УДК 517.444:330.44

А. Д. Агальцов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Теоремы обращения и единственности для интегральных операторов типа Радона

В работе изучаются интегральные операторы типа Радона и обобщённое преобразование Радона по гиперповерхностям уровня положительно однородных функций. Такие операторы возникают в модели чистой отрасли производства, учитывающей замещение производственных факторов. Для этих операторов получены формулы обращения и теоремы единственности. Указан пример неединственности.

Ключевые слова: интегральный оператор типа Радона, обобщённое преобразование Радона, функция прибыли, формула обращения, теорема единственности, пример неединственности.

1. Введение

Традиционно отечественные методики анализа производства основываются на развитой в условиях плановой экономики технологии анализа межотраслевого баланса. В современных условиях предположение о стабильности затрат в разрезе импортная–отечественная продукция по отношению к выпуску, вообще говоря, не выполняется. Поэтому при описании агентов необходимо моделировать их поведение, описывать процесс выбора агентом между отечественными и импортными ресурсами в ходе производства. Для этого можно использовать модифицированную модель Хаутеккера–Иохансена, предложенную А. Шананиным в работе [1].

В обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена функционирование чистой отрасли описывается в терминах функции прибыли $\Pi_q(p, p_0)$, сопоставляющей ценам на производственные факторы $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ и цене $p_0 > 0$ за единицу выпускаемой продукции суммарную прибыль отрасли за один производственный цикл, где $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1, \ldots, x_n \geqslant 0\}$. Функция прибыли имеет вид

$$\Pi_q(p, p_0) \equiv (\Pi_q \mu)(p, p_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (p_0 - q(p \circ x))_+ \, \mu(dx), \quad a_+ = \max(a, 0), \tag{1}$$

где $p \circ x = (p_1 x_1, \ldots, p_n x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $q(p \circ x)$ — функция себестоимости единицы выпускаемой продукции, μ — распределение мощностей по технологиям. Математически q — гладкая неотрицательная положительно однородная функция на $\mathbb{R}^n_+$, а μ — неотрицательная локально конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^n_+$.

При исследовании обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена естественно возникают вопросы обращения и единственности для функции прибыли как интегрального преобразования распределения мощностей по технологиям. Задача обращения заключается в нахождении распределения мощностей по техологиям μ по известной функции прибыли $\Pi_q \mu$. В настоящей работе при получении формулы обращения мы также предполагаем априорно известной функцию себестоимости q.

Вопросы единственности для функции прибыли $\Pi_q \mu$ связаны с нахождением условий на класс мер $\{\mu\}$ и на класс функций себестоимости $\{q\}$, при которых из равенства функций прибыли $\Pi_{q_1} \mu_1 = \Pi_{q_2} \mu_2$ для некоторых μ_1, $\mu_2 \in \{\mu\}$ и q_1, $q_2 \in \{q\}$ будет следовать, что $\mu_1 = \mu_2$. В настоящей работе вопросы единственности рассматриваются для класса функций себестоимости *с постоянной эластичностью замещения*:

$$q_\alpha(p \circ x) = \left((p_1 x_1)^\alpha + \ldots + (p_n x_n)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Случаю $\alpha = 1$ отвечает производство в отрасли с производственной функцией Леонтьева на микроуровне. В этом случае эффект замещения производственных факторов отсутствует.

Исследованию функции прибыли в модели чистой отрасли в отсутствие эффекта замещения посвящены работы [2,3]. Формула обращения для функции прибыли в случае постоянной эластичности замещения производственных факторов была получена в работе [4]. Формула обращения интегрального преобразования типа Радона, полученная в настоящей работе, является обобщением формул обращения для функций прибыли из работ [3, 4] на случай производственных систем с произвольной эластичностью замещения производственных факторов (не обязательно постоянной). Более того, полученная формула обращения обобщает формулу обращения для преобразования Лапласа и позволяет обратить преобразование Фантаппье.

2. Интегральные операторы типа Радона и обобщённое преобразование Радона

Функция прибыли (1) является частным случаем интегрального оператора типа Радона. Интегральный оператор типа Радона определяется с помощью непрерывной неотрицательной функции q на положительном ортанте $\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющей условию положительной однородности: $q(\lambda x) = \lambda q(x)$, $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, $\lambda > 0$, и с помощью функции $h \in L^1(0, +\infty)$ по формуле

$$(R^h_q\mu)(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h\big(q(p \circ x)\big)\, \mu(dx),$$

где μ — локально-конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^n_+$. Если f — достаточно регулярная и быстро убывающая функция на $\mathbb{R}^n_+$, мы будем также писать

$$(R^h_q f)(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h\big(q(p \circ x)\big) f(x)\, dx.$$

Функции прибыли в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена соответствует выбор $h(t) = (p_0 - t)_+$ (см. [1]). Другими примерами интегральных операторов типа Радона являются преобразование Лапласа, соответствующее выбору $q(p \circ x) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$, $h(t) = e^{-t}$, и преобразование Фантаппье, которому соответствуют $q(p\circ x) = p_1x_1+\ldots+p_nx_n$, $h(t) = (1 + t)^{-1}$.

