first order differential equations with constant coefficients and any number of spatial variables. The proposed algorithm reduces the problem of finding the values of the variables in both sides of the discontinuity surface of the initial data to the system of algebraic equations with the right-hand side depending on the values of the variables at the initial time in the finite number of points.

Key words: decay gap, junction conditions, hyperbolic systems, generalized functions, Cauchy problem, Green's matrix function, characteristics, Riemann invariants, elastic dynamics equations.

1. Введение

Многие эволюционные процессы в физике, биологии, экономике и других прикладных областях моделируются гиперболическими системами линейных дифференциальных уравнений первого порядка. При построении численных алгоритмов решения краевых задач для таких систем уравнений, с использованием аппроксимации решения кусочно-гладкими функциями, ключевым моментом является решение задачи Римана о распаде разрыва. В случае одной пространственной переменной различными авторами [1], [2], [3] предложен ряд методов решения задачи Римана. По сути, все эти методы связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают. И задача Римана, чаще всего, решается в предположении, что вблизи разрыва решение представляет собой плоскую волну, движущуюся вдоль нормали к поверхности разрыва [1], [2], [4]. Понятно, что такой подход далеко не во всех случаях является обоснованным.

В работе будет приведено решение задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с произвольным количеством пространственных переменных.

2. Постановка задачи

Задачу Римана о распаде разрыва будем рассматривать в следующей постановке. Необходимо найти решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in R^N, \tag{1}$$

с начальными данными

$$\mathbf{u}(t=0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \tag{2}$$

которые всюду непрерывны, кроме гиперплоскости $\Gamma : x_1 = 0$. При этом должны выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных по обе стороны гиперплоскости Γ, т.е. $\mathbf{u}(t,\, x_1=-0, x_2, ..., x_N)$ и $\mathbf{u}(t,\, x_1=+0, x_2, ..., x_N)$:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}(t,\, x_1=-0, x_2, ..., x_N),\, \mathbf{u}(t,\, x_1=+0, x_2, ..., x_N)) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

В качестве примера соотношений, связывающих значения переменных $\mathbf{u}(t,\, x_1=-0, x_2, ..., x_N)$ и $\mathbf{u}(t,\, x_1=+0, x_2, ..., x_N)$, можно рассмотреть для случая системы уравнений упругой динамики *условия полного слипания*, состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость Γ непрерывны компоненты вектора смещений и непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты тензора напряжений. Или *условия проскальзывания без трения*, состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость Γ непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты вектора смещений, непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты тензора напряжений, тангенциальные компоненты сил, действующих по обе стороны гиперплоскости, равны 0.

Сформулированную постановку будем, следуя [1], называть обобщенной задачей Римана о распаде разрыва. Обобщенная задача Римана отличается от классической задачи Римана тем, что в классической задаче начальные данные предполагаются константами по обе стороны от гиперплоскости, в обобщенной задаче Римана начальные данные по обе стороны от гиперплоскости Γ могут быть произвольными непрерывными функциями.

3. Фундаментальное решение

В дальнейшем изложении будут использоваться понятия и утверждения теории обобщенных функций, изложение которой можно найти, например, в [5], [6] или [7].

Определим пространство основных вектор-функций $\boldsymbol{\mathscr{S}}\left(R^N\right)$. Элементами этого пространства будут M-мерные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_M)$, компоненты которых $\varphi_1(\mathbf{y}), ..., \varphi_M(\mathbf{y})$ принадлежат пространству $\mathscr{S}\left(R^N\right)$, которое состоит из функций класса $C^\infty\left(R^N\right)$, убывающих при $|y| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|y|^{-1}$.

Определение 1. Обобщенными вектор-функциями $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_M) \in \boldsymbol{\mathscr{S}'}\left(R^N\right)$ будем называть линейные непрерывные функционалы на векторном основном пространстве $\boldsymbol{\mathscr{S}}\left(R^N\right)$. При этом функционал $\mathbf{f}$ действует на основную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_M)$ по формуле $(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) = (f_1, \varphi_1) + ... + (f_M, \varphi_M)$.

Определение 2. Обобщенным решением для системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{4}$$

будем называть обобщенную функцию $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) \in \boldsymbol{\mathscr{S}'}\left(R^{N+1}\right)$, удовлетворяющую этому уравнению в обобщенном смысле, т.е. для произвольной основной функции $\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x}) \in \boldsymbol{\mathscr{S}}\left(R^{N+1}\right)$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \boldsymbol{\varphi}\right) = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}),$$

где $\mathbf{A}_i$ – матрицы коэффициентов системы уравнений (4) размера $(M \times M)$.

В дальнейшем будем полагать, что каждая из матриц $\mathbf{A}_i$ имеет полный набор левых собственных векторов и, следовательно, представима в виде

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i \boldsymbol{\Lambda}_i \boldsymbol{\Omega}_i, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_i$ – диагональная матрица собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_i$, упорядоченных по не убыванию,
$\boldsymbol{\Omega}_i$ – матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_i$, соответствующие собственным числам $\boldsymbol{\Lambda}_i$,
$\mathbf{R}_i = \boldsymbol{\Omega}_i^{-1}$ – матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_i$.

Определение 3. Фундаментальным решением оператора задачи (4) называется обобщенная матрица-функция $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) \in \mathscr{S}' \left(R^{N+1}\right)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} = \mathbf{I}\, \delta(t, \mathbf{x}), \tag{6}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица $(M \times M)$.

