

УДК 532.533.2

*М. А. Брутян<sup>1,2</sup>, У. Г. Ибрагимов<sup>2</sup>*<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н. Е. Жуковского<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

## Автомодельные турбулентные течения вязкого газа в клине

Рассмотрено турбулентное стационарное течение вязкого газа от источника, расположенного в вершине клина. В рамках классической модели Прандтля для турбулентной вязкости и гипотезы Буссинеска для тензора турбулентных напряжений установлена возможность построения автомодельных решений. Уравнения в частных производных при этом сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае произвольных значений определяющих параметров задачи проведено численное исследование и найдены их критические значения. Для течения в тонком клине построено асимптотическое решение.

**Ключевые слова:** уравнения Навье–Стокса, турбулентные течения вязкого газа, точные решения.

*М. А. Brutyan<sup>1,2</sup>, U. G. Ibragimov<sup>2</sup>*<sup>1</sup>Zhukovsky Aerohydrodynamic Institute<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology

## Self-similar turbulent flow of a viscous gas in a wedge

The turbulent steady flow of a viscous gas from a source in a wedge apex is considered. Within the framework of the classical Prandtl mixing length model and the Boussinesque approximation for the tensor of turbulent stress, there is a possibility of self-similar solution. The system of gas dynamic equations is reduced to the system of ordinary differential equations. In the case of arbitrary equations defined parameters, the numerical investigation is carried out and critical values of defining parameters are found. In the case of the flow in a thick wedge, the asymptotic solution is found.

**Key words:** Navier–Stokes equations, turbulent flow of viscous gas, exact solutions.

### 1. Введение

Течение Джеффери–Гамеля от источника массы (стационарное движение жидкости между двумя плоскими стенками, наклоненными под углом друг к другу) представляет собой один из немногих классических случаев, в котором удается построить точное решение уравнений Навье–Стокса в вязкой несжимаемой жидкости [1]. В работах [2–6] впервые установлена возможность построения точного решения для случая ламинарного течения вязкого сжимаемого газа в клине и конусе. В [2] численно решена задача о течении газа в конусе с граничными условиями проскальзывания для температуры и скорости, а в [4, 5] решена аналогичная задача с граничными условиями отсоса/вдува на стенках. В работе [6] задача решена как в автомодельной, так и в неавтомодельной постановке. Установлено, что автомодельные режимы течения могут быть реализованы в некоторой внутренней области конуса конечной длины. В [7] получено аналитическое решение задачи о ламинарном течении газа в клине, а в работе [8] получено аналогичное точное решение для плоской струи

© Брутян М. А., Ибрагимов У. Г., 2020

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2020

вязкого газа от линейного источника импульса. В частном случае, когда температура газа постоянна вдоль линий тока, а коэффициенты переноса – степенные функции температуры, построены аналитические решения. В [9] впервые рассматривается автомодельное турбулентное течение вязкого газа в конусе. Проведено численное решение системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих автомодельное турбулентное течение; полученные результаты сравниваются с аналогичным ламинарным течением [10].

В настоящей работе изучается возможность построения автомодельных решений для случая турбулентного течения сжимаемого газа в клине. Показано, что при определенной комбинации определяющих параметров задачи уравнения Навье–Стокса, осредненные по Фавру, могут быть сведены к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное турбулентное течение вязкого сжимаемого газа от источника массы, расположенного в вершине клина с полууглом раствора  $\alpha$  (рис. 1).

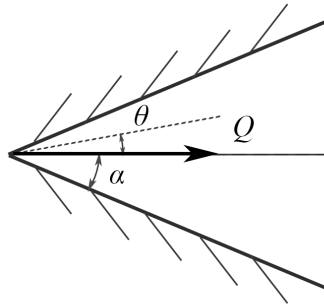


Рис. 1. Схема течения газа в клине

В полярных координатах  $(r, \theta)$  уравнения Навье–Стокса, осредненные по Фавру, имеют вид [11]:

$$\frac{\partial(r\rho u)}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r(\sigma_{rr} + \sigma_{Trr}))}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{r\theta} + \sigma_{Tr\theta})}{\partial r} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{T\theta\theta} \right], \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2(\sigma_{r\theta} + \sigma_{Tr\theta}))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{T\theta\theta})}{\partial \theta}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho T u \frac{\partial S}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( (\kappa + \kappa_T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\kappa + \kappa_T) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{\eta + \eta_T}{2} [S_{rr}^2 + S_{\theta\theta}^2 + 2S_{r\theta}^2] - \frac{2(\eta + \eta_T)}{3} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для термодинамических переменных:  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $S$  – соответственно плотность, давление, температура и энтропия единицы массы;  $\eta$  – коэффициент сдвиговой вязкости,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности. Течение в конусе предполагается радиальным, так что вектор скорости  $\mathbf{V} = (u, 0)$ . Компоненты тензора напряжений  $\sigma$  определяются следующими соотношениями:

$$\sigma_{rr} = \eta S_{rr} - \frac{2\eta}{3r} \frac{\partial}{\partial r}(ru); \quad \sigma_{\theta\theta} = \eta S_{\theta\theta} - \frac{2\eta}{3r} \frac{\partial}{\partial r}(ru); \quad \sigma_{r\theta} = \eta S_{r\theta},$$

$$S_{rr} = 2 \frac{\partial u}{\partial r}; \quad S_{\theta\theta} = 2 \frac{u}{r}; \quad S_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Тензор турбулентных напряжений  $\sigma_T$  и турбулентный тепловой поток  $\mathbf{q}_T$  согласно гипотезе Буссинеска [11, 12] представляются в следующем виде:

$$\sigma_{Trr} = \eta_T S_{rr} - \frac{2\eta_T}{3r} \frac{\partial}{\partial r}(ru); \quad \sigma_{T\theta\theta} = \eta_T S_{\theta\theta} - \frac{2\eta_T}{3r} \frac{\partial}{\partial r}(ru); \quad \sigma_{Tr\theta} = \eta_T S_{r\theta},$$

$$\mathbf{q}_T = -\kappa_T \nabla T.$$

В соответствии с теорией пути смешения Прандтля, коэффициент турбулентной вязкости  $\eta_T$ , определяется по формуле:

$$\eta_T = \frac{\rho l^2}{r} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|, \quad (5)$$

где  $l$  — длина пути смешения. Турбулентный коэффициент теплопроводности  $\kappa_T$  связан с  $\eta_T$  известным соотношением:

$$\kappa_T = \frac{\eta_T c_p}{\text{Pr}_T}.$$

Число Прандтля  $\text{Pr}$  в одноатомном газе близко к  $2/3$  [13], поэтому далее принимаем  $\eta/\kappa = 4/15R$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная. Турбулентное число Прандтля  $\text{Pr}_T$  для простоты будем считать постоянным и равным  $\text{Pr}_T = 1$ . Отметим также, что коэффициенты переноса предполагаются степенными функциями от температуры. В случае более сложной зависимости коэффициентов переноса от температуры, например, при выполнении закона Сазерленда, автомодельного решения отыскать не удастся.

Выберем в качестве масштабов значения газодинамических параметров  $\rho_0$ ,  $u_0$ ,  $T_0$  в некоторой произвольной точке на оси конуса  $r = r_0$ ,  $\theta = 0$  и перейдем к безразмерным переменным:  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{r}$ . Полученные уравнения движения содержат следующие параметры: число Прандтля, отношение теплоемкостей  $\gamma = c_p/c_v$ , число Рейнольдса  $\text{Re}_0 = \rho_0 u_0 r_0 / \eta_0$  и число Маха  $\text{M}_0 = u_0 / \sqrt{\gamma R T_0}$ , где через  $\eta_0$  обозначено значение вязкости при  $T = T_0$ ,  $\eta = \eta_0 (T/T_0)^k$ .