С интегральным оператором типа Радона R^h_q тесно связано (обобщённое) преобразование Радона по гиперповерхностям уровня функции q. Если μ — неотрицательная локально-конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^n_+$, то её обобщённым преобразованием Радона $R_q\mu$ называется производная в смысле теории распределений:

$$(R_q\mu)(p, p_0) = \frac{\partial}{\partial p_0} \int\limits_{q(p\circ x)\leqslant p_0} \mu(dx). \tag{2}$$

При каждом фиксированном $p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ выражение $(R_q\mu)(p, \cdot)$ представляет собой неотрицательную меру на $[0, +\infty)$. Для функций $h \in C_c[0, +\infty)$ (непрерывных и с компактным носителем) справедлива формула

$$\int\limits_0^{+\infty} h(t)(R_q\mu)(p, t)\, dt = (R^h_q\mu)(p), \tag{3}$$

которая следует непосредственно из определения производной в смысле теории распределений:

$$\int\limits_0^{+\infty} h(t)(R_q\mu)(p,t)\,dt = -\int\limits_0^{+\infty} h'(t) \int\limits_{q(p\circ x)\leqslant t} \mu(dx) =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_{q(p\circ x)}^{+\infty} h'(t)\,dt\,\mu(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h\big(q(p\circ x)\big)\,\mu(dx) = (R_q^h\mu)(p).$$

Если теперь $f \in C(\mathbb{R}^n_+)$, то обобщённое преобразование Радона $R_q f$ по гиперповерхностям уровня достаточно гладкой положительно однородной функции q (т.е. $q(\lambda x) = \lambda q(x)$, $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, $\lambda > 0$) определяется формулой

$$(R_q f)(p, p_0) = \int\limits_{q(p\circ x)=p_0} f(x)\,(d_x q(p\circ x) \lrcorner\, dx),$$

где $d_x q(p\circ x) \wedge (d_x q(p\circ x) \lrcorner\, dx) = dx$. Форма $d_q q(p\circ x) \lrcorner\, dx$ называется формой Гельфанда–Лере. В случае неотрицательных функций f определения обобщённого преобразования Радона функции f и меры $f(x)\,dx$ приводят к одному и тому же выражению.

3. Обращение интегральных операторов типа Радона и обобщённого преобразования Радона

Задача обращения интегральных операторов типа Радона — это задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода вида

$$R_q^h f(p) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h(q(p\circ x)) f(x)\,dx = r(p),$$

где q — достаточно регулярная положительно однородная функция на $\mathbb{R}^n_+$, h — достаточно регулярная и быстро убывающая функция на $[0, +\infty)$, r — достаточно регулярная и быстро убывающая функция на $\mathbb{R}^n_+$. Оказывается, что решение этой задачи даётся явной формулой. Эта формула основана на том, что преобразование Меллина, применённое к $R_q^h\mu$, распадается в произведение преобразований Меллина от h, q и μ, что позволяет найти одну из этих функций по трём другим.

Напомним, что преобразование Меллина функции f на $\mathbb{R}^n_+$ определяется формулой

$$(Mf)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{z-I} f(x)\,dx, \quad x^{z-I} = \big(x_1^{z_1-1}, \ldots, x_n^{z_n-1}\big), \tag{4}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $I = (1, \ldots, 1)$. Обратное преобразование Меллина функции φ, определённой на множестве $c + i\mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, даётся формулой

$$(M_c^{-1}\varphi)(x) = (2\pi i)^{-n} p.v. \int\limits_{c+i\mathbb{R}^n} x^{-z}\varphi(z)\,dz,$$

где символ $p.v.$ соответствует пониманию интеграла как предела интегралов по шарам $\{z = c + iu \mid |u| \leqslant R\}$ при $R \to +\infty$.

Для того чтобы получить формулы обращения для обобщённого преобразования Радона и для интегральных операторов типа Радона, нам понадобится доказать несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть* $q \in C(\mathbb{R}^n_+) \cap C^1(\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+)$, $q(x) > 0$ *при* $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ *и* $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ *для всех* $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, $\lambda > 0$. *Пусть* $t^{c_1+\ldots+c_n-1}h(t) \in L^1(0,+\infty)$ *при некотором* $c = (c_1,\ldots,c_n) \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$. *Тогда при* $z \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} z = c$, *справедлива формула*

$$\big(M_p h(q(p\circ x))\big)(z) = x^{-z}\frac{(Me^{-q})(z)\,(Mh)(z_1+\ldots+z_n)}{\Gamma(z_1+\ldots+z_n)}.$$