Определение 4. Сверткой $\mathbf{G} * \mathbf{f}$ обобщенной матрицы-функции $\mathbf{G} = G_{ij} \in \mathscr{S}'$ и обобщенной вектор-функции $\mathbf{f} = f_j \in \mathscr{S}'$ будем называть обобщенную вектор-функцию $\mathbf{u} = u_i \in \mathscr{S}'$, такую что $u_i = \sum\limits_{j=1}^{M} G_{i,j} * f_j$, где $G_{i,j} * f_j$ – свертка $G_{i,j}$ и f_j, как обобщенных функций из $\mathscr{S}'$.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathscr{S}'$ таково, что свертка $\mathbf{G} * \mathbf{f}$ существует в $\mathscr{S}'$. Тогда решение уравнения (4) существует в $\mathscr{S}'$ и дается формулой*

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} * \mathbf{f}. \tag{7}$$

Это решение единственно в классе тех функций из $\mathscr{S}'$, для которых существует свертка с $\mathbf{G}$.

Доказательство Пользуясь формулой дифференцирования свертки, получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial (\mathbf{G} * \mathbf{f})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial (\mathbf{G} * \mathbf{f})}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} \right) * \mathbf{f} = \delta(t, \mathbf{x}) * \mathbf{f} = \mathbf{f}.$$

Поэтому формула (7) действительно дает решение уравнения (4). Докажем единственность решения уравнения (4) в классе тех обобщенных функций из $\mathscr{S}'$, для которых свертка с $\mathbf{G}$ существует в $\mathscr{S}'$. Для этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{0}.$$

имеет только нулевое решение в этом классе. Но это действительно так в силу

$$\mathbf{u} = \delta(t,\ \mathbf{x})\, \mathbf{I} * \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} \right) * \mathbf{u} = \mathbf{G} * \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) = \mathbf{0}.$$

Построим фундаментальное решение оператора задачи (4). Обозначим через $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}) = F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$ – преобразование Фурье $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ по пространственным переменным. Выполним преобразование Фурье уравнений (6) по пространственным переменным.

Учитывая, что $F_{\mathbf{x}}\left[\dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_j}\right] = -i\xi_j F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$, для обобщенной функции $\mathbf{V}(t,\boldsymbol{\xi})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - i\sum_{j=1}^{N}\xi_j \mathbf{A}_j \mathbf{V} = \mathbf{I}\,\delta(t)\,. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$\mathbf{V}(t,\ \boldsymbol{\xi}) = \theta(t)\exp\left(i\sum_{j=1}^{N}\xi_j \mathbf{A}_j t\right),$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0; \\ 0, & \text{если } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Следуя определению матричной экспоненты,

$$\exp\left(i\sum_{j=1}^{N}\xi_j \mathbf{A}_j t\right) = \prod_{j=1}^{N}\exp(i\xi_j \mathbf{A}_j t) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}\prod_{j=1}^{N}(-i\xi_j)^{\alpha_j}.$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ – целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j (мультииндекс), $|\boldsymbol{\alpha}| = (\alpha_1 + ... + \alpha_N)$, $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$ – матрицы размера $M \times M$, являющиеся полиномами матриц $\mathbf{A}_j$ степени $|\boldsymbol{\alpha}|$.

Учтем (5), тогда

$$\exp(i\xi_j \mathbf{A}_j t) = \mathbf{R}_j \exp(i\xi_j \boldsymbol{\Lambda}_j t)\,\boldsymbol{\Omega}_j\,.$$

Следовательно:

$$\exp\left(i\sum_{j=1}^{N}\xi_j \mathbf{A}_j t\right) = \prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j\exp(i\xi_j \boldsymbol{\Lambda}_j t)\,\boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}\prod_{j=1}^{N}(-i\xi_j)^{\alpha_j}\,.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получим матрицу-функцию Грина:

$$\mathbf{G}(t,\mathbf{x}) = \theta(t)\left(\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j\delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\,\boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}D^{\boldsymbol{\alpha}}\delta(\mathbf{x})\right).$$

Здесь $\delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)$ – диагональные матрицы, в k-й строке которых стоит обобщенная функция $\delta\left(x_j - \lambda_j^k t\right)$, λ_j^k – k-е собственное число матрицы $\mathbf{A}_j$,

$D^{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_N^{\alpha_N}}$ – оператор дифференцирования по пространственным переменным.

Рассмотрим сомножитель $\mathbf{R}_j\delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\,\boldsymbol{\Omega}_j$. Обозначим через $\mathbf{D}^k$ – квадратную матрицу размера $M \times M$, все элементы которой равны 0, кроме k-го элемента главной диагонали, равного 1. Тогда

$$\mathbf{R}_j\delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\,\boldsymbol{\Omega}_j = \sum_{k=1}^{M}\mathbf{R}_j\mathbf{D}^k\boldsymbol{\Omega}_j\delta\left(x_j - \lambda_j^k t\right) = \sum_{k=1}^{M}\mathbf{C}_j^k\delta\left(x_j - \lambda_j^k t\right).$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j\delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\,\boldsymbol{\Omega}_j =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{M}\sum_{k_2=1}^{M}...\sum_{k_N=1}^{M}\mathbf{C}_1^{k_1}\mathbf{C}_2^{k_2}...\mathbf{C}_N^{k_N}\delta\left(x_1-\lambda_1^{k_1}t\right)\delta\left(x_2-\lambda_2^{k_2}t\right)...\delta\left(x_N-\lambda_N^{k_N}t\right)$$

Если определить:
$\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_N)$ – мультииндекс, целочисленный вектор с составляющими $k_j=1:M$,
$\mathbf{C}^{\mathbf{k}}=\mathbf{C}_1^{k_1}\mathbf{C}_2^{k_2}...\mathbf{C}_N^{k_N}$ – многоиндексный массив матриц,
$\lambda^{\mathbf{k}}=\left(\lambda_1^{k_1},\lambda_2^{k_2},...,\lambda_N^{k_N}\right)$ – многоиндексный массив векторов, то

$$\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j-\mathbf{\Lambda}_jt\right)\mathbf{\Omega}_j=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}^{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x}-\lambda^{\mathbf{k}}t\right),$$

тогда

$$\mathbf{G}\left(t,\mathbf{x}\right)=\theta\left(t\right)\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}^{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x}-\lambda^{\mathbf{k}}t\right)+\theta\left(t\right)\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2}t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}D^{\boldsymbol{\alpha}}\delta\left(\mathbf{x}\right). \tag{9}$$