### 3. Вывод определяющих уравнений

В общем случае автомодельное решение для осесимметричного турбулентного течения газа по аналогии с «ламинарным» случаем будем искать в виде [7]:

$$\bar{u} = \frac{u(\theta)}{\bar{r}^m}; \quad \bar{p} = \frac{p(\theta)}{\bar{r}^{m+1}}; \quad \bar{\rho} = \bar{r}^{m-1} \rho(\theta); \quad \bar{T} = \frac{T(\theta)}{\bar{r}^{2m}}; \quad \bar{\eta} = \left( \frac{T(\theta)}{\bar{r}^{2m}} \right)^k; \quad \bar{\kappa} = \frac{\gamma}{\text{Pr}(1-\gamma)} \bar{\eta}. \quad (6)$$

Показатель степени переменной  $\bar{r}$  в (6) для плотности подбирался так, чтобы уравнение неразрывности (1) выполнялось автоматически, а для давления степень определялась из уравнений импульсов (2) и (3):

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \propto \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \propto \frac{1}{\bar{r}^{m+2}}. \quad (7)$$

Показатель степени  $\bar{r}$  для температуры подбирался из уравнения состояния, записанного с учетом выбора масштабов:

$$\gamma M_0^2 p(\theta) = \rho(\theta) T(\theta).$$

В выражении (5) присутствует неизвестный параметр  $l$ . В плоском радиальном течении выражение для длины пути смешения согласно теории Прандтля принимает вид [11, 12]:

$$l = \chi r(\alpha - |\theta|). \quad (8)$$

В формуле (8)  $\chi$  — некоторый коэффициент, числовое значение которого определяется с использованием экспериментальных данных. Окончательно выражение (5) можно переписать в следующей форме:

$$\bar{\eta}_T = \rho(\theta) \chi^2 (\alpha - |\theta|)^2 \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right|, \quad (9)$$

откуда заключаем, что слагаемые в уравнениях (2) – (4), отвечающие за турбулентную вязкость, имеют порядок:

$$\frac{\sigma_T}{\bar{r}} \propto \frac{1}{\bar{r}^{m+2}}. \quad (10)$$

Оценим теперь порядок «вязких» членов в уравнениях (2) – (4):

$$\frac{\sigma}{\bar{r}} \propto \frac{1}{\bar{r}^{2mk}} \frac{1}{\bar{r}^{m+2}}. \quad (11)$$

Легко видеть, что выражения (7), (10) и (11) имеют одинаковую степень  $\bar{r}$  при выполнении условия:

$$2mk = 0. \quad (12)$$

После подстановки соотношений (6), (8) в уравнения (2) – (4) получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(m+1)p + m\rho u^2 + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \frac{4}{3}(m^2-1)uT^k + \frac{d}{d\theta} \left( T^k \frac{du}{d\theta} \right) \right] + \chi^2 \left[ \frac{4}{3}(m^2-1)\rho(\alpha-|\theta|)^2 u \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| + \frac{d}{d\theta} \left( \rho(\alpha-|\theta|)^2 \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| \frac{du}{d\theta} \right) \right] = 0 \quad (13)$$

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{1}{\text{Re}_0} \left[ (1-m)T^k \frac{du}{d\theta} + \frac{2}{3}(m+2) \frac{d}{d\theta} (T^k u) \right] + \chi^2 \left[ (1-m)\rho(\alpha-|\theta|)^2 \frac{du}{d\theta} \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| + \frac{2}{3}(m+2) \frac{d}{d\theta} \left( \rho(\alpha-|\theta|)^2 \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| u \right) \right] \quad (14)$$

$$up \left( 1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) = \frac{1}{M_0^2 \text{Pr} \text{Re}_0 (\gamma-1)} \left[ 4m^2 T^{k+1} + \frac{d}{d\theta} \left( T^k \frac{dT}{d\theta} \right) \right] + \frac{4}{3\text{Re}_0} T^k u^2 (m^2 + m + 1) + \frac{T^k}{\text{Re}_0} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{\chi^2}{M_0^2 \text{Pr}_T (\gamma-1)} \left[ 4m^2 T \rho(\alpha-|\theta|)^2 \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| + \frac{d}{d\theta} \left( \rho(\alpha-|\theta|)^2 \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| \frac{dT}{d\theta} \right) \right] + \chi^2 \rho(\alpha-|\theta|)^2 \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| \left[ \frac{4}{3} u^2 (m^2 + m + 1) + \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (15)$$

с граничными условиями:

$$u(0) = 1; u(\alpha) = 0; T(0) = 1; T(\alpha) = T_w; p(0) = \frac{1}{\gamma M_0^2}. \quad (16)$$

Для практических расчетов требуется знать числовое значение параметра  $\chi$ . В работах [14, 15] для осесимметричных турбулентных течений сжимаемого газа принято  $\chi = 0.4$ . С учетом этого окончательно получаем замкнутую краевую задачу (13) – (16), которая описывает автомодельные турбулентные течения вязкого газа в клине.

