УДК 533.6.011

М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Задача обтекания и сокращение размерности в уравнениях Навье–Стокса

Показано, как система гидродинамических уравнений, описывающих нестационарное обтекание твердого тела в трехмерном вязком натекающем потоке, может быть сведена к замкнутой системе поверхностных уравнений с использованием метода снижения размерности в переопределенных системах дифференциальных уравнений. Эти системы поверхностных уравнений позволяют определить возникающее распределение напряжений на поверхности этого твердого тела, а также все остальные величины, характеризующие гидродинамический поток через него.

Ключевые слова: обтекание, гидродинамический поток, вязкость, твердое тело, напряжение на поверхности тела, дифференциальные уравнения на поверхности, уравнения Навье–Стокса.

M. L. Zaytsev, V. B. Akkerman

The Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences (IBRAE RAN)

Flow problem and dimension reduction in the Navier–Stokes equations

It is shown how a set of hydrodynamic equations describing an unsteady three-dimensional viscous flow near a solid body, can be reduced to a closed system of surface equations using the method of dimension reduction of over-determined systems of differential equations. These systems of equations allow determining the surface distribution of the resulting stresses on the surface of this body as well as all other quantities characterizing the hydrodynamic flow around it.

Key words: flow problem, hydrodynamic flow, viscosity, solids, stress on the body surface, differential equation on the surface, the Navier–Stokes equations.

1. Введение

В приложениях нелинейность уравнений гидродинамики часто является одним из препятствий для изучения многих явлений, таких как турбулентность, движение гидродинамических разрывов, в частности, распространение фронтов химических реакций и др. [1–4]. При их моделировании в практических задачах часто приходится составлять очень тонкую численную сетку по пространству и времени, что требует больших вычислительных мощностей и затрат времени [5]. В связи с этим большой научный интерес представляют различные способы сведения полной системы гидродинамических уравнений по объему к системе уравнений на поверхности [6–11]. Подобная процедура позволяет уменьшить размерность задачи на единицу ($3D \to 2D$, $2D \to 1D$), что существенно сокращает необходимые вычислительные мощности. В частности, соответствующая компьютерная программа могла бы напрямую (пользуясь информацией только на поверхности) рассчитать гидродинамические разрывы с учетом вязкости, образования звука и других изменений плотности газов и жидкостей. Например, при исчезающе малой вязкости задача описания потенциального обтекания на плоскости сводится к интегральному уравнению на границе области (задачи Дирихле, Неймана) [1,4]. Это уравнение связывает тангенциальную и нормальную составляющие скорости. Зная одну из них на границе обтекаемого тела, можно определить весь внешний поток.

В данной работе мы сводим уравнения гидродинамики вязкой среды «в объеме» к уравнениям на поверхности и показываем, как предлагаемым методом можно сократить размерность в задачах вязкого обтекания, что делает их удобными для упрощения расчетов в самых различных приложениях. Предложены общие способы переопределения уравнений Навье–Стокса в трехмерном и двумерном случаях, что теоретически позволяет свести их к замкнутой системе уравнений на любой поверхности [12, 13]. При этом не делается никаких существенных упрощающих предположений, которые бы ограничивали общность рассмотрения этих явлений.

2. Формулировка задачи

Движение твердых тел в вязких средах характеризуется условиями на границе твердого тела, где происходит прилипание к нему частиц среды. Иными словами, скорость вязкой среды $\mathbf{u}$ на поверхности тела определяется кинематическими характеристиками самой поверхности и, например, может быть выражена через скорость поверхности тела $\mathbf{V}$. Сила $\mathbf{F}$, действующая на единицу площади поверхности, равна [1]

$$F_i = Pn_i - \sigma_{ik}^{/} n_k, \tag{1}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности, а

$$\sigma_{ik}^{/} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

тензор вязких напряжений и η – коэффициент динамической вязкости. Следовательно, согласно уравнению (1), в этом случае для любой точки на поверхности тела в декартовой системе координат (n, τ_1, τ_2)

$$F_n = P + 2\eta \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \right), \tag{3}$$

$$F_1 = \eta \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau_1} \right) = \eta \left(\omega_2 + 2\frac{\partial u_n}{\partial \tau_1} \right), \tag{4}$$

$$F_2 = \eta \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau_2} \right) = \eta \left(-\omega_1 + 2\frac{\partial u_n}{\partial \tau_2} \right) \tag{5}$$

(см. рис. 1). Кроме того, сила $\mathbf{F}$ связана со скоростью поверхности тела V через законы динамики движения твердого тела. Нестационарное обтекание неподвижных твердых тел в вязких средах отличается от вышесказанного нулевыми условиями для скорости на границе [1]:

$$V = 0 \;\text{ и }\; u = 0. \tag{6}$$

3. Переопределение уравнений Навье–Стокса

Мы ограничиваемся здесь рассмотрением несжимаемого вязкого потока в трехмерном пространстве в поле силы тяжести $\mathbf{g}$. Тогда описывающие его уравнения Навье-Стокса примут вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left(P + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \right) = -\nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{8}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{9}$$

