

## Заключение по содержанию диссертации

Шабанов Дмитрий Александрович  
(Ф.И.О. члена диссертационного совета)

Курносков Артем Дмитриевич  
(Ф.И.О. соискателя ученой степени)

диссертация “Обратные задачи, связанные с независимостью и доминированием в графах”,  
представленная на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

(Название диссертации, ученая степень, на которую представлена диссертация, специальность)

Дата защиты 15.12.2020

Оценка соответствия диссертации требованиям Положения о присуждении ученых степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ (далее - Положение):

### 1. Актуальность тематики диссертации:

Представленная работа является исследованием в области теории графов. Тема диссертации восходит к классической постановке проблем экстремальной теории графов, а именно: требуется найти минимальное или максимальное значение некоторой характеристики графа, если фиксирована его другая характеристика и граф принадлежит определенному классу. Начиная с 50-х годов прошлого века данный класс задач находится в центре внимания исследований по теории графов.

В диссертации А.Д. Курноскова рассматриваются подобные вопросы для чисел независимости и доминирования в разных вариантах. Данные характеристики графа относятся к наиболее важным в теории графов. Их изучению посвящены многочисленные работы, начиная со знаменитой теоремы Турана. Все ведущие мировые специалисты по теории графов имеют работы, решающие те или иные проблемы подобного вида. Автор изучает минимально и максимальные значения числа независимости и числа доминирования в специальных классах графов — в первую очередь, деревьях с заданными последовательностями степеней.

Тем самым, можно смело утверждать, что тема представленной диссертационной работы относится к фундаментальному направлению в теории графов, находится в тренде мировых исследований, а ее актуальность не вызывает сомнений.

### 2. Научная новизна выносимых на защиту результатов:

Диссертация состоит из введения, шести глав, разбитых в общей сложности на 17 параграфов, приложения, заключения и списка литературы.

Во введении даются необходимые определения, обсуждается актуальность темы диссертации, приводится обзор имеющейся литературы и общая характеристика работы.

Первая глава диссертации посвящена изучению задачи о числе независимости. Рассмотрим класс двудольных графов с числом независимости равным  $n$ . Какое наименьшее число вершин может иметь подобный граф? Обозначим данную величину через  $L_{\iota, \nu}^{\mathcal{B}}(n)$ . В первой главе автором доказано сразу несколько результатов. Во-первых, при  $n = 2^k - 1$  и  $k$  — степень двойки выполнено  $L_{\iota, \nu}^{\mathcal{B}}(n) \sim k$  (утв. 1.1.1). Во-вторых, при  $n = 2^k - 1$  и любом  $k$  выполнено  $L_{\iota, \nu}^{\mathcal{B}}(n) < 3k/2$  (утв. 1.1.2). Данные результаты улучшают ранее известные оценки Линека. Кроме того, автором рассматривается аналогичная задача для числа максимальных независимых множеств, доказано, что  $L_{\iota_m, \nu}^{\mathcal{B}}(n) \leq 2.69 \log_2 n + O(1)$  (теорема 1.2.1). Наконец, для  $n$ , двоичное разложение которых периодически, доказано, что  $L_{\iota_m, \nu}^{\mathcal{B}}(n) \sim 2 \log_2 n$  (теорема 1.2.2).

Вторая глава посвящена обсуждению степенных последовательностей для вершин в дереве и новых результатов не содержит, ее объем всего 4 страницы.

В третьей главе описываются операции, слабо меняющие числа независимости и числа доминирования в графах. Данная глава тоже короткая — всего 8 страниц. Приводятся утверждения о том, что операции меняют число независимости и число доминирования не более чем на 1, а также, что при их применении не меняется принадлежность некоторым классам деревьев, если таковая была.

В четвертой главе рассматривается задача нахождения минимально и максимально возможного значения числа независимости в классе  $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$  деревьев с заданной степенной последовательностью  $\mathbf{d}$ . Обозначим через  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$  только степени не меньше двойки и положим  $\ell(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^n -2(n-1)$  — число висячих вершин в дереве. Положим также  $a(\mathbf{d}) = \max\{a : \sum_{i=1}^a d_i \leq n-1\}$ . Автором доказано, что для любого  $T \in \mathcal{T}_{\mathbf{d}}$  его число независимости  $\alpha(T)$  удовлетворяет неравенствам (теоремы 4.2.2, 4.3.2):

$$\max \left\{ \ell(\mathbf{d}), \left\lceil \frac{n + \ell(\mathbf{d})}{2} \right\rceil \right\} \leq \alpha(T) \leq a(\mathbf{d}) + \ell(\mathbf{d}),$$

а также показывает, что любое значение между указанными границами достижимо (теорема 4.4.1). Отметим, что результаты об точных оценках были получены в работах других математиков, работавших параллельно, однако автору удалось упростить анализ и сделать более интересные конструкции, позволившие доказать новую теорему 4.4.1.