#### 4. Течение в тонком клине

Рассмотрим подробнее частный случай течения в тонком клине, когда полуугол раствора  $\alpha \ll 1$ . В этом случае исходную систему уравнений (13) – (16) удастся существенно упростить. Действительно, пусть  $M_0 \propto \alpha \ll 1$  и  $Re_0 \propto 1$ , так чтобы выполнялось условие сплошной среды, а именно число Кнудсена  $Kn = M_0/Re_0 \ll 1$ . Представим основные газодинамические параметры в виде рядов по степеням  $\alpha$ :

$$u(\bar{\theta}, \alpha) = u_0(\bar{\theta}) + \alpha u_1(\bar{\theta}) + \dots,$$

$$p(\bar{\theta}, \alpha) = \frac{u_0(\bar{\theta}) + \alpha u_1(\bar{\theta}) + \dots}{\gamma M_0^2},$$

$$T(\bar{\theta}, \alpha) = T_0(\bar{\theta}) + \alpha T_1(\bar{\theta}) + \dots,$$

где  $\bar{\theta} = \theta/\alpha$ . После подстановки этих выражений в (13) – (16) для нулевого приближения получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{p_0}{\gamma M_0^2} + \frac{1}{\alpha^2 Re_0} \frac{d^2 u_0}{d\bar{\theta}^2} \simeq 0; \quad \frac{dp_0}{d\bar{\theta}} \simeq 0; \quad \frac{d^2 T_0}{d\bar{\theta}^2} \simeq 0,$$

решение которой с учетом граничных условий (16) имеет простой вид:

$$p_0 = 1; T_0 = 1; u_0 = 1 - \bar{\theta}^2.$$

При этом должно быть выполнено следующее условие автомодельности:

$$\frac{Re_0 \alpha^2}{\gamma M_0^2} = 2. \quad (17)$$

Заметим, что аналогичное условие  $Re_0/\gamma M_0^2 = 4/3 + 1/(1 - \cos \alpha)$ , полученное в работе [7] для произвольного угла в «ламинарном» случае, при  $\alpha \rightarrow 0$  в точности совпадает с условием (17). Решение для следующих членов разложения имеет вид

$$u_1 = \chi^2 Re_0 [4/3(\bar{\theta}^3 - 1) - 2(\bar{\theta}^4 - 1) + 4/5(\bar{\theta}^5 - 1)]; T_1 = 0; p_1 = 0,$$

а условие автомодельности принимает форму:  $Re_0(\alpha^2/2\gamma M_0^2 - 2\alpha\chi^2/15) = 1$ .

Отметим, что для тонкого клина в нулевом приближении отсутствует зависимость решения от параметра турбулентности  $\chi$ , поэтому оно совпадает с соответствующим решением (типа Пуазейля) для ламинарного течения [7]. Влияние турбулентности начинается с первого приближения.

## 5. Численное исследование автомодельного решения

Систему нелинейных дифференциальных уравнений (13) – (16) решить аналитически в случае произвольного полуугла  $\alpha$  не представляется возможным. Далее мы будем рассматривать систему (13) – (16) при  $k = 0$  и  $m = 0$ . При этих значениях параметров  $k$  и  $m$  в случае ламинарного течения имеется достаточно простое аналитическое решение [7]. Численный метод [16], с успехом примененный к задаче турбулентного течения газа в конусе [9], может быть также использован и для системы (13) – (16), решение которой зависит от чисел  $M_0$  и  $Re_0$  на оси клина, температуры стенки  $T_w$  и полуугла раствора клина  $\alpha$ . Для каждого значения  $\alpha$  задавался некоторый набор значений чисел  $M_0$ , а значения  $Re_0$  и  $T_w$  подбирались таким образом, чтобы выполнялись граничные условия (16).