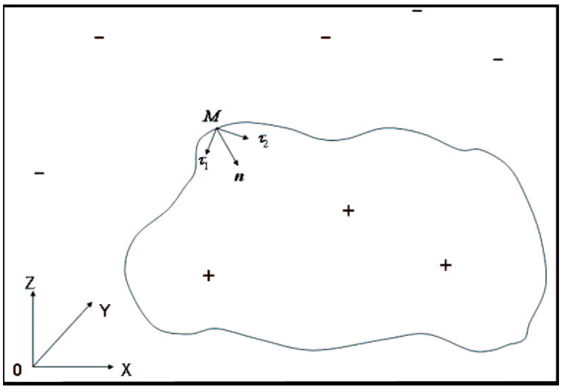

Рис. 1. Твердое тело в вязкой среде

где ν – коэффициент кинематической вязкости. Эти уравнения позволяют найти неизвестный вектор скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и профиль давления $P(\mathbf{r},t)$ в любом месте пространства и в произвольный момент времени, т.е. для любого $(\mathbf{r},t)$. Введем «поправку» α к вектору $\mathbf{u}$ и «псевдоплотность» $\rho(\mathbf{r},t)$ с тем, чтобы обобщить систему уравнений (7)–(9) следующим образом:

$$\frac{\partial(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})}{\partial t}-[(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})\times(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})]+\nabla\left(P+\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right)=\mathbf{g}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})\cdot\nabla\rho+\rho\cdot\operatorname{div}(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial t}=[\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}+\mathbf{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}\times(\nabla\times\boldsymbol{\alpha})]+\nu\nabla\times\boldsymbol{\omega}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{u}, \tag{13}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0. \tag{14}$$

Фактически уравнения (11) и (12) соответственно определяют $\rho(\mathbf{r},t)$ и $\boldsymbol{\alpha}$, а уравнение (10) является следствием уравнений (7) и (12). Векторное поле $\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}$ формально можно рассмотреть как *невязкий* гидродинамический поток с плотностью $\rho(\mathbf{r},t)$ и давлением $\left[P+\frac{1}{2}\mathbf{u}^2-\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})^2\right]$.

Перейдем взаимно однозначно к псевдолагранжевым переменным начального положения частиц газа и времени $(\mathbf{r}_0,t)$ (т.е. к разметке):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)+\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r},t)+\lambda(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)+\nabla\times\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r},t)), \tag{15}$$

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$ и $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_0(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{r}_0|_{t=0}=\mathbf{r}$.

Выберем $\lambda(\mathbf{r},t)$ так, что

$$\lambda(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})\cdot\nabla\rho+\rho(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})\cdot\nabla\lambda=0. \tag{16}$$

Отсюда можно показать, что

$$\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t}+(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}+\lambda(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha}))\cdot\nabla\mathbf{r}_0=0. \tag{17}$$

Тогда, согласно приложению А, из уравнений (10) и (11) вытекают следующие выражения:

$$\frac{(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})\cdot\nabla\mathbf{r}_0}{\rho}=\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0)+\nabla\times\boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{r}_0))}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(x_0,y_0,z_0)}{\partial(x,y,z)}=\frac{1}{\rho_0\left(\mathbf{r}_0\right)},\tag{19}$$

где α_0, ρ_0, $\omega_0=\nabla\times u_0$ – начальные распределения величин α, ρ, ω. Пусть $\alpha_0\equiv 0$ и $\rho_0\equiv 1$. Тогда соотношения (18) и (19) можно преобразовать к виду [14]

$$\omega_x+\nabla\times\alpha_x-\left|\begin{matrix}\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial y} & \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial z} & \omega_0\left(\mathbf{r}_0\right)\end{matrix}\right|=0,\tag{20}$$

$$\omega_y+\nabla\times\alpha_y-\left|\begin{matrix}\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial z} & \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial x} & \omega_0\left(\mathbf{r}_0\right)\end{matrix}\right|=0,\tag{21}$$

$$\omega_z+\nabla\times\alpha_z-\left|\begin{matrix}\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial x} & \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial y} & \omega_0\left(\mathbf{r}_0\right)\end{matrix}\right|=0.\tag{22}$$

Реально из трех уравнений (20) – (22) независимо только два [14]. Формула (19) принимает вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(x_0,y_0,z_0)}{\partial(x,y,z)}=1.\tag{23}$$

Таким образом, мы получили переопределенную систему из 16-ти дифференциальных уравнений: (7) – (9), (11), (12), (16), (20), (21), (23) и плюс любое из уравнений (17) и 15-ти неизвестных $\boldsymbol{\alpha}$, u, $\boldsymbol{\omega}$, P, ρ, λ и $\mathbf{r}_0$. Анализ причинно-следственных связей показывает, что данная система совместна и корректна [12–14]. Можно добавить в уравнение (12) и нетривиальную внешнюю силу.

