Вопросы к экзамену по курсу «Теория поля» для ФМХФ и ФБМФ
Весенний семестр 2017 г.

1. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид
$$T^{ij} = -g^{ij}\frac{1}{16\pi}F^{kl}F_{kl} + \frac{1}{4\pi}F^{ik}F^{j}{}_{k}.$$
Вычислите $T^{i}{}_{i}$. Вычислите $\nabla_j T^{ij}$, используя уравнения Максвелла в 4-мерной записи. Обсудите физический смысл компонент $\nabla_j T^{0j}$ в получившемся выражении.

2. $S[\varphi(\underline{x})] = \int(-\frac{1}{2}(\partial_i\varphi)(\partial^i\varphi) - \frac{1}{2}\varphi^2)\, d^4\underline{x}$. Проварьируйте действие