В пятой главе снова рассматривается класс  $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$  и изучается аналогичный вопрос для числа доминирования. Здесь автором снова доказываются точные верхние и нижние оценки числа доминирования  $\gamma(T)$ ,  $T \in \mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ . Положим

$$sl(\mathbf{d}) = \min \left\{ k : \sum_{i=n-k+1}^n (d_i + 1) \geq n + \ell(\mathbf{d}) \right\}, \quad lv(\mathbf{d}) = \min \left\{ k : \sum_{i=n-k+1}^n (d_i - 1) \geq \ell(\mathbf{d}) \right\}.$$

Тогда имеют место следующие оценки (теоремы 5.2.3, 5.3.2): для любого  $T \in \mathcal{T}_{\mathbf{d}}$

$$\max\{sl(\mathbf{d}), lv(\mathbf{d})\} \leq \gamma(T) \leq \min \left\{ n, \ell(\mathbf{d}) + \left\lceil \frac{n - \ell(\mathbf{d})}{3} \right\rceil \right\}.$$

Отметим, однако, что и эти оценки были получены другими исследователями параллельно. Центральный результат пятой главы (теорема 5.4.1) утверждает, что каждое значение в приведенном выше промежутке достижимо на некотором  $T \in \mathcal{T}_d$ .

В шестой главе исследуется вопрос о минимально возможном значении числа связанного доминирования в разных классах графов. Автор находит ответы для класса связных графов на  $n$  вершинах с фиксированной степенной последовательностью  $\mathbf{d}$  специального вида. Во-первых (теорема 6.1.3), это случай, когда максимальная степень равна  $k$  и число вершин этой степени не меньше  $\lceil n - 2/k - 1 \rceil + k$ . Во-вторых (теорема 6.2.1), класс  $(k, 1)$ -бирегулярных графов с  $\ell$  висячими вершинами и  $k + 1$  вершиной степени  $k$ . В-третьих (теорема 6.2.2), класс  $(k, 1)$ -бирегулярных графов с  $\ell$  висячими вершинами и  $m$  вершинами степени  $k$  и некоторым ограничением на  $m$ .

### 3. Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы:

Работа носит теоретический характер. Автором внесен весомый вклад в развитие направления теории графов, связанного с изучением чисел независимости и чисел доминирования в разных классах графов. Результаты подобного рода фундаментальны и чрезвычайно важны в теории графов, они могут найти применение в самых разных исследованиях.

Результаты диссертационной работы могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории графов и комбинаторике, теоретической информатике и других смежных областях математики. Они могут быть интересны специалистам, работающим в ведущих математических центрах страны.

### 4. Полнота опубликования основных результатов диссертации в рецензируемых научных изданиях в соответствии с требованиями Положения:

По теме диссертации автором опубликовано 3 статьи [80], [105] и [109] из списка литературы. Две из них опубликованы в центральных академических журналах, которые индексируются международной базой цитирования Scopus.

### 5. Вопросы и замечания (в соответствии с п. 4.13 Положения соискатель отвечает на сформулированные здесь вопросы и замечания на заседании по защите диссертации):

В целом, работа написана очень хорошо. Видно, что автор проделал большую и качественную работу. Тем не менее, имеется несколько замечаний.

- (1) Материал глав 2 и 3 носит сугубо вспомогательный характер и не содержит центральных результатов диссертации, выносимых на защиту. К тому же главы совсем короткие. Непонятно, зачем было выделить подобный вспомогательный материал в сразу две отдельных главы.
- (2) На стр. 13 в теореме Линека написано, что  $2^{k-1} + \leq n \leq 2^k - 1$  и, в тоже время,  $a = \lfloor \log_2 n \rfloor$ . Непонятно, зачем автору понадобилось два обозначения для  $\lfloor \log_2 n \rfloor$ , ведь, получается, что  $a = k - 1$ .

- (3) Автор имеет особенность начинать главу со вспомогательных утверждений, в то время, как формулировки основных результатов отодвигаются на задний план. На мой взгляд, не самое удачное построение текста. Формулировка и обсуждение центральных результатов в начале раздела (до каких-либо доказательств) было бы удобнее для восприятия диссертации.
- (4) При большом объеме работы удивляет слабая апробация, автор участвовал всего в одной конференции 5 лет назад. Кажется, стоило более активно выступать на профильных семинарах и конференциях.

Однако данные недостатки и замечания скорее носят технический или редакционный характер и не относятся к содержательной части диссертации.

6. **Общая характеристика диссертации (не включает резолютивную часть):**

Оценивая диссертацию в целом, можно констатировать, что она посвящена актуальным вопросам теории графов и является законченным научным исследованием, содержащим ряд содержательных математических результатов. Работа достойно опубликована, прошла некоторую апробацию на профильных научных конференциях. Текст очень хорошо написан, автор сделал очень качественный обзор литературы по теме своей работы (111 источников!), видно, что проделана большая работа. Считаю, что диссертационная работа Курносова Артема Дмитриевича "Обратные задачи, связанные с независимостью и доминированием в графах" полностью соответствует требованиям Положения МФТИ о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук.

Дата: 30 ноября 2020 г.

Подпись

*Шабанов Д.*

/Шабанов Дмитрий Александрович