4. Вязкое обтекание в трехмерном потоке

Выведем систему уравнений, описывающих нестационарное обтекание неподвижного твердого тела в трехмерном вязком несжимаемом натекающем потоке. Обозначим

$$S_1=\alpha_x, S_2=\alpha_y, S_3=\alpha_z, S_4=u_x,$$

$$S_5=u_y, S_6=u_z, S_7=\omega_x, S_8=\omega_y, S_9=\omega_z, S_{10}=P, S_{11}=\rho, S_{12}=\lambda,$$

$$S_{13}=x_0, S_{14}=y_0, S_{15}=z_0.\tag{24}$$

Тогда систему из 16-ти уравнений: (7) – (9), (11), (12), (16), (20), (21), (23) плюс любое из уравнений (17) можно записать в виде

$$H_k\left(S_v,\frac{\partial S_v}{\partial r},\frac{\partial S_v}{\partial t}...\right)=0, v=1...15, k=1...16.\tag{25}$$

Перейдем в точке M в систему координат (τ_1,τ_2,n) (см. рис. 1). Тогда уравнения (25) запишутся в виде

$$H_k\left(S_v,\frac{\partial S_v}{\partial\tau_1},\frac{\partial S_v}{\partial\tau_2},\frac{\partial S_v}{\partial n},\frac{\partial S_v}{\partial t}...\right)=0, v=1...15, k=1...16.\tag{26}$$

Продифференцируем уравнения (26) в направлении $\mathbf{n}$ 14 раз. Тогда получим 240 уравнений вида

$$\left[H_k\left(S_v,\frac{\partial S_v}{\partial\tau_1},\frac{\partial S_v}{\partial\tau_2},\frac{\partial S_v}{\partial n}\frac{\partial S_v}{\partial t}...\right)\right]_n^{(i)}=0, v=1...15, k=1...16, i=0...14.\tag{27}$$

Обозначим

$$S_v^j=\partial^j S_v/\partial n^j,\tag{28}$$

где $j=0...15$, $S_v^0=S_v$. Тогда 240 уравнений (27) можно записать в виде

$$O_h\left(S_v^j,\frac{\partial S_v^j}{\partial\tau_1},\frac{\partial S_v^j}{\partial\tau_2},\frac{\partial S_v^j}{\partial t}...\right)=0, v=1...15, h=1...240, j=0...15.\tag{29}$$

Доопределим переменную $S_{12}^0 = S_{12} = \lambda$ вдоль границы тела следующим образом:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) + \lambda\,(\boldsymbol{\omega} + \nabla \times \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{30}$$

Пусть $g_0(\mathbf{r}_0, t) = 0$ – уравнение поверхности твердого тела в системе координат $(\mathbf{r}_0, t)$ (15). Тогда из (6) и (30) ее скорость равна

$$V_0 = \frac{g_{0t}}{|\nabla_0 g_0|} = \frac{g_t + ((\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha} + \lambda\,(\boldsymbol{\omega} + \nabla \times \boldsymbol{\alpha})) \cdot \nabla g)}{|\nabla_0 g_0|} =$$

$$= \frac{|\nabla g|}{|\nabla_0 g_0|}\,(V + u_n + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) + \lambda\,(\boldsymbol{\omega} + \nabla \times \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{n}) = 0. \tag{31}$$

В системе координат (r_0, t) твердое тело не движется.

Таким образом, зависимость от производной по n в преобразованной системе дифференциальных уравнений (29) будет отсутствовать, и мы получим замкнутую систему из 240 поверхностных дифференциальных уравнений строго вдоль границы твердого тела и соответствующего количества переменных. Фактически некоторые переменные уже определены из (6) и (30). В начальный момент требуется знать нетривиальную завихренность $\omega_0(r_0)$ и некоторые ее пространственные производные на нем (формулы (20)), (21)). Это всегда возможно найти, т.к. на поверхности образуется вязкий пограничный слой, где эта завихренность нетривиальна.

Преимущество состоит в том, что эта система реально описывает процесс обтекания поверхности тела в терминах самой поверхности. Выкладки показывают [15, 16], что выражения (29) в аналитическом виде получаются чрезвычайно громоздкими. Их выписывание не входит в цели данной работы. Однако указан подробный алгоритм их получения.