Обратим внимание на следующий факт, который будет использован в дальнейшем. Поскольку $\mathbf{C}^{k_j}=\mathbf{R}_j\mathbf{D}^{k_j}\mathbf{\Omega}_j$, то

$$\sum_{k_j=1}^{M}\mathbf{C}^{k_j}=\mathbf{R}_j\left(\sum_{k_j=1}^{M}\mathbf{D}^{k_j}\right)\mathbf{\Omega}_j=\mathbf{R}_j\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}_j=\mathbf{I}. \tag{10}$$

4. Задача Римана

Пусть $\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ – решение задачи Римана (1), (2), (3). Обозначим через S – поверхность, по которой $\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ терпит разрывы, $\mathbf{n}=(n_t,\mathbf{n_x})=(n_t,n_1,...,n_N)$ – единичная нормаль к S, $[\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)]$ – скачок при переходе через S против нормали $\mathbf{n}$.

Определим функции

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x}) = \begin{cases}\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right), \text{ если } t\geqslant 0, x_1\leqslant 0,\\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } t,\mathbf{x},\end{cases} \qquad \mathbf{u}^+(t,\mathbf{x}) = \begin{cases}\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right), \text{ если } t\geqslant 0, x_1\geqslant 0,\\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } t,\mathbf{x},\end{cases}$$

$$\mathbf{u}_0^-(t,\mathbf{x}) = \begin{cases}\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x}\right), \text{ если } x_1\leqslant 0,\\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } \mathbf{x},\end{cases} \qquad \mathbf{u}_0^+(t,\mathbf{x}) = \begin{cases}\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x}\right), \text{ если } x_1\geqslant 0,\\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } \mathbf{x},\end{cases}$$

$$\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x}) = \theta(t)\mathbf{u}\left(t,x_1=-0,x_2,...,x_N\right), \qquad \mathbf{v}^+(t,\mathbf{x}) = \theta(t)\mathbf{u}\left(t,x_1=+0,x_2,...,x_N\right).$$

Покажем, что $\mathbf{u}^-\left(t,\mathbf{x}\right)$, рассматриваемая как обобщенная функция из $\mathscr{S}'$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i^-\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial x_i}=\mathbf{u}_0^-\cdot\delta_{t=0}-\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^-\cdot\delta_{x_1=0}+\left(\left[\mathbf{u}^-\right]n_t+\sum_{i=1}^{N}n_i\mathbf{A}_i^-\left[\mathbf{u}^-\right]\right)\cdot\delta_S. \tag{11}$$

Действительно, при всех $\boldsymbol{\varphi}\left(t,\mathbf{x}\right)\in\mathscr{S}$ имеем цепочку равенств:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i^-\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial x_i},\,\boldsymbol{\varphi}\right)=-\int\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial t};\mathbf{u}^-\right)+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial x_i};\mathbf{A}_i^-\mathbf{u}^-\right)\right)dtd\mathbf{x}\ldots=$$

$$=\int\left(\boldsymbol{\varphi}^T;\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i^-\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial x_i}\right)dtd\mathbf{x}+\int\left(\boldsymbol{\varphi}^T\left(0,\mathbf{x}\right);\mathbf{u}^-\left(0,\mathbf{x}\right)\right)d\mathbf{x}\ldots-$$

$$-\int_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\varphi}^T;\mathbf{A}_1^-\mathbf{u}^-\right)dtd\Gamma+\int_{S}\left(\boldsymbol{\varphi}^T;\left(\left[\mathbf{u}^-\right]n_t+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i^-\left[\mathbf{u}^-\right]n_i\right)\right)dS\ldots=$$

$$=\int\left(\boldsymbol{\varphi}^T\left(0,\mathbf{x}\right);\mathbf{u}_0^-\left(\mathbf{x}\right)\right)d\mathbf{x}-\int_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\varphi}^T;\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^-\right)dtd\Gamma+\int_{S}\left(\boldsymbol{\varphi}^T;\left[\mathbf{u}^-\right]n_t+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i^-\left[\mathbf{u}^-\right]n_i\right)dS,$$

откуда и вытекает равенство (11).

В силу произвольности $\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}$, равенство (11) эквивалентно двум равенствам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial t} + \sum\limits_i^N \mathbf{A}_i^- \dfrac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_i} = \mathbf{u}_0^- \cdot \delta_{t=0} - \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- \cdot \delta_{x_1=0}, \\ \left(\left[\mathbf{u}^-\right] n_t + \sum\limits_i^N n_i \mathbf{A}_i^- \left[\mathbf{u}^-\right] \right) \cdot \delta_S = 0. \end{cases} \tag{12}$$

По сути, второе равенство (12) задает поверхности S, вдоль которых происходит разрыв решения задачи Римана и условия Гюгонио на них: $\left[\mathbf{u}^-\right] n_t + \sum\limits_i^N n_i \mathbf{A}_i^- \left[\mathbf{u}^-\right] = 0$.

Аналогично, $\mathbf{u}^+(t,\mathbf{x})$, рассматриваемая как обобщенная функция из $\mathscr{S}'$, удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t} + \sum\limits_i^N \mathbf{A}_i^+ \dfrac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_i} = \mathbf{u}_0^+ \cdot \delta_{t=0} + \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \cdot \delta_{x_1=0}, \\ \left(\left[\mathbf{u}^+\right] n_t + \sum\limits_i^N n_i \mathbf{A}_i^+ \left[\mathbf{u}^+\right] \right) \cdot \delta_S = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Докажем три леммы, которые будут существенны в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $u(\mathbf{x})$ – локально интегрируемая функция в R^N. Тогда*

$$\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x}) \cdot \delta_{t=0} = \theta(t) u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t).$$