Доказательство. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\big(M_p h(q(p\circ x))\big)(z) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{z-I}h(q(p\circ x))\,dp = x^{-z}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(p\circ x)^{z-I}h\big(q(p\circ x)\big)x^I\,dp =$$

$$= x^{-z}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y^{z-I}h\big(q(y)\big)\,dy = x^{-z}\int\limits_0^{+\infty} h(t)\int\limits_{q(y)=t} y^{z-I}(dq\lrcorner\, dy)\,dt =$$

$$= x^{-z}\int\limits_0^{+\infty} t^{z_1+\ldots+z_n-1}h(t)\,dt\int\limits_{q(y)=1} y^{z-I}(dq\lrcorner\, dy), \quad (5)$$

где $dq \wedge (dq\lrcorner\, dy) = dy$. Первый интеграл в последнем выражении — это преобразование Меллина от функции h. Осталось вычислить второй интеграл в последнем выражении. Для этого положим в цепочке (5) $h(t) = \exp(-t)$ и $x = (1,\ldots,1)$. С учётом того, что $M_t e^{-t} = \Gamma$ — гамма-функция, получим, что

$$\int\limits_{q(y)=1} y^{z-I}(dq\lrcorner\, dy) = \frac{\big(Me^{-q}\big)(z)}{\Gamma(z_1+\ldots+z_n)}.$$

Подставляя это равенство в (5), получаем требуемую формулу.

Лемма 2. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R}^n_+)$ *и* $f(x) = O(|x|^{-\alpha})$ *при* $|x| \to \infty$, *где* $\alpha > c_1+\ldots+c_n$ *для некоторого* $c = (c_1,\ldots,c_n) \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$. *Тогда* $x^{c-I}f(x)$, $x^{2c-I}|f(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$, *где* $I = (1,\ldots,1)$.

Доказательство. По условию существует такая константа C, что при достаточно больших $|x|$ имеет место оценка $|f(x)| \leqslant C(x_1+\ldots+x_n)^{-\alpha}$. Имеет место легко проверяемая формула

$$\int\limits_{\substack{x_1+\ldots+x_n\geqslant 1\\ x_1,\ldots,x_n\geqslant 0}} \frac{x^{c-I}}{(x_1+\ldots+x_n)^\alpha}\,dx = \frac{\Gamma(c_1)\ldots\Gamma(c_n)}{\Gamma(c_1+\ldots+c_n)}(\alpha-c_1-\ldots-c_n)^{-1},$$

где Γ — гамма-функция. Из этой формулы следует, что функция $(x_1+\ldots+x_n)^{-\alpha}$ интегрируема с весом x^{c-I} по внешности некоторого шара в $\mathbb{R}^n_+$ с центром в нуле. Из оценки на $|f|$ следует требуемое утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $q \in C(\mathbb{R}^n_+) \cap C^1(\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+)$, $q(x) > 0$ *при* $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ *при* $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, $\lambda > 0$. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R}^n_+)$, $f(x) = O(|x|^{-\alpha})$ *при* $|x| \to \infty$ *для некоторого* $\alpha > c_1+\ldots+c_n$, *где* $c = (c_1,\ldots,c_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < c_k < 1$, $k = 1, \ldots, n$. *Обозначим* $I = (1,\ldots,1)$. *При этих условиях справедливы следующие утверждения.*

(A) *При* $z \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} z = c$, *справедлива формула*

$$(Mf)(z)\cdot(Me^{-q})(I-z) = M[R_q f(\cdot,1)](I-z)\cdot\Gamma(n-z_1-\ldots-z_n). \quad (6)$$

(B) *Пусть* $t^{n-c_1-\ldots-c_n-1}h(t) \in L^1(0,+\infty)$, h *ограничена. Тогда при* $z \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} z = c$, *справедлива формула*

$$(Mf)(z)\cdot(Me^{-q})(I-z)\cdot(Mh)(n-z_1-\ldots-z_n) = (MR^h_q f)(I-z)\cdot\Gamma(n-z_1-\ldots-z_n). \quad (7)$$

Доказательство. (A) С учётом теоремы Фубини и леммы 1 при $z \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} z = c$, можно записать

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+} p^{-z} e^{-q(p\circ x)} f(x)\,dx\,dp = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{-z} e^{-q(p\circ x)}\,dp\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x) x^{z-I}\,dx\,(Me^{-q})(I-z). \quad (8)$$

С учётом леммы 2 выражение справа конечно, поэтому и выражение слева конечно. Снова пользуясь теоремой Фубини, запишем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+} p^{-z} e^{-q(p\circ x)} f(x)\,dx\,dp = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{-z} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-q(p\circ x)} f(x)\,dx\,dp =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{-z} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \int\limits_{q(p\circ x)=t} f(x)\,(d_x q(p\circ x) \lrcorner\, dx)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{-z} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{t} (R_q f)\left(\frac{p}{t}, 1\right) dt\,dp =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{-z} (R_q f)\left(\frac{p}{t}, 1\right) dp\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-z_1-\ldots-z_n-1}\,dt \cdot M[R_q f(\cdot,1)](I-z). \quad (9)$$