5. Дальнейшие упрощения

Рассмотрим теперь систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, переопределенную одним независимым уравнением, например, (7) – (9), (11), (12), (16), (20), (21), (23) плюс любое из уравнений (17):

$$H_k\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial r}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \ldots\right) = 0, v = 1 \ldots p, k = 1 \ldots p, \tag{32}$$

$$G\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial r}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \ldots\right) = 0. \tag{33}$$

Перейдем в точке M в систему координат (τ_1, τ_2, n) (см. рис. 1). Тогда уравнения (32), (33) запишутся в виде

$$H_k\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial n}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \ldots\right) = 0, v = 1 \ldots p, k = 1 \ldots p, \tag{34}$$

$$G\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial n}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \ldots\right) = 0. \tag{35}$$

Выразим из уравнений (34) нормальные производные $\partial S_k / \partial n$ в явном виде:

$$\frac{\partial S_k}{\partial n} = F_k\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \ldots\right) = 0, v = 1 \ldots p, k = 1 \ldots p, \tag{36}$$

Подставим их выражения (36) в формулу (35). Тогда

$$G^{(1)}\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial \tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t} \ldots\right) = 0. \tag{37}$$

Продифференцируем уравнение (37) в направлении $\mathbf{n}$ и подставим вместо $\partial S_k/\partial n$ их выражения из (36). Тогда находим, что

$$G^{(2)}\left(S_v, \frac{\partial^2 S_v}{\partial\tau_1\partial t}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial\tau_2\partial t}, \frac{\partial^2 S_v}{\partial t^2}...\right) = 0. \tag{38}$$

Проделаем аналогичную процедуру p раз. Получим p уравнений на поверхности обтекаемого тела вида

$$G^{(1)}\left(S_v, \frac{\partial S_v}{\partial\tau_1}, \frac{\partial S_v}{\partial\tau_2}, \frac{\partial S_v}{\partial t}...\right) = 0,$$

....

$$G^{(p)}\left(S_v, \frac{\partial^p S_v}{\partial\tau_1\partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial\tau_2\partial t^{p-1}}, \frac{\partial^p S_v}{\partial t^p}...\right) = 0. \tag{39}$$

Мы нашли замкнутую систему из p поверхностных дифференциальных уравнений (39) строго вдоль границы твердого тела и такого же количества переменных S_k, $k = 1...p$, эволюционирующих во времени. Формально ничего не мешает подобной процедурой получать больше, чем p уравнений на поверхности (39), т.е. найти переопределенную систему уравнений уже на поверхности. Следовательно, сократить размерность на поверхности и т.д.

Уравнения Навье–Стокса (7) – (9), (11), (12), (16), (20), (21), (23) и плюс любое из уравнений (17) в пространстве указанным способом можно свести к системе уравнений на плоскости $\{z = c\}$ и даже получить переопределенную систему поверхностных уравнений на ней. Следовательно, ее можно будет свести к переопределенной системе уравнений на прямой $\{z = c,\ y = b\}$, потом в точке $\{z = c,\ y = b,\ x = a\}$ и, наконец, к переопределенной системе ОДУ (порядка нескольких сотен тысяч уравнений), решение которой возможно даст аналитическое решение в точке $\{a\ b\ c\ t\}$.

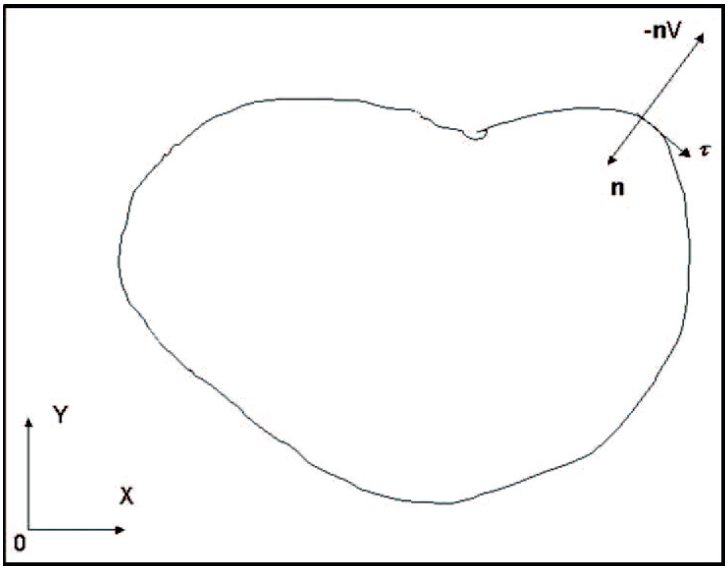

Рис. 2. Движущаяся поверхность $F\left(x_1, ..., x_m, t\right) = 0$

Чтобы учесть подвижную поверхность, движущуюся со скоростью $-V\mathbf{n}$, где $V = F_t/\left|\nabla F\right|$ и $n = \nabla F/\left|\nabla F\right|$ – единичная нормаль к этой поверхности $F\left(x_1, ...x_m, t\right) = 0$, (см. рис. 2), достаточно использовать следующее очевидное соотношение на этой поверхности:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^{j-1} S_v}{\partial t^{j-1}}\right) = \frac{\partial^j S_v}{\partial t^j} - V\frac{\partial^j S_v}{\partial t^{j-1}\partial n}.j = 1...p, v = 1...p. \tag{40}$$

Вместо системы уравнений (39) будет система из уравнений p^2+p (36), (39) и (40) и p^2+p неизвестных $\partial^j S_v/\partial t^j$, $j = 0...p$, $v = 1...p$.