Доказательство

Согласно определению свертки обобщенных функций [7], для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x},t) \in \mathscr{S}\left(R^{N+1}\right)$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau) \in \mathscr{S}\left(R^{2N+2}\right)$, сходящейся к 1 в R^{2N+2} (с. 133 монографии [7]), справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} &(\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x}) \cdot \delta_{t=0}, \varphi(\mathbf{x},t)) \ldots \overset{def}{=} \\ &\overset{def}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) \cdot u(\mathbf{y}) \cdot \delta_{\tau=0},\ \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\, \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}, t+\tau)\right) \ldots = \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\theta(t)\, u(\mathbf{y}) \cdot \delta_{\tau=0},\ \eta_k(\mathbf{a}t,\mathbf{y},t,\tau)\, \varphi(\mathbf{a}t+\mathbf{y}, t+\tau)\right) \ldots = \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Gamma:\tau=0} \theta(t)\, u(\mathbf{y})\, \eta_k(\mathbf{a}t,\mathbf{y},t,0)\, \varphi(\mathbf{a}t+\mathbf{y},t)\, d\Gamma \ldots = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\, u(\mathbf{y})\, \varphi(\mathbf{a}t+\mathbf{y},t)\, d\mathbf{y}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\, u(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)\, \varphi(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x}dt \ldots = \\ &= (\theta(t)\, u(\mathbf{x}-\mathbf{a}t), \varphi(\mathbf{x},t)). \end{aligned}$$

Тем самым утверждение леммы доказано.

Лемма 3. *Пусть $v(t,\mathbf{x})$ – локально интегрируемая функция в R^{N+1} и $v(t,\mathbf{x}) = 0$ при $t \leqslant 0$, тогда если $a_1 \neq 0$, то*

$$\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t,\mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma:x_1=0} = \frac{1}{|a_1|} \theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right),$$

если $a_1 = 0$, то

$$\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t,\mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma:x_1=0} = 0.$$

Доказательство Если $a_1 \neq 0$, для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{S}\left(R^{N+1}\right)$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \in \mathscr{S}\left(R^{2N+2}\right)$, сходящейся к 1 в R^{2N+2}, справедлива следующая цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
&(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t) * v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0},\ \varphi(\mathbf{x},t))\ \ldots \overset{def}{=} \\
&\overset{def}{=} \lim_{k\to\infty}(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)\cdot v(\tau,\mathbf{y})\cdot\delta_{\Gamma:y_1=0},\, \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},t+\tau))\ldots = \\
&= \lim_{k\to\infty}(\theta(t)v(\tau,\mathbf{y})\cdot\delta_{\Gamma:y_1=0},\, \eta_k(\mathbf{a}t,\mathbf{y},t,\tau)\,\varphi(\mathbf{a}t+\mathbf{y},t+\tau))\ldots = \\
&= \int\limits_{\mathbf{\Gamma}:y_1=0} \theta(t')v(\tau',\mathbf{y})\,\varphi\left(\mathbf{a}t'+\mathbf{y},t'+\tau'\right)\,dy_2,\ldots,dy_N,dt'd\tau'\ldots = \\
&= \frac{1}{|a_1|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right)v\left(t-\frac{x_1}{a_1},\mathbf{x}-\frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right)\varphi(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}dt\ldots = \\
&= \frac{1}{|a_1|}\left(\theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right)v\left(t-\frac{x_1}{a_1},\mathbf{x}-\frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right),\ \varphi(\mathbf{x},t)\right).
\end{aligned}
$$

Тем самым утверждение леммы для $a_1 \neq 0$ доказано.

Пусть $v(t, \mathbf{x}) = 0$ при $t \leqslant 0$.

Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $a_1 > 0$, то $\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t) * v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0} = 0$.

Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $x_1/t \leqslant a_1 < 0$, то $\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t) * v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0} = 0$.

В силу непрерывности свертки для $t > 0$, $x_1 < 0$

$$
\begin{aligned}
\theta(t)\cdot\delta(x_1)\cdot\delta(x_2-a_2t)\ldots\delta(x_N-a_Nt) * v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0} = \ldots \\
= \lim_{a_1\to 0}(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t) * v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0}) = 0.
\end{aligned}
$$

Точно так же для $t > 0$, $x_1 > 0$

$$
\begin{aligned}
\theta(t)\cdot\delta(x_1)\cdot\delta(x_2-a_2t)\ldots\delta(x_N-a_Nt) * v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0} = \ldots \\
= \lim_{a_1\to 0}(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t) * v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0}) = 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы для произвольных $\mathbf{a}$.

5. Задача Римана, одна пространственная переменная

В случае одной пространственной переменной формула (9), задающая фундаментальное решение оператора задачи принимает вид:

$$
\mathbf{G}(t,x) = \sum_{k=1}^{M}\mathbf{R}\mathbf{D}^k\mathbf{\Omega}\delta\left(x-\lambda^k t\right).
$$

Решение первого уравнения системы (12) можно выписать в виде свертки:

$$
\mathbf{u}^-(t,x) = \theta(-x)\sum_{k=1}^{M}\mathbf{R}^-\mathbf{D}^k\mathbf{\Omega}^-\delta\left(x-\lambda_-^k t\right) * \left(\mathbf{u}_0^-\cdot\delta_{t=0}-\mathbf{A}^-\mathbf{v}^-\cdot\delta_{x=0}\right). \tag{14}
$$

Используя обозначение $\mathbf{C}_-^k = \mathbf{R}^-\mathbf{D}^k\mathbf{\Omega}^-$, и на основании леммы 2 и леммы 3, (14) можем записать

$$
\mathbf{u}^-(t,x) = \theta(t)\,\theta(-x)\left(\sum_{k:\,x\leqslant\lambda_-^k t}\mathbf{C}_-^k\mathbf{u}_0^-\left(x-\lambda_-^k t\right) + \sum_{k:\,x>\lambda_-^k t}\frac{1}{\lambda_-^k}\mathbf{C}_-^k\mathbf{A}^-\mathbf{v}^-\left(t-x/\lambda_-^k\right)\right). \tag{15}
$$