Сопоставляя (8) и (9), замечаем, что их левые части равны. Приравнивая их правые части, получаем утверждение пункта (A).
(B) Как и при доказательстве пункта (A), при $z \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} z = c$, с учётом теоремы Фубини справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+} p^{-z} h(q(p\circ x)) f(x)\,dp\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{z-I} f(x)\,dx \frac{(Me^{-q})(I-z)}{\Gamma(n - z_1 - \ldots - z_n)} (Mh)(n - z_1 - \ldots - z_n). \quad (10)$$

Снова применяя теорему Фубини, можно записать

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+} p^{-z} h(q(p\circ x)) f(x)\,dp\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p^{-z} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h(q(p\circ x)) f(x)\,dx\,dp = (MR^h_q f)(I-z). \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), получаем требуемое утверждение.

Далее нам понадобится ввести специальный класс функций. Положим по определению

$$C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in C^N(\mathbb{R}^n) \colon \|u\|_{N,\sigma} < \infty\right\}, \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \sigma > 0,$$
$$\|u\|_{N,\sigma} = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \colon |\alpha| \leqslant N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^n)^{\frac{\sigma}{n}} \left|\frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x^\alpha}\right|.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $u \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, *где* $\sigma > n$, $n \geqslant 2$, $N \geqslant 0$. *Тогда* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *и для преобразования Фурье*

$$\widehat{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} u(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

справедлива оценка

$$|\widehat{u}(\xi)| \leqslant \frac{\Omega^{n-1}n^N}{\sigma - n}\|u\|_{N,\sigma}|\xi|^{-N}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

где Ω^{n-1} *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Сначала заметим, что из условия $u \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ следует, что все частные производные функции u вплоть до порядка N принадлежат $L^1(\mathbb{R}^n)$ и справедлива формула

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x^\alpha}\,dx = (-i\xi_1)^{\alpha_1}\ldots(-i\xi_n)^{\alpha_n}\widehat{u}(\xi),$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| \leqslant N$. Беря модуль от левой и правой частей, домножая равенства на полиномиальные коэффициенты и суммируя по всем $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ с $|\alpha| = N$, получим равенство

$$\sum_{|\alpha|=N}\binom{N}{\alpha}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x^\alpha}\,dx\right| = (|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|)^N|\widehat{u}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Далее, из условия $u \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| = N$, вытекает оценка:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x^\alpha}\,dx\right| \leqslant \|u\|_{N,\sigma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1 + |x|^n)^{-\frac{\sigma}{n}}dx = \|u\|_{N,\sigma}\frac{\Omega^{n-1}}{\sigma - n}.$$

Учитывая эту оценку, оценку $|\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \geqslant |\xi|$, а также то, что сумма всех полиномиальных коэффициентов $\binom{N}{\alpha}$ по $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| = N$, равна n^N, получим из (13) указанное в условии леммы неравенство.

Теперь у нас всё готово для того, чтобы получить формулы обращения для обобщённого преобразования Радона и для интегральных операторов типа Радона.

Теорема 1. *Пусть* $q \in C(\mathbb{R}^n_+) \cap C^1(\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+)$, $q(x) > 0$ *при* $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ *и* $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ *при* $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, $\lambda > 0$. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R}^n_+)$, $f(x) = O(|x|^{-\alpha})$ *при* $|x| \to \infty$ *при некотором* $\alpha > c_1 + \ldots + c_n$, *где* $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < c_k < 1$, $k = 1, \ldots, n$. *Определим* $u(y) = e^{cy}f(e^y)$, $e^y = (e^{y_1}, \ldots, e^{y_n})$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. *Пусть* $u \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, *где* $N \geqslant n + 1$, $\sigma > n$, $n \geqslant 2$. *Далее, пусть* h *— ограниченная функция на* $[0, +\infty)$, *удовлетворяющая условию* $t^{n-c_1-\ldots-c_n-1}h(t) \in L^1(0, +\infty)$.

Тогда справедливы формулы

$$\begin{gathered} f(x) = f_{appr}(x) + f_{err}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \\ f_{appr}(x) = (-2\pi i)^{-n}\int\limits_{I-c+iB_R} x^{z-I}\frac{M[R_qf(\cdot,1)](z)}{(Me^{-q})(z)}\Gamma(z_1 + \ldots + z_n)\,dz, \\ f_{appr}(x) = (-2\pi i)^{-n}\int\limits_{I-c+iB_R} x^{z-I}\frac{(MR^h_qf)(z)\,\Gamma(z_1 + \ldots + z_n)}{(Me^{-q})(z)\cdot(Mh)(z_1 + \ldots + z_n)}\,dz, \\ |f_{err}(x)| \leqslant \frac{(\Omega^{n-1})^2n^N}{(2\pi)^n(\sigma - n)(N - n)}\|u\|_{N,\sigma}\frac{x^{-c}}{R^{N-n}}, \quad x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+, \end{gathered} \tag{14}$$

для всех $R > 0$, *где* $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant R\}$, Ω^{n-1} *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, $I = (1, \ldots, 1)$, $x^{-c} = x_1^{-c_1}\ldots x_n^{-c_n}$.