6. Заключение

В данной работе с помощью специального преобразования переменных мы свели полную систему гидродинамических уравнений, описывающих нестационарное обтекание твердого тела, по объему в трехмерном потоке к системе уравнений на поверхности. Эти уравнения могут значительно упростить численное моделирование и исследовать глубже особенности процесса обтекания. Во-первых, они уменьшают размерность задачи на единицу. Отпадает необходимость решать уравнения гидродинамики в пограничном слое. Во-вторых, помимо скорости газа на поверхности они сразу позволяют определить, как меняются на границе все остальные параметры, характеризующие течение (такие, как u, P, ω и т.д.).

Следует отметить, что не все уравнения из полученных систем явные относительно времени. Поэтому, чтобы определить возникающее распределение напряжений, помимо начальных данных требуется также рассматривать и краевые условия. Через них происходит поступление информации о внешнем потоке, несомненно, влияющей на эволюцию всего воздействия потока на тело. Возможно, их придется определять численно с помощью дополнительного кода по пространству, точность которого важна, однако не во всем объеме, а только вблизи кривых на поверхности обтекаемого тела, вдоль которых определяются краевые условия.

Полученные в статье системы уравнений существенно трехмерные, т.е. вырождаются в двумерном случае. В двумерном случае (см. рис. 3), чтобы переопределить уравнения гидродинамики, необходимо вместо преобразования (15) использовать другое преобразование, вытекающее из (52) (см. приложение A):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha} + \frac{(\boldsymbol{\omega} + \nabla\times\boldsymbol{\alpha})}{|\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha}|^2}\times\nabla\beta,\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}. \tag{41}$$

При этом должно быть наложено дополнительное условие вместо (16)

$$\left(\frac{(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})}{|\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha}|^2}\times\nabla\beta\right)\nabla\rho + \rho\nabla\beta\cdot\left(\nabla\times\frac{(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})}{|\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha}|^2}\right) = 0. \tag{42}$$

Параметр β определяется таким образом, чтобы граница тела в координатах $\mathbf{r}_0$ не двигалась (см. (30)).

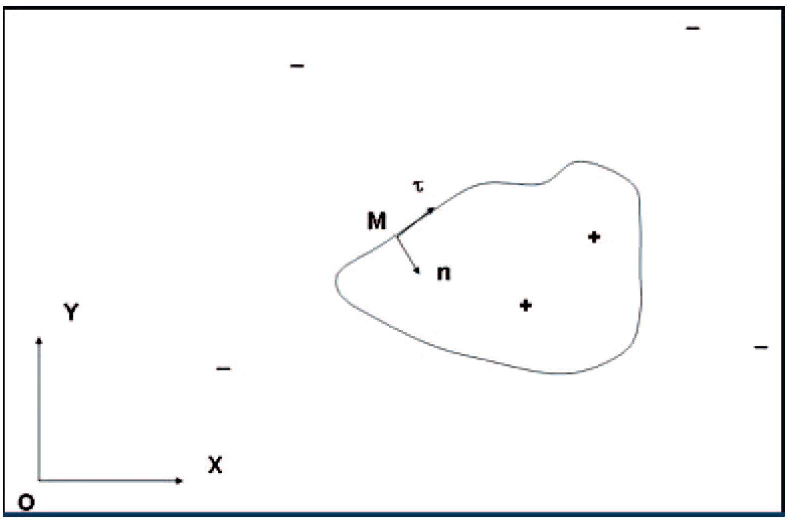

Рис. 3. Твердое тело, обтекаемое вязкой жидкостью в двумерном случае

Несмотря на громоздкость, наше описание может успешно быть использовано в приложениях, например, для менее затратного расчета подъемной силы или коэффициента сопротивления крыла во внешнем натекающем (в том числе и сверхзвуковом) потоке, а также стенок теплообменников атомных реакторов. Развиваемый здесь подход является достаточно общим и может быть применен и в других задачах [14, 17]. Если впоследствии будет предложен более простой способ переопределения уравнений Навье-Стокса, то количество выкладок существенно сократится. Данная статья может быть интересна исследователям, занятым поиском аналитического решения уравнений гидродинамики. Например, согласно предложенному методу уравнения гидродинамики в объеме можно свести к системе уравнений на поверхности и даже получить переопределенную систему поверхностных уравнений. Следовательно, ее уже можно будет свести к переопределенной системе уравнений вдоль кривой на этой поверхности и т.д. вплоть до аналитического решения.