Оказалось, что в «турбулентном» случае в отличие от «ламинарного» автомодельное течение существует только в ограниченном диапазоне значений числа  $M_0$ . Обратимся к зависимости  $Re_0 = Re_0(M_0)$  и  $T_w = T_w(M_0)$  при фиксированном  $\alpha = 0.1$  рад (см., соответственно рис. 2а, рис. 2б). При значениях  $M_0$ , превышающих некоторое критическое значение, решение найти не удается. График зависимости  $M_0^*(\alpha)$  представлен на рис. 3. Заметим, что ограничение на значения полуугла  $\alpha$  имеет место как в ламинарном, так и в турбулентном случае. При  $\alpha \rightarrow \pi/2$  давление газа становится отрицательным, что противоречит термодинамическому условию  $p > 0$ . Аналогичное поведение решения при  $\alpha \rightarrow \pi/2$  наблюдалось и в ламинарном течении [7], которое в отличие от турбулентного существует при сколь угодно больших  $M_0$ .

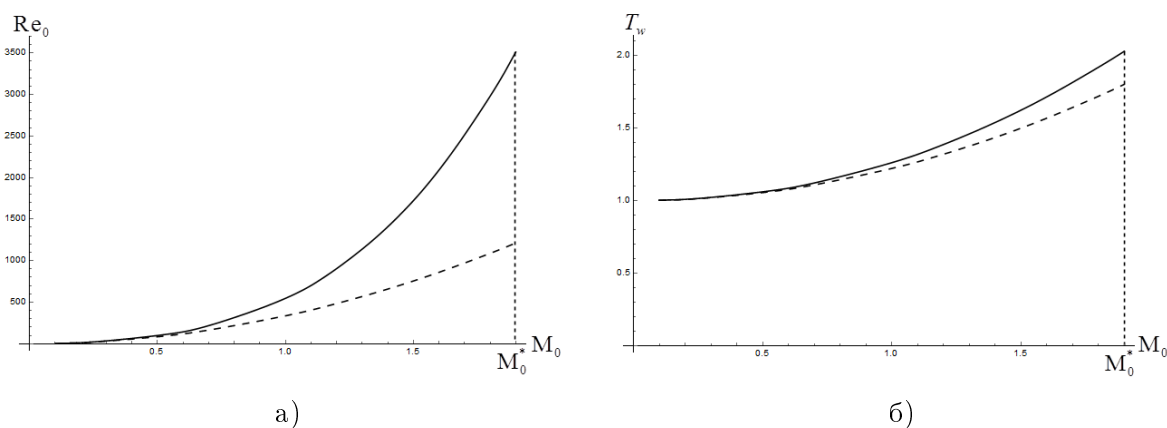


Рис. 2. Зависимость  $Re_0$  и  $T_w$  от числа Маха на оси клина в турбулентном (сплошная линия) и ламинарном (штриховая линия) случаях

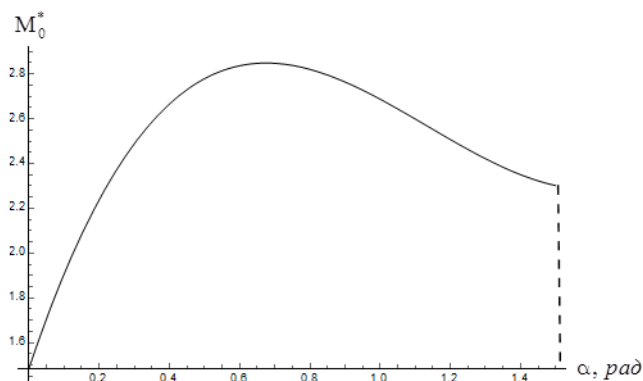


Рис. 3. Зависимость критического числа Маха  $M_0^*$  на оси клина от полуугла раствора  $\alpha$

Сравним профили скорости и температуры ламинарного и турбулентного течений при одинаковом расходе на примере клина с полууглом раствора  $\alpha \approx 6^\circ$ . Расход газа вычисляется по формуле:

$$Q = \rho_0 u_0 r_0 \cdot L \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\theta) u(\theta) d\theta = \text{Re}_0 \eta_0 \cdot L \cdot Q_0.$$