Доказательство. Из условия $u \in C^{N,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ следует, что $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Так как при этом функция u непрерывна, то по формуле обращения преобразования Фурье справедливо поточечное равенство

$$u(y) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y}\widehat{u}(\xi)\,d\xi, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $\widehat{u}$ определена формулой (12). Представляя $u(y) = e^{cy} f(e^y)$ и определяя $x = e^y$, перепишем это равенство в виде

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_{\mathrm{appr}}(x) + f_{\mathrm{err}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+,\\
f_{\mathrm{appr}}(x) &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{B_R} x^{-(c+i\xi)} \widehat{u}(\xi)\, d\xi,\\
f_{\mathrm{err}}(x) &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} x^{-(c+i\xi)} \widehat{u}(\xi)\, d\xi.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi y} u(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{(c+i\xi)y} f(e^y)\, dy =\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{c+i\xi-I} f(x)\, dx = (Mf)(c+i\xi),
\end{aligned}
$$

где преобразование Меллина Mf определяется формулой (4). Используя эту формулу и формулу (15), можно записать

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{appr}}(x) &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{B_R} x^{-(c+i\xi)} (Mf)(c+i\xi)\, d\xi =\\
&= (2\pi i)^{-n} \int\limits_{c+iB_R} x^{-z} (Mf)(z)\, dz.
\end{aligned}
$$

Подставляя в это равенство выражения для Mf из (6) и (7), получаем выражения для f_{appr} в формуле (14).

Воспользуемся теперь леммой 4, чтобы оценить f_{err} в формуле (15). Непосредственным применением леммы получаем оценку:

$$
\begin{aligned}
|f_{\mathrm{err}}(x)| &\leqslant x^{-c} (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi \leqslant\\
&\leqslant x^{-c} \frac{\Omega^{n-1} n^N}{(2\pi)^n (\sigma - n)} \|u\|_{N,\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |\xi|^{-N}\, d\xi =\\
&= x^{-c} \frac{(\Omega^{n-1})^2 n^N}{(2\pi)^n (\sigma - n)(N - n)} \|u\|_{N,\sigma} R^{n-N}.
\end{aligned}
$$

Теорема полностью доказана.

4. Теоремы единственности для обобщённого преобразования Радона и для функции прибыли

Перейдём теперь к вопросам инъективности преобразования Радона и функции прибыли. С экономической точки зрения нас интересует вопрос о том, при каких условиях разным распределениям мощностей по технологиям в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена будут соответствовать разные функции прибыли.

Мы будем рассматривать частный случай функций себестоимости выпускаемой продукции, отвечающий постоянной эластичности замещения производственных факторов. Именно, мы рассматриваем функции $q_\alpha(x) = (x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Легко видеть, что $q_\alpha \in C(\mathbb{R}^n_+) \cap C^1(\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+)$, $q_\alpha(\lambda x) = \lambda q_\alpha(x)$ при $x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ и $\lambda > 0$.

Сначала найдём условия на меры μ и ν, при которых из равенства функций прибыли $\Pi_{q_\alpha}\mu = \Pi_{q_\alpha}\nu$ (или обобщённых преобразований Радона: $R_{q_\alpha}\mu = R_{q_\alpha}\nu$) при одной и той же функции себестоимости q_α будет следовать, что меры μ и ν совпадают.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 0$, μ и ν — неотрицательные борелевские меры на $\mathbb{R}^n_+$, такие, что $\exp(-A|x|) \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$ при некотором $A > 0$. Пусть выполнено равенство (A) $R_{q_\alpha}\mu = R_{q_\alpha}\nu$ или (B) $\Pi_{q_\alpha}\mu = \Pi_{q_\alpha}\nu$. Тогда $\mu = \nu$.*

Доказательство. (A) Из равенства мер $R_{q_\alpha}\mu = R_{q_\alpha}\nu$ в силу (3) следует равенство

$$\int\limits_{q_\alpha(p\circ x)\leqslant t} \mu(dx) = \int\limits_{q_\alpha(p\circ x)\leqslant t} \nu(dx), \quad p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+,\ t > 0. \tag{16}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно применить формулу (3) к монотонно возрастающей последовательности непрерывных функций $h_n(\tau)$ с компактным носителем, поточечно сходящейся при $n \to \infty$ к индикатору отрезка $[0, t]$.