Следует отметить, что метод переопределения сам по себе достаточно прост и описан уже в работе авторов [14]. Там же предложен в несколько упрощенном виде способ переопределения уравнений гидродинамики, описанный в п. 2. Но в данной работе мы вводим дополнительные неизвестные и применяем его к конкретной практической задаче. В приложении Б мы приводим совершенно новый, более простой метод переопределения уравнений Навье-Стокса, который также можно применять в приложениях. В п. 4 мы развиваем дальше метод сокращения размерности, количество уравнений пониженной размерности существенно уменьшается.

Приложение А. Интегралы движения

Рассмотрим уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости в 3D-случае в виде [1]

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}]\,, \tag{43}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0. \tag{44}$$

Рассмотрим также лагранжевы переменные (т.е. разметку) $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$. Умножим обе части уравнения (43) на ∇x_0. Тогда

$$\nabla x_0 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla x_0 \cdot \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] = -\mathrm{div}\left(\nabla x_0 \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}]\right) = -\mathrm{div}\left(\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0\right)\right) + \mathrm{div}\left(\boldsymbol{\omega}\left(\mathbf{u} \cdot \nabla x_0\right)\right) =$$

$$= -\mathbf{u} \cdot \nabla\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0\right) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\left(\mathbf{u} \cdot \nabla x_0\right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0\right) - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\left(\frac{\partial x_0}{\partial t}\right).$$

Здесь использовано свойство переменных Лагранжа:

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} + u_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + u_y \frac{\partial x_0}{\partial y} + u_z \frac{\partial x_0}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0\right) + \mathbf{u} \cdot \nabla\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0\right) = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0\right) = 0 \text{ или } \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla x_0 = \boldsymbol{\omega}_{0x}\left(x_0, y_0, z_0\right),$$

где $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ – производная по времени в лагранжевых переменных, $\boldsymbol{\omega}_0(x_0, y_0, z_0)$ – начальное распределение завихренности ω. Аналогично $\omega \cdot \nabla y_0 = \omega_{0y}\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и $\omega \cdot \nabla z_0 = \omega_{0z}\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

Из уравнения неразрывности (44) следует

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \text{ или } \left(\frac{\partial\left(u_x, y, z\right)}{\partial\left(x, y, z\right)} + \frac{\partial\left(x, u_y, z\right)}{\partial\left(x, y, z\right)} + \frac{\partial\left(x, y, u_z\right)}{\partial\left(x, y, z\right)}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dt} = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} = 1. \tag{45}$$

Выражая ω с помощью (45), получим также $\omega_x(x_0,y_0,z_0,t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 x$, $\omega_y(x_0,y_0,z_0,t) = \omega_0 \nabla_0 y$, $\omega_z(x_0,y_0,z_0,t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 z$, где $\nabla_0 = (\partial/\partial x_0, \partial/\partial y_0, \partial/\partial z_0)$ (см. [1], с. 31).

Рассмотрим еще общее уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\cdot\mathrm{div}\mathbf{u} = 0. \tag{46}$$

Переходя в нем к переменным Лагранжа, находим [6]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\cdot\left(\frac{\partial(u_x,y,z)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,u_y,z)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,y,u_z)}{\partial(x,y,z)}\right) = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\Delta}\cdot\frac{d\Delta}{dt} = 0,$$

т.е.

$$\rho\cdot\Delta = \rho\cdot\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} = \rho_0(x_0,y_0,z_0)$$

– интеграл движения.

В случае, если $\rho \neq \mathrm{const}$, но $s = \mathrm{const}$, т.е. существует однозначная связь между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$, соответствующими интегралами будут

$$\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla x_0}{\rho},\ \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla y_0}{\rho}\ \text{ и }\ \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla z_0}{\rho}$$

.

Аналогично получим

$$\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0,t)}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0\cdot\nabla_0\mathbf{r}}{\rho_0}.$$

Такие же результаты можно получить, если вместо лагранжевых переменных использовать более общее преобразование переменных:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r},t) + \lambda(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t), \tag{47}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$ и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}$, а $\lambda(t)$ – некоторая функция от t. Аналогичными рассуждениями можно установить, что в идеальной жидкости в этих переменных величины $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla x_0$, $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla y_0$, $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla z_0$ и якобиан этого преобразования Δ не зависят явно от времени. Вместо $\lambda(t)$ можно взять $\lambda(x,y,z,t)$, так чтобы $\boldsymbol{\omega}(x,y,z,t)\cdot\nabla\lambda(x,y,z,t) = 0$, чтобы выполнялось $\mathrm{div}(\mathbf{u}+\lambda\boldsymbol{\omega}) = 0$. Выражая также $\boldsymbol{\omega}$, получим $\omega_x(r_0,t) = \boldsymbol{\omega}_0\cdot\nabla_0 x$, $\omega_y(r_0,t) = \boldsymbol{\omega}_0\cdot\nabla_0 y$, $\omega_z(r_0,t) = \boldsymbol{\omega}_0\cdot\nabla_0 z$.