Здесь  $L$  — «ширина канала», которую для простоты будем считать равной единице. Для сравнения выберем ламинарный режим с параметрами:  $Q_{0L} = 5.57 \cdot 10^{-2}$ ,  $M_{0L} = 1.8$ ,  $\text{Re}_{0L} = 1088$ ,  $T_{wL}/T_{0L} = 1.72$ , и соответствующий, близкий к нему, турбулентный режим:  $Q_{0T} = 6.69 \cdot 10^{-2}$ ,  $M_{0T} = 1.2$ ,  $\text{Re}_{0T} = 904$ ,  $T_{wT}/T_{0T} = 1.39$ . Отсюда можно получить отношение скоростей потока турбулентного и ламинарного режимов течения:  $u_T/u_L \approx 0.74$ . Графики полученных зависимостей представлены на рис. 4а, рис. 4б.

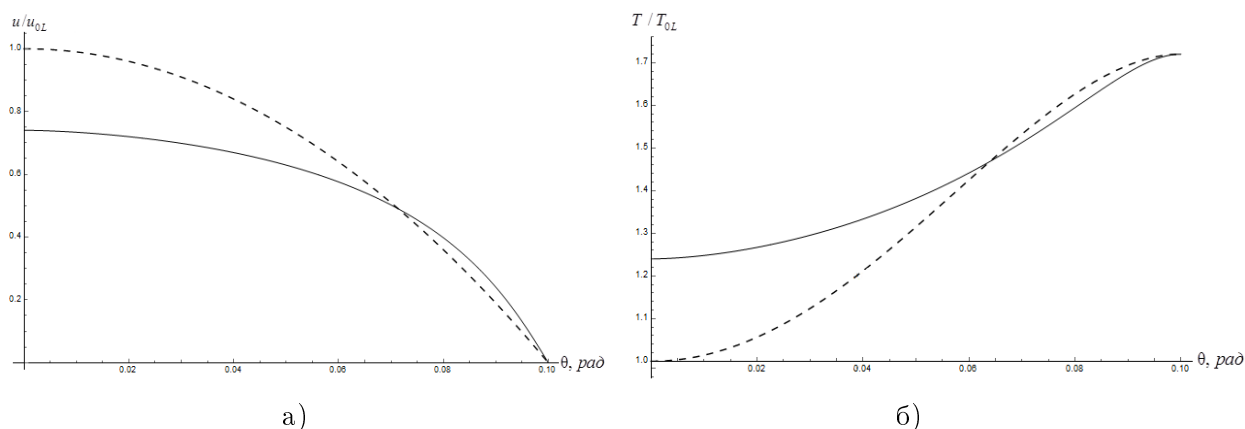


Рис. 4. Профили скорости и температуры в турбулентном (сплошная линия) и ламинарном (штриховая линия) случаях

Как видно из представленных зависимостей, усредненная скорость в турбулентном течении ниже, чем в ламинарном, а усредненная температура выше. Это можно объяснить тем, что в турбулентном течении часть кинетической энергии переходит в энергию турбулентных пульсаций. Дальнейшая диссипация энергии приводит к увеличению средней температуры турбулентного потока.

## 6. Заключение

Установлена возможность построения автомодельных решений для стационарного турбулентного течения газа от источника массы в клине. Для случая течения в тонком клине получено асимптотическое решение. В общем случае произвольного угла раствора клина проведено численное исследование. В результате установлено, что в отличие от ламинарного случая, для турбулентного течения газа решение существует лишь в ограниченном диапазоне определяющих параметров. Максимально возможное число Маха приближенно равно  $M_0^* \approx 2.8$ .

## Литература

1. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible // Handbuch der Physik. Band VIII/2. 1968. P. 1–384.
2. Williams J.C. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump // AIAA Journal. 1967. V. 5, N 12. P. 2128–2134.
3. Щенников В.В. Об одном классе точных решений уравнений Навье–Стокса для случая сжимаемого теплопроводного газа // ПММ. 1969. Т. 33, № 3. С. 582–584.