Теперь сделаем в интегралах в формуле (16) замену переменных $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$, $(p'_1, \ldots, p'_n) = (p_1^\alpha, \ldots, p_n^\alpha)$, $t' = t^\alpha$. Так мера μ перейдёт в меру μ', а мера ν — в меру ν'. Мы придём к равенству

$$\int\limits_{p'y\leqslant t'} \mu'(dy) = \int\limits_{p'y\leqslant t'} \nu'(dy),$$

где $p'y = p'_1 y_1 + \ldots + p'_n y_n$. Дифференцируя последнее равенство по t', домножая на $\exp(-t')$ и интегрируя по $t' \in [0, +\infty)$, получим, используя формулу (3) и представление $\exp(-t')$ в виде предела последовательности функций с компактными носителями, следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \exp(-py)\,\mu'(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \exp(-py)\,\nu'(dy).$$

Это равенство справедливо при $p \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} p > c(A)$, где $c(A) \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ — некоторый вещественный положительный вектор, зависящий от A. Из совпадения преобразований Лапласа мер μ' и ν' при $p \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} p > c(A)$, следует, что $\mu' = \nu'$, откуда следует, что $\mu = \nu$.

(B) Этот случай сводится к уже рассмотренному следующей леммой, более детальное доказательство которой можно найти в [4] (лемма 2.1).

Лемма 5. *Пусть μ — борелевская мера со знаком на $\mathbb{R}^n_+$, для которой конечна на компактах полная вариация $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, где $\mu = \mu_+ - \mu_-$ — разложение Жордана меры μ. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда справедлива следующая формула:*

$$\frac{\partial^2(\Pi_{q_\alpha}\mu)(p, p_0)}{\partial p_0^2} = (R_{q_\alpha}\mu)(p, p_0).$$

Схема доказательства леммы. С учётом определения (2) обобщённого преобразования Радона достаточно показать, что справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial p_0}(\Pi_{q_\alpha}\mu)(p, p_0) = \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \colon q_\alpha(p\circ x) \leqslant p_0\right\}.$$

Пусть $\Delta > 0$ (с $\Delta < 0$ всё аналогично) и $[A]$ обозначает скобку Айверсона: $[A] = 1$, если A истинно, и $[A] = 0$, если A ложно. Тогда требуемая формула следует из следующей цепочки равенств:

$$
\begin{gathered}
(\Pi_{q_\alpha}\mu)(p,p_0+\Delta)-(\Pi_{q_\alpha}\mu)(p,p_0)=\\
=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}[q_\alpha(p\circ x)\leqslant p_0+\Delta]\,(p_0+\Delta-q_\alpha(p\circ x))\,\mu(dx)-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}[q_\alpha(p\circ x)\leqslant p_0]\,(p_0-q_\alpha(p\circ x))\mu(dx)=\\
=\Delta\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}[q_\alpha(p\circ x)\leqslant p_0+\Delta]\,\mu(dx)+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}[p_0<q_\alpha(p\circ x)\leqslant p_0+\Delta]\,(p_0-q_\alpha(p\circ x))\,\mu(dx)=\\
=\Delta\cdot\mu\left\{x\in\mathbb{R}^n_+\mid q_\alpha(p\circ x)\leqslant p_0\right\}+o(\Delta).
\end{gathered}
$$

Теперь мы получим условия на меры μ и ν, при которых из равенства функций прибыли (или обобщённых преобразований Радона) мер μ и ν при разных функциях себестоимости будет следовать, что меры μ и ν совпадают. Эти условия оказываются более ограничительными, чем в случае одной и той же функции себестоимости, однако в случае разных функций себестоимости, кроме равенства мер μ и ν, можно также утверждать, что носители мер μ и ν сосредоточены на объединении координатных лучей. В реальных экономических системах распределения мощностей по технологиям μ и ν обычно абсолютно непрерывны на объединении координатных лучей (меры объединения лучей равны нулю), что соответствует невозможности производить продукцию, используя лишь один тип ресурсов. Поэтому для таких экономических систем совпадение функций прибыли при разных функциях себестоимости и при мерах из соответствующего класса возможно лишь тогда, когда функции прибыли и распределения мощностей по технологиям тождественно равны нулю.

Нам потребуется следующая теорема (см. [5]):

Теорема 3 (С.Н. Бернштейн (1926), В. Гильберт (1952))**.** *Вещественная функция $f(p)$, определённая на положительном ортанте $\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, представима в виде преобразования Лапласа:*

$$
f(p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}e^{-px}\mu(x),
$$

неотрицательной борелевской меры μ тогда и только тогда, когда f вполне монотонна, то есть f бесконечно дифференцируема, и для любого мультииндекса $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, и для любого $p\in\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ выполнено равенство

$$
(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}f(p)}{\partial p^\alpha}\geqslant 0.
$$

При этом $f(+0)=\mu(\mathbb{R}^n_+)$ и мера μ может не быть конечной. Более того, мера μ определена единственным образом и локально конечна.

Теперь мы воспользуемся теоремой 3, чтобы получить следующий результат.