Поскольку $\mathbf{A}^{-} = \mathbf{R}^{-}\mathbf{\Lambda}^{-}\mathbf{\Omega}^{-}$, то $\dfrac{1}{\lambda_{-}^{k}}\mathbf{C}_{-}^{k}\mathbf{A}^{-} = \mathbf{C}_{-}^{k}$, и (15) можно переписать:

$$\mathbf{u}^{-}(t,x) = \theta(t)\,\theta(-x)\left(\sum_{k:\,x\leqslant\lambda_{-}^{k}t}\mathbf{C}_{-}^{k}\mathbf{u}_{0}^{-}\left(x-\lambda_{-}^{k}t\right) + \sum_{k:\,x>\lambda_{-}^{k}t}\mathbf{C}_{-}^{k}\mathbf{v}^{-}\left(t-x/\lambda_{-}^{k}\right)\right). \quad (16)$$

Пусть у матрицы $\mathbf{A}^{-}$ соответственно N^{-} – отрицательных, Z^{-} – нулевых и P^{-} – положительных собственных чисел. Умножим равенство (16) на левые собственные векторы-строки матрицы $\mathbf{A}^{-}$, соответствующие неотрицательным собственным числам. Получим $Z^{-}+P^{-}$ равенств:

$$\mathbf{l}_{k}^{-}\mathbf{u}^{-}(t,x) = \mathbf{l}_{k}^{-}\mathbf{u}_{0}^{-}\left(x-\lambda_{-}^{k}t\right);k,\ \lambda_{-}^{k}\geqslant 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{l}_{k}^{-}$ – k-я строка матрицы $\mathbf{\Omega}^{-}$. Равенства (17) отражают факт сохранения инвариантов Римана вдоль характеристик, соответствующих собственным числам $\lambda_{-}^{k}\geqslant 0$.

Переходя в равенстве (17) к пределу $x\to -0$, получаем

$$\mathbf{l}_{k}^{-}\mathbf{v}^{-}(t) = \mathbf{l}_{k}^{-}\mathbf{u}_{0}^{-}\left(-\lambda_{-}^{k}t\right);k,\ \lambda_{-}^{k}\geqslant 0\,. \quad (18)$$

Аналогично (14), решение первого уравнения системы (13) можно выписать в виде свертки:

$$\mathbf{u}^{+}(t,x) = \theta(x)\sum_{k=1}^{M}\mathbf{R}^{+}\mathbf{D}^{k}\mathbf{\Omega}^{+}\delta\left(x-\lambda_{+}^{k}t\right)*\left(\mathbf{u}_{0}^{+}\cdot\delta_{t=0}+\mathbf{A}^{+}\mathbf{v}^{+}\cdot\delta_{x=0}\right).$$

Введя обозначение $\mathbf{C}_{+}^{k} = \mathbf{R}^{+}\mathbf{D}^{k}\mathbf{\Omega}^{+}$, можем записать следующее:

$$\mathbf{u}^{+}(t,x) = \theta(t)\,\theta(x)\left(\sum_{k:\,x\geqslant\lambda_{+}^{k}t}\mathbf{C}_{+}^{k}\mathbf{u}_{0}^{+}\left(x-\lambda_{+}^{k}t\right) + \sum_{k:\,x<\lambda_{+}^{k}t}\mathbf{C}_{+}^{k}\mathbf{v}^{+}\left(t-x/\lambda_{+}^{k}\right)\right). \quad (19)$$

Пусть у матрицы $\mathbf{A}^{+}$ соответственно N^{+} – отрицательных, Z^{+} – нулевых и P^{+} – положительных собственных чисел. Умножим равенство (5) на левые собственные векторы-строки матрицы $\mathbf{A}^{+}$, соответствующие неположительным собственным числам. Получим $N^{+}+Z^{+}$ равенств:

$$\mathbf{l}_{k}^{+}\mathbf{u}^{+}(t,x) = \mathbf{l}_{k}^{+}\mathbf{u}_{0}^{+}\left(x-\lambda_{+}^{k}t\right);k,\ \lambda_{+}^{k}\leqslant 0, \quad (20)$$

где $\mathbf{l}_{k}^{+}$ - k-я строка матрицы $\mathbf{\Omega}^{+}$. Равенства (19) отражают факт сохранения инвариантов Римана вдоль характеристик, соответствующих собственным числам $\lambda_{+}^{k}\leqslant 0$.

Переходя в равенстве (19) к пределу $x\to +0$, получаем равенство

$$\mathbf{l}_{k}^{+}\mathbf{v}^{+}(t) = \mathbf{l}_{k}^{+}\mathbf{u}_{0}^{+}\left(-\lambda_{+}^{k}t\right);k,\ \lambda_{+}^{k}\leqslant 0\,. \quad (21)$$

Объединим равенства (18), (21) и добавим к ним условия сопряжения (3), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять значения решения задачи Римана по обе стороны границы раздела областей для неизвестных $\mathbf{v}^{-}(t)$ и $\mathbf{v}^{+}(t)$:

$$\begin{cases}\mathbf{l}_{k}^{-}\mathbf{v}^{-}(t) = \mathbf{l}_{k}^{-}\mathbf{u}_{0}^{-}\left(-\lambda_{-}^{k}t\right);k,\ \lambda_{-}^{k}\geqslant 0,\\ \mathbf{l}_{k}^{+}\mathbf{v}^{+}(t) = \mathbf{l}_{k}^{+}\mathbf{u}_{0}^{+}\left(-\lambda_{+}^{k}t\right);k,\ \lambda_{+}^{k}\leqslant 0,\\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{-}(t),\ \mathbf{v}^{+}(t)\right) = \mathbf{0}.\end{cases} \quad (22)$$

Для однозначного решения обобщенной задачи Римана о распаде разрыва необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (22) имела единственное решение.

Решим систему уравнений (22) и определим значение $\mathbf{v}^-(t)$ и $\mathbf{v}^+(t)$ при $t>0$ по обе стороны точки $x=0$.