В случае, если $\rho \neq \mathrm{const}$, но $s = $const, т.е. существует однозначная связь между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$, можно по аналогичной причине в (47) взять $\lambda(x,y,z,t)$, так чтобы $\lambda\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\rho + \rho\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\lambda = 0$. Тогда соответствующими интегралами будут

$$\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla x_0}{\rho} = \frac{\omega_{0x}(\mathbf{r}_0)}{\rho_0(\mathbf{r}_0)},\ \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla y_0}{\rho} = \frac{\omega_{0y}(\mathbf{r}_0)}{\rho_0(\mathbf{r}_0)},\ \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla z_0}{\rho} = \frac{\omega_{0z}(\mathbf{r}_0)}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}\ \text{ и } \rho\Delta = \rho_0(\mathbf{r}_0).$$

Фактически здесь требуется пренебречь только слагаемым $\nabla\rho\times\nabla P/\rho^2$ в формуле (43), учитывающим сжимаемость жидкости, что выполняется при характерной скорости её движения много меньше скорости звука [1].

Можно пойти дальше. Решим векторное уравнение относительно $\mathbf{F}$

$$\nabla\times[\mathbf{F}\times\boldsymbol{\omega}] = 0. \tag{48}$$

Следовательно,

$$[\mathbf{F}\times\boldsymbol{\omega}] = \nabla\beta.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\omega}\nabla\beta = 0 \;\text{ и }\; \boldsymbol{\omega}\times[\mathbf{F}\times\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{\omega}\times\nabla\beta. \tag{49}$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}\times\nabla\beta + \lambda\boldsymbol{\omega}.$$

Сделаем теперь замену переменных

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}\times\nabla\beta + \lambda\boldsymbol{\omega}, \tag{50}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}$, и при этом наложим условия

$$\boldsymbol{\omega}\nabla\beta = 0 \text{ и } \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}\times\nabla\beta + \lambda\boldsymbol{\omega}\right) = \nabla\beta\cdot\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}\right) + (\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\lambda = 0. \tag{51}$$

Тогда в этих переменных величины $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla x_0$, $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla y_0$, $\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla z_0$ и якобиан этого преобразования Δ не зависят явно от времени. Аналогичным образом можно учесть сжимаемость.

В двумерном случае замена переменных (50) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}\times\nabla\beta, \tag{52}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}$, и

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}\times\nabla\beta = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} -\frac{\partial\beta}{\partial y} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x}\end{pmatrix}.$$

Условие (51) превращается в

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0 \text{ или } \beta = G(\omega, t).$$

В итоге эта замена переменных (52) может быть записана в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u} + \mu(\omega, t)\,\nabla\times\boldsymbol{\omega},\;\; \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t),\;\; \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t),\;\; \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}.$$

В этих переменных выполняется

$$\omega = \omega_0(x_0, y_0) \;\text{ и }\; \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x, y)} = 1.$$

Приложение Б. Уравнения Навье–Стокса

Рассмотрим уравнения Навье–Стокса в трехмерном потоке в виде

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{u} = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}, \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{u}, \tag{54}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{55}$$

Эти уравнения можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + ((\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha})\,\nabla)\,\boldsymbol{\omega} = 0, \tag{56}$$

где вектор $\boldsymbol{\alpha}$ определяется из системы линейных относительно него уравнений

$$(\boldsymbol{\alpha}\nabla)\,\boldsymbol{\omega} = -\,(\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{u} - \nu\Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{57}$$

Рассмотрим замену переменных

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}\,(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\alpha}\,(\mathbf{r}, t), \tag{58}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0\,(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}$.

В этих переменных выражение (56) запишется в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0 \tag{59}$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0\,(\mathbf{r}_0)\,, \tag{60}$$

где $\boldsymbol{\omega}_0\,(\mathbf{r}_0)$ – начальное распределение завихренности $\boldsymbol{\omega}$. Замена переменных (58) означает, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} + ((\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha})\,\nabla)\,\mathbf{r}_0 = 0. \tag{61}$$