Теорема 4. *Пусть μ, ν — неотрицательные конечные борелевские меры на $\mathbb{R}^n_+$, $\alpha>\beta>0$, $|x|^\alpha\in L^1(\nu)$. Пусть выполнено равенство (A) $R_{q_\alpha}\mu=R_{q_\beta}\nu$ или (B) $\Pi_{q_\alpha}\mu=\Pi_{q_\beta}\nu$. Тогда $\mu=\nu$, причём носитель этих мер сосредоточен в объединении координатных лучей $\bigcup_{k=1}^n Ox_k$, где $Ox_k=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+\colon\forall\ i\neq k\quad x_i=0\}$.*

Доказательство. (A) Из равенства $R_{q_\alpha}\mu=R_{q_\beta}\nu$ в силу (3) следует, что

$$
\int\limits_{q_\alpha(p\circ x)\leqslant t}\mu(dx)=\int\limits_{q_\beta(p\circ x)\leqslant t}\nu(dx),\quad p\in\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+,\ t>0.
$$

Теперь сделаем в левом интеграле замену $(y_1,\ldots,y_n)=(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha)$, а в правом — замену $(y_1,\ldots,y_n)=(x_1^\beta,\ldots,x_n^\beta)$. При этом мы перейдём к новым мерам μ' и ν'. Переходя также к новым параметрам p и t в интегралах, получим

$$\int\limits_{py\leqslant t} \mu'(dy) = \int\limits_{p^\gamma y\leqslant t^\gamma} \nu'(dy), \quad \gamma = \frac{\beta}{\alpha},\ 0<\gamma<1,$$

где $p^\gamma = (p_1^\gamma, \ldots, p_n^\gamma)$. Беря производную от последнего равенства по t, умножая на $\exp(-t)$ и интегрируя по $t \in [0, +\infty)$, получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp(-py)\,\mu'(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp\left(-(p^\gamma y)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\,\nu'(dy). \tag{17}$$

По теореме 3 слева стоит вполне монотонная функция, поэтому функция справа также вполне монотонна. В частности, её вторая частная производная по первой паре индексов (можно взять любую пару различных индексов) неотрицательна:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} y_1 y_2 \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{p_k}{p_1+\ldots+p_n}\right)^\gamma y_k\right)^{\frac{1}{\gamma}-2} \left((p^\gamma y)^{\frac{1}{\gamma}} + \gamma - 1\right) \exp\left(-(p^\gamma y)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\,\nu'(dy) \geqslant 0$$

при $p \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+^n$. Переходя к пределу при $p_1 = \ldots = p_n \to +0$, получим

$$(\gamma-1)n^{2\gamma-1} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} y_1 y_2 (y_1+\ldots+y_n)^{\frac{1}{\gamma}-2}\nu'(dy) \geqslant 0.$$

Так как $\gamma < 1$, то отсюда следует, что носитель меры ν' сосредоточен на множестве $\{y \in \mathbb{R}_+^n\colon y_1y_2 = 0\}$. Те же рассуждения можно было провести для произвольной пары индексов, поэтому носитель ν' сосредоточен на множестве $\{y \in \mathbb{R}_+^n \mid y_iy_j = 0,\ i \neq j\} = \bigcup_{k=1}^n Oy_k$. С учётом этого равенство (17) переписывается в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp(-py)\,\mu'(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp\left(-py^{\frac{1}{\gamma}}\right)\,\nu'(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \exp(-pu)\,\nu''(du),$$

где ν'' получается из ν' заменой переменных $(u_1, \ldots, u_n) = (y_1^{\frac{1}{\gamma}}, \ldots, y_n^{\frac{1}{\gamma}})$. Из совпадения преобразований Лапласа мер μ' и ν'' эти меры совпадают. Мера μ' получается из меры μ заменой переменных $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$, равно как и мера ν'' — из меры ν. Поэтому совпадают и меры μ и ν.

(B) Этот случай сводится к случаю (A) применением леммы 5.

Оказывается, что ограничение на рост мер в теореме 4 существенно. Имеет место следующий пример неединственности.

Предложение 1. *Рассмотрим две локально-конечные меры на $\mathbb{R}_+^2$:*

$$\mu(dx_1, dx_2) = \frac{1}{\pi x_1 x_2}\frac{1}{\sqrt{x_1+x_2}} K_1\left(\frac{\sqrt{x_1+x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}\right)\,dx_1\,dx_2,$$
$$\nu(dx_1, dx_2) = \frac{1}{x_1}\exp\left(-\sqrt{x_1}^{\,-1}\right)\,\delta(x_1-x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

где $K_1(s) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{s}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\,dt$, $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$, — модифицированная функция Бесселя второго рода. Тогда справедливо равенство

$$(R_{q_1}\mu)(p_1, p_2, dt) = (R_{q_{\frac{1}{2}}}\nu)(p_1, p_2, dt) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})\right)\frac{dt}{t} \equiv d\text{æ}_p(t).$$