Формулы (16) и (21) с полученными зависимостями $\mathbf{v}^-(t)$ и $\mathbf{v}^+(t)$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая одной пространственной переменной.

Рассмотрим прямую линию $x-\lambda_-^k t=0$, $\lambda_-^k<0$. Как следует из (16), решение задачи Римана при переходе через эту прямую терпит разрыв:

$$\left[\mathbf{u}^-(t,x)\right]=\mathbf{u}^-\left(t,x>\lambda_-^k t\right)-\mathbf{u}^-\left(t,x<\lambda_-^k t\right)=\mathbf{C}_-^k\left(\mathbf{v}^-(0)-\mathbf{u}_0^-(0)\right). \qquad (23)$$

Поскольку $\mathbf{C}_-^k=\mathbf{R}^-\mathbf{D}^k\boldsymbol{\Omega}^-$ и в матрице $\mathbf{R}^-\mathbf{D}^k$ все столбцы нулевые, кроме k-го, который равен k-му правому собственному вектору матрицы $\mathbf{A}^-$, то из (23) следует, что скачок $[\mathbf{u}^-(t,x)]$ постоянен вдоль прямой $x-\lambda_-^k t=0$, $\lambda_-^k<0$, и этот скачок пропорционален k-му правому собственному вектору матрицы $\mathbf{A}^-$.

Аналогично, вдоль прямых $x-\lambda_+^k t=0$, $\lambda_+^k>0$ распространяется разрыв:

$$\left[\mathbf{u}^+(t,x)\right]=\mathbf{u}^+\left(t,x>\lambda_+^k t\right)-\mathbf{u}^+\left(t,x<\lambda_+^k t\right)=\mathbf{C}_+^k\left(\mathbf{u}_0^+(0)-\mathbf{v}^+(0)\right).$$

Скачок $[\mathbf{u}^+(t,x)]$ постоянен вдоль прямой $x-\lambda_+^k t=0$, $\lambda_+^k>0$, и этот скачок пропорционален k-му правому собственному вектору матрицы $\mathbf{A}^+$.

6. Задача Римана, несколько пространственных переменных

Построим решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва, когда начальные данные по обе стороны гиперплоскости $x_1=0$ заданы полиномами степени P. Алгоритм решения в значительной степени аналогичен алгоритму, приведенному выше для случая одной пространственной переменной.

Рассмотрим первое уравнение системы (12). Фундаментальное решение оператора задачи задается формулой:

$$\mathbf{G}^-(t,\mathbf{x})=\theta(t)\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j^-\delta\left(\mathbf{I}x_j-\boldsymbol{\Lambda}_j^- t\right)\boldsymbol{\Omega}_j^-+\theta(t)\sum_{|\alpha|\geqslant 2}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha\delta(\mathbf{x}). \qquad (24)$$

Используя обозначение

$$\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j^-\delta\left(\mathbf{I}x_j-\boldsymbol{\Lambda}_j^- t\right)\boldsymbol{\Omega}_j^-=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x}-\lambda_-^{\mathbf{k}}t\right),$$

фундаментальное решение (24) представимо в виде

$$\mathbf{G}^-(t,\mathbf{x})=\theta(t)\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x}-\lambda_-^{\mathbf{k}}t\right)+\theta(t)\sum_{|\alpha|\geqslant 2}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha\delta(\mathbf{x}).$$

Решение первого уравнения системы (12) можно выписать в виде свертки:

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x})=\theta(-x_1)\mathbf{G}^-(t,\mathbf{x})*\left(\mathbf{u}_0^-\delta_{t=0}-\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^-\delta_{x_1=0}\right).$$

На основании утверждений леммы 2 и леммы 3, а также, учитывая, что $D^\alpha\delta(\mathbf{x})*\mathbf{u}_0^-(\mathbf{x})\cdot\delta(t)=D^\alpha\mathbf{u}_0^-(\mathbf{x})$, можем записать:

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x})=\theta(t)\,\theta(-x_1)\sum_{\mathbf{k}:\,x_1\leqslant\lambda_-^{k_1}t}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(\mathbf{x}-\lambda_-^{\mathbf{k}}t\right)+\theta(t)\,\theta(-x_1)\sum_{|\alpha|\geqslant 2}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha\mathbf{u}_0^-(\mathbf{x})\ldots+$$

$$+\theta\left(t\right)\theta\left(-x_1\right)\sum_{\mathbf{k}:\,x_1>\lambda_-^{k_1}t}\frac{1}{\lambda_-^{k_1}}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^-\left(t-\frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}},\mathbf{x}-\frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}}\boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}}\right). \qquad (25)$$

Если начальные данные по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ заданы полиномами степени P, то в правой части формулы (25) останется только конечное число слагаемых:

$$\mathbf{u}^-\left(t,\mathbf{x}\right)=\theta\left(t\right)\theta\left(-x_1\right)\sum_{\mathbf{k}:\,x_1\leqslant\lambda_-^{k_1}t}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(\mathbf{x}-\lambda_-^{\mathbf{k}}t\right)+\theta\left(t\right)\theta\left(-x_1\right)\sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^-D^\alpha\mathbf{u}_0^-\left(\mathbf{x}\right)\ldots+$$

$$+\theta\left(t\right)\theta\left(-x_1\right)\sum_{\mathbf{k}:\,x_1>\lambda_-^{k_1}t}\frac{1}{\lambda_-^{k_1}}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^-\left(t-\frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}},\mathbf{x}-\frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}}\boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}}\right). \qquad (26)$$

Переходя в (26) к пределу $x_1 \to -0$, получаем

$$\mathbf{I}\mathbf{v}^- - \sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1}<0}\frac{1}{\lambda_-^{k_1}}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1}t,x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right)\ldots+$$

$$+\sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^-D^\alpha\mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right).$$