Мы видим, что (60) есть следствие (53) – (55) и (61). Следовательно, можно составить следующую переопределенную одним независимым уравнением систему из 10 уравнений в частных производных: (60), (61), (54), (55) и 9 неизвестных $\mathbf{u}$, ω, $\mathbf{r}_0$.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Гидродинамика. Т. VI. М.: Наука, 1986.
2. *Williams F.A.* Combustion Theory. Benjamin Cummings, Menlo Park, CA, 1985.
3. *Зельдович Я.Б., Баренблат Г.И, Либрович В.Б. и др.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М: Наука, 1966.
5. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. 1980.
6. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* К нелинейной теории движения поверхностей гидродинамических разрывов // ЖЭТФ. 2009. Т. 135, № 4. С. 800–819.
7. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Метод описания стационарного фронта реакции в двухмерном потоке // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 92, № 11. С. 813–816.
8. *Bychkov V., Zaytsev M. and Akkerman V.* Coordinate-free description of corrugated flames with realistic gas expansion // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 026312.
9. *Joulin G., El-Rabii H. and K. Kazakov K.* On-shell description of unsteady flames // J. Fluid Mech. 2008. V. 608. P. 217.
10. *Ott E.* Nonlinear evolution of the Rayleigh-Taylor instability of thin layor // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. P. 1429–1432.
11. *Book D.L, Ott E., Sulton A.L.* Rayleigh-Taylor instability in the «shallow-water» approximation // Phys. Fluids. 1974. V. 17, N 4. P. 676–678.

12. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Метод снижения размерности в задачах арогидродинамики // Труды 52-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». 2009. Часть VI. С. 10–13.

13. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Метод снижения размерности в переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». 2010. Часть VII, Т. 3. С. 41–42.

14. *Аккерман В.Б., Зайцев М.Л.* Снижение размерности в уравнениях гидродинамики // ЖВММФ. 2011. Т. 51, № 8. С. 1518–1530.

15. *Коренев Г.В.* Тензорное исчисление. М.: МФТИ, 1996.

16. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.

17. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Свободная поверхность и задача обтекания в вязкой жидкости // ЖЭТФ. 2011. Т. 140, № 4. С. 814–819.

References

1. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Course of Theoretical Physics, V. 6: Fluid Mechanics. Butterworth–Heinemann, Oxford, 1987.

2. *Williams F.A.* Combustion Theory. Benjamin Cummings, Menlo Park, CA, 1985.

3. *Zel'dovich Ya. B., Barenblatt G. I., Librovich V. B. and Makhviladze G. M.* The Mathematical Theory of Combustionand Explosion. Nauka, Moscow, 1980; Consultants Bureau, New York, 1985.

4. *Tikhonov A. N. and Samarskii A. A.* Equations of Mathematical Physics. M.: Nauka, 1966; NewYork: Dover, 1990.

5. *Samarskii A. A. and Popov Yu. P.* Difference Methods for Solving Problems of Gas Dynamics. M.: Nauka, 1980 (in Russian).

6. *Zaytsev M.L. , Akkerman V.B.* A Nonlinear Theory for the Motion of Hydrodynamic Discontinuity Surfaces. JETP. 2009. V. 108, N 4. P. 699–717.

7. *Zaytsev M.L. and Akkerman V.B.* Method for Describing the Steady-State Reaction Front in a Two-Dimensional Flow. JETP Letters. 2010. V. 92. N 11. P. 731–734.

8. *Bychkov V., Zaytsev M. and Akkerman V.* Coordinate-free description of corrugated flames with realistic gas expansion. Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 026312.

9. *Joulin G., El-Rabii H. and K. Kazakov K.* On-shell description of unsteady flames. J. Fluid Mech. 2008. V. 608. P. 217.

10. *Ott E.* Nonlinear evolution of the Rayleigh-Taylor instability of thin layor. Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. P. 1429–1432.

11. *Book D.L, Ott E., Sulton A.L.* Rayleigh-Taylor instability in the «shallow-water» approximation. Phys. Fluids. 1974. V. 17, N 4. P. 676–678.

12. *Zaytsev M., Akkerman V.* Method of dimension reduction in aero-hydrodynamic problems. Proceedings of 52-nd scientific conference of MIPT «Modern problems of fundamental and applied science». 2009. Part VI. P. 10–13.

13. *Zaytsev M., Akkerman V.* Method of dimension reduction in overdetermined systems of partial differential equations. Proceedings of 53-d scientific conference of MIPT «Modern problems of fundamental and applied science». 2010. Part VII, V. 3. P.41–42.

14. *Akkerman V.B. and Zaytsev M.L.* Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations //Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. V. 8, N 51. P. 1418–1430.

15. *Korenev G.V.* Tensor Calculus. M.: MIPT, 1996. (in Russian).

16. *Schouten J.A.* Tensor Analysis for Physicists. Oxford: Clarendon 1954; M.: Nauka, 1965.

17. *Zaytsev M.L., Akkerman V.B.* Free surface and flow problem for a viscous liquid // JETP. V. 113. N 4. P. 709–713.

Поступила в редакцию 01.09.2012.