Для доказательства предложения 1 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6. *Семейство* $\{æ_p\colon p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+\}$ *неотрицательных борелевских мер на* $[0,+\infty)$ *представимо в виде* $æ_p = (R_{q_\alpha}\mu)(p,\cdot)$ *при некотором* $0 < \alpha \leqslant 1$, *где* μ *— некоторая неотрицательная борелевская мера на* $\mathbb{R}^n_+$, *для которой* $\exp(-A|x|^\alpha) \in L^1(\mu)$ *при всех* $A > 0$, *тогда и только тогда, когда*

1) *при всех* $p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ *имеет место равенство*

$$F_\alpha(p) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \exp(-t^\alpha)\, dæ_{p^{\alpha^{-1}}}(t) = (L\mu')(p) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-py}\mu'(dy), \tag{18}$$

где $p^{\alpha^{-1}} = (p_1^{\alpha^{-1}}, \ldots, p_n^{\alpha^{-1}})$, $\mu'(dy)$ *— некоторая неотрицательная локально конечная борелевская мера,* L *— преобразование Лапласа,* $px = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$,

2) *для всех* $p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ *и* $\lambda > 0$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha)\, dæ_{\lambda p}(t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda^\alpha t^\alpha)\, dæ_p(t). \tag{19}$$

Более того, меры $\mu'(dy)$ *и* $\mu(dx)$ *определены однозначно и связаны заменой переменных* $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть h_n — монотонно возрастающая последовательность непрерывных функций с компактным носителем на $[0,+\infty)$, поточечно сходящаяся к $h(t) = \exp(-t^\alpha)$. Применяя формулу (3) к каждой функции h_n и беря предел при $n \to \infty$, с учётом теоремы Лебега о монотонной сходимости, получим формулу (18).

Снова по формуле (3) для функций h_n при всех $\lambda > 0$ можно записать

$$\int\limits_0^{+\infty} h_n(t)\, dæ_{\lambda p}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h_n(q_\alpha(\lambda p \circ x))\, \mu(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h_n(\lambda q_\alpha(p \circ x))\, \mu(dx) = \int\limits_0^{+\infty} h_n(\lambda t)\, dæ_p(t).$$

Предельным переходом при $n \to \infty$ в последнем равенстве получим формулу (19).
Достаточность. Определим $\widetilde{æ}_p = (R_{q_\alpha}\mu)(p,\cdot)$. Из необходимости и из свойств (18), (19) получим для всех $\lambda > 0$ следующую цепочку равенств:

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda^\alpha t^\alpha)\, d\widetilde{æ}_p(t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha) d\widetilde{æ}_{\lambda p}(t) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \exp(-\lambda^\alpha p^\alpha y)\, \mu'(dy) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha)\, dæ_{\lambda p}(t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda^\alpha t^\alpha)\, dæ_p(t).$$

Из совпадений преобразований Лапласа мер $æ'_p$ и $\widetilde{æ}'_p$, получающихся из мер $æ_p$ и $\widetilde{æ}_p$ заменой переменных $s = t^\alpha$ при $\lambda > 0$, следует, что меры $æ_p$ и $\widetilde{æ}_p$ равны, то есть $æ_p = (R_{q_\alpha}\mu)(p,\cdot)$.

Единственность мер следует из теоремы 3.

Доказательство. (Доказательство предложения 1). Нам достаточно показать, что $(R_{q_1}\mu)(p,\cdot) = æ_p$ и $(R_{q_{1/2}}\nu)(p,\cdot) = æ_p$. Для этого мы воспользуемся леммой 6. Очевидно, что для семейства $\{æ_p\}$ выполнено условие (19) при $\alpha = 1$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Далее, преобразование Лапласа меры μ равно

$$(L\mu)(p_1,p_2) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t - \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})\right) \frac{dt}{t},$$

поэтому по лемме 6 $æ_p = (R_{q_1}\mu)(p, \cdot)$. С другой стороны, если обозначить через ν' образ меры $\nu(dx)$ при замене переменных $y_1 = \sqrt{x_1}$, $y_2 = \sqrt{x_2}$, то для преобразования Лапласа меры ν' мы будем иметь формулу

$$(L\nu')(p_1, p_2) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}(p_1 + p_2)\right) \frac{dt}{t}.$$

Снова по лемме 6 получим, что $æ_p = (R_{q_{\frac{1}{2}}}\nu)(p, \cdot)$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-07-00075 А.

Литература

1. *Шананин А. А.* Обобщённая модель чистой отрасли производства // Математическое моделирование. — 1997. — Т. 9, № 9. — С. 117–127.
2. *Шананин А. А.* Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1985. — Т. 25, № 1. — С. 53–65.
3. *Henkin G. M., Shananin A. A.* Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions // Translations of Mathematical Monographs. — 1990. — V. 81. — P. 189–223.
4. *Агальцов А. Д.* Теоремы характеризации и обращения для обобщённого преобразования Радона // Труды МФТИ. — 2013. — Т. 5, № 4(20). — С. 48–61.
5. *Bochner S.* Harmonic Analysis and the Theory of Probability. — University of California Press, 1995.

Поступила в редакцию 28.10.2013.