Так как $\mathbf{C}^{\mathbf{k}} = \mathbf{C}^{k_1}\mathbf{C}^{k_2}...\mathbf{C}^{k_N}$, и учитывая (10), получаем, что

$$\mathbf{I}\mathbf{v}^- - \sum_{k_1:\,\lambda_-^{k_1}<0}\frac{1}{\lambda_-^{k_1}}\mathbf{C}_-^{k_1}\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1}t,x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right)\ldots+$$

$$+\sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^-D^\alpha\mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right).$$

Поскольку $\mathbf{A}_1^- = \mathbf{R}_1^-\boldsymbol{\Lambda}_1^-\boldsymbol{\Omega}_1^-$, то $\dfrac{1}{\lambda_-^{k_1}}\mathbf{C}_-^{k_1}\mathbf{A}_1^- = \mathbf{C}_-^{k_1}$, следовательно:

$$\sum_{k_1:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{k_1}\mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1}t,x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right)\ldots+$$

$$+\sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^-D^\alpha\mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right). \qquad (27)$$

Пусть у матрицы $\mathbf{A}_1^-$ соответственно N_1^- – отрицательных, Z_1^- – нулевых и P_1^- – положительных собственных чисел. Умножим равенство (27) на левые собственные векторы-строки матрицы $\mathbf{A}_1^-$, соответствующие неотрицательным собственным числам. Получим $Z_1^- + P_1^-$ равенств:

$$\mathbf{l}_{k_1}^-\mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k},\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{l}_{k_1}^-\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1}t,x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right)\ldots+$$

$$+\sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1}t^{|\alpha|}\mathbf{l}_{k_1}^-\mathbf{B}_\alpha^-D^\alpha\mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right),\;\; k_1,\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0. \qquad (28)$$

Аналогично, решение первого уравнения системы (13) можно выписать в виде свертки:

$$\mathbf{u}^+\left(t,\mathbf{x}\right)=\theta(x_1)\mathbf{G}^+\left(t,\mathbf{x}\right)*\left(\mathbf{u}_0^+\delta_{t=0}+\mathbf{A}_1^+\mathbf{v}^+\delta_{x_1=0}\right).$$

На основании утверждений леммы 2 и леммы 3, если начальные данные по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ заданы полиномами степени P, можем записать

$$\mathbf{u}^+(t,\mathbf{x}) = \theta(t)\,\theta(x_1) \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 \geqslant \lambda_+^{k_1} t} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(\mathbf{x} - \lambda_+^{\mathbf{k}} t\right) + \theta(t)\,\theta(x_1) \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+(\mathbf{x}) \ldots +$$

$$+\theta(t)\,\theta(x_1) \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 < \lambda_+^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \left(t - \frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}} \boldsymbol{\lambda}_+^{\mathbf{k}}\right). \tag{29}$$

Переходя в (29) к пределу $x_1 \to +0$, получаем

$$\sum_{k_1:\, \lambda_+^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{C}_+^{k_1} \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_+^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_+^{k_N} t\right) \ldots +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ (0, x_2, ..., x_N). \tag{30}$$

Пусть у матрицы $\mathbf{A}_1^+$ соответственно N_1^+ – отрицательных, Z_1^+ – нулевых и P_1^+ – положительных собственных чисел. Умножим равенство (30) на левые собственные векторы-строки матрицы $\mathbf{A}_1^+$, соответствующие неположительным собственным числам. Получим $N_1^+ + Z_1^+$ равенств:

$$\mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_+^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_+^{k_N} t\right) \ldots +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ (0, x_2, ..., x_N) k_1, \lambda_+^{k_1} \leqslant 0. \tag{31}$$

Объединим равенства (28), (31) и добавим к ним условия сопряжения (3), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять значения решения задачи Римана по обе стороны границы раздела областей для неизвестных $\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t,\mathbf{x})$:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{v}^- = &\sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_-^{k_N} t\right) + \\ &+ \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^- (0, x_2, ..., x_N); \quad k_1, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0, \\ \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{v}^+ = &\sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_+^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_+^{k_N} t\right) + \\ &+ \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ (0, x_2, ..., x_N); \quad k_1,\ \lambda_+^{k_1} \leqslant 0, \\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^-,\ \mathbf{v}^+\right) = &\ \mathbf{0}. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Для однозначного решения обобщенной задачи Римана о распаде разрыва необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (32) имела единственное решение.

Решим систему уравнений (32) и определим значение $\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t,\mathbf{x})$ при $t > 0$ по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$.

Формулы (26) и (29) с полученными зависимостями $\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t,\mathbf{x})$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая многих пространственных переменных.

Обратим внимание, что если начальные данные заданы линейными функциями по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$, то система уравнений (32), дающая решение обобщенной задачи Римана, принимает вид

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^-\mathbf{v}^- = \sum\limits_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^-\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1}t, x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right); \quad k_1, \lambda_-^{k_1}\geqslant 0,\\ \mathbf{l}_{k_1}^+\mathbf{v}^+ = \sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_+^{k_1}\leqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^+\mathbf{C}_+^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^+\left(-\lambda_+^{k_1}t, x_2-\lambda_+^{k_2}t,...,x_N-\lambda_+^{k_N}t\right); \quad k_1, \lambda_+^{k_1}\leqslant 0,\\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^-,\ \mathbf{v}^+\right) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

При $t \to +0$ система уравнений (32) принимает вид

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^-\mathbf{v}^- = \sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_-^{k_1}\geqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^-\mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right); k_1,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0,\\ \mathbf{l}_{k_1}^+\mathbf{v}^+ = \sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_+^{k_1}\leqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^+\mathbf{u}_0^+\left(0,x_2,...,x_N\right); k_1,\lambda_+^{k_1}\leqslant 0,\\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^-,\ \mathbf{v}^+\right) = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{33}$$

Именно такое (33) приближенное решение задачи Римана используется при построении алгоритмов решения гиперболических систем дифференциальных уравнений первого порядка [1], [2].