4. *Быркин А.П.* Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа // ПММ. 1969. Т. 33, № 1. С. 152–157.
5. *Быркин А.П., Межиров И.И.* О некоторых автомодельных течениях вязкого газа в канале // Изв. АН СССР, МЖГ. 1969. № 1. С. 100–105.
6. *Брутян М.А., Ибрагимов У.Г.* Автомодельные и неавтомодельные течения вязкого газа, истекающего из вершины конуса // Труды МФТИ. 2018. Т. 10, № 1. С. 100–105.
7. *Брутян М.А.* Автомодельные решения типа Джеффри–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII, № 6. С. 13–22.
8. *Брутян М.А., Крапивский П.И.* Точные решения стационарных уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа для плоской струи из линейного источника // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 5. С. 644–656.
9. *Ибрагимов У.Г.* Автомодельные турбулентные течения вязкого газа в конусе // Ученые записки ЦАГИ. 2019. Т. L, № 6. С. 33–40.
10. *Брутян М.А., Ибрагимов У.Г.* Автомодельные течения вязкого газа, истекающего из вершины конуса // Ученые записки ЦАГИ. 2018. Т. XLIX, № 3. С. 26–35.
11. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD // DCW Industries. 2006. P. 1–515.
12. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. Москва : Наука, 1974. С. 1–711.
13. *Чепмен С., Коулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. Москва : Изд-во иностр. лит., 1960.
14. *Meier H.U., Rotta J.C.* Experimental and theoretical investigation of temperature distributions in supersonic layers // AIAA Paper. 1960. N 744.
15. *Hasen G.A.* Navier–Stokes Solutions for an Axisymmetric Nozzle // AIAA-81-1474. July, 1981. P. 27–29.
16. *Сebиси Т., Бредшоу П.* Конвективный теплообмен. Москва : Мир, 1987.

## References

1. *Berker R.* Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Handbuch der Physik. Band VIII/2. 1968. P. 1–384.
2. *Williams J.C.* Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump. AIAA Journal. 1967. V. 5, N 12. P. 2128–2134.
3. *Shchennikov V.V.* Concerning one class of exact solutions of the Navier–Stokes equations for compressible heat conducting gas flow. PMM. 1969. V. 33, N 3. P. 582–584. (in Russian).
4. *Byrkin A.P.* Concerning one exact solution of the Navier–Stokes equations for compressible gas. PMM. 1969. V. 33, N 1. P. 152–157. (in Russian).
5. *Byrkin A.P., Mezhirov I.I.* Concerning some exact solution of viscous compressible gas flow in a channel. Fluid Dynamics. 1969. № 1. P. 100–105. (in Russian).
6. *Brutyanyan M.A., Ibragimov U.G.* Selfsimilar and nonselfsimilar solutions of the viscous compressible flow inside a cone. Proceedings of MIPT. 2018. V. 10, N 4. P. 113–121. (in Russian).
7. *Brutyanyan M.A.* Self-similar solutions of Jeffrey–Gamel type for compressible viscous gas flow. Uch. Zapiski TsAGI. 2017. V. XLVIII, N 6. P. 13–22. (in Russian).
8. *Brutyanyan M.A., Krapivsky P.I.* Exact solutions of the stationary Navier–Stokes equations of a viscous heat-conducting gas for a flat jet from a linear source. Prikladnaia matematika i mekhanika. 2018. V. 82, N 5. P. 644–656. (in Russian).



9. *Ibragimov U.G.* Self-similar solution of turbulent gas flow in a cone. Uch. Zapiski TsAGI. 2019. V. L, N 6. P. 33–40. (in Russian).
10. *Brutyan M.A., Ibragimov U.G.* Self-similar solutions of viscous compressible flow inside a cone. Uch. Zapiski TsAGI. 2018. V. XLIX, N 3. P. 26–35. (in Russian).
11. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries. 2006. P. 1–515.
12. *Schlichting G.* Boundary layer theory. Moscow : Nauka, 1974. P. 1–711. (in Russian).
13. *Chapman S., Cowling T.G.* The mathematical theory of non-uniform gases. Moscow : Foreign Languages Publisher House, 1960. (in Russian).
14. *Meier H.U., Rotta J.C.* Experimental and theoretical investigation of temperature distributions in supersonic layers. AIAA Paper. 1960, N 744.
15. *Hasen G.A.* Navier–Stokes Solutions for an Axisymmetric Nozzle. AIAA-81-1474. July, 1981. P. 27–29.
16. *Cebeci T., Bradshaw P.* Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. Moscow : Mir, 1987. (in Russian).

*Поступила в редакцию 18.05.2020*