Рассмотрим гиперплоскость $x_1-\lambda_-^{k_1}t = 0, \quad \lambda_-^{k_1} < 0$. Из (26) следует, что решение задачи Римана при переходе через эту гиперплоскость терпит разрыв:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x})\right] &= \mathbf{u}^-\left(t=\frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}}+0,\mathbf{x}\right) - \mathbf{u}^-\left(t=\frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}}-0,\mathbf{x}\right)\ldots = \\ &= \sum_{\mathbf{k}:\,x_1=\lambda_-^{k_1}t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^-\left(0,0,x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right)\ldots - \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}:\,x_1=\lambda_-^{k_1}t}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(0,x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right). \end{aligned} \tag{34}$$

В пределе $t \to +0$ скачок решения задачи Римана $\left[\mathbf{u}^-(0,\mathbf{x})\right]$ при переходе через гиперплоскость $x_1-\lambda_-^{k_1}t = 0$, $\lambda_-^{k_1} < 0$:

$$\left[\mathbf{u}^-(0,\mathbf{x})\right] = \mathbf{R}_1^-\mathbf{D}^{k_1}\mathbf{\Omega}_1\left(\mathbf{v}^-(0,0,x_2,...,x_N) - \mathbf{u}_0^-(0,x_2,...,x_N)\right).$$

Поскольку в матрице $\mathbf{R}_1^-\mathbf{D}^{k_1}$ все столбцы нулевые, кроме k_1-го, который равен k_1-му правому собственному вектору матрицы $\mathbf{A}_1^-$, то из (23) следует, что этот скачок пропорционален k_1-му правому собственному вектору матрицы $\mathbf{A}_1^-$.

Аналогично, вдоль гиперплоскости $x_1-\lambda_+^{k}t = 0$, $\lambda_+^{k} > 0$ распространяется разрыв

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{u}^+(t,\mathbf{x})\right] &= \mathbf{u}^+\left(t=\frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}}+0,\mathbf{x}\right) - \mathbf{u}^+\left(t=\frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}}-0,\mathbf{x}\right)\ldots = \\ &= \sum_{\mathbf{k}:\,x_1=\lambda_+^{k_1}t} \frac{1}{\lambda_+^{k_1}}\mathbf{C}_+^{\mathbf{k}}\mathbf{A}_1^+\mathbf{v}^+\left(0,0,x_2-\lambda_+^{k_2}t,...,x_N-\lambda_+^{k_N}t\right)\ldots - \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}:\,x_1=\lambda_+^{k_1}t}\mathbf{C}_+^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^+\left(0,x_2-\lambda_+^{k_2}t,...,x_N-\lambda_+^{k_N}t\right). \end{aligned} \tag{35}$$

В пределе $t \to +0$ скачок решения задачи Римана $\left[\mathbf{u}^+(0,\mathbf{x})\right]$ при переходе через гиперплоскость $x_1-\lambda_+^{k}t = 0$, $\lambda_+^{k} > 0$:

$$\left[\mathbf{u}^+(0,\mathbf{x})\right] = \mathbf{R}_1^+\mathbf{D}^{k_1}\mathbf{\Omega}_1\left(\mathbf{v}^+(0,0,x_2,...,x_N) - \mathbf{u}_0^+(0,x_2,...,x_N)\right).$$

Этот скачок пропорционален k_1-му правому собственному вектору матрицы $\mathbf{A}_1^+$.

Если начальные данные заданы константами по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$, то разрыв решения задачи Римана постоянен вдоль гиперплоскости $x_1 - \lambda_-^{k_1} t = 0$, $\lambda_-^{k_1} < 0$, и пропорционален k_1-му правому собственному вектору матрицы $\mathbf{A}_1^-$:

$$\left[\mathbf{u}^- (t, \mathbf{x})\right] = \mathbf{R}_1^- \mathbf{D}^{k_1} \boldsymbol{\Omega}_1 \left(\mathbf{v}^- (0, \mathbf{0}) - \mathbf{u}_0^- (\mathbf{0})\right).$$

Аналогично, в этом случае разрыв решения задачи Римана постоянен вдоль гиперплоскости $x_1 - \lambda_+^{k_1} t = 0$, $\lambda_+^{k_1} > 0$, и пропорционален k_1-му правому собственному вектору матрицы $\mathbf{A}_1^+$:

$$\left[\mathbf{u}^+ (t, \mathbf{x})\right] = \mathbf{R}_1^+ \mathbf{D}^{k_1} \boldsymbol{\Omega}_1 \left(\mathbf{v}^+ (0, \mathbf{0}) - \mathbf{u}_0^+ (\mathbf{0})\right).$$

7. Заключение

В работе построено решение задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и с произвольным количеством пространственных переменных. Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных в момент времени $t > 0$ по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Министерства образования и науки РФ № 3.522.2014/К в лаборатории флюидодинамики и сейсмоакустики МФТИ.

Автор благодарит профессоров кафедры высшей математики МФТИ В. П. Бурского и В. Ж. Сакбаева, профессора кафедры информатики и вычислительной математики А. В. Колдобу, доцента этой же кафедры И. В. Цыбулина и студента 1-го года магистратуры В. А. Мазепова за полезные обсуждения и помощь.

Литература

1. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. *LeVeque R.L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. *Скалько Ю.И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6, № 3. С. 347–356.
4. *Kaser M., Dumbser M.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms // Geophys. J. Int. 2006. V. 166. P. 855–877.
5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

References

1. *Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Y.* Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic systems. Moscow: Physmatlit, 2001.

2. *LeVeque R.L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

3. *Skalko Y.I.* The correct conditions on the boundary separating subdomains // Computer studies and modeling. 2014. V. 6, № 3. P. 347–356.

4. *Martin Kaser, Michael Dumbser* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms // Geophys. J. Int. 2006. V. 166. P. 855–877.

5. *Gelfand I.M., Shilov G.E.* Spaces of fundamental and generalized functions. Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1958.

6. *Gelfand I.M., Shilov G.E.* Generalized functions and operations on them. Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1959.

7. *Vladimirov V.S.* Equations of mathematical physics. Moscow: Science, 1981.

Поступила в редакцию 28.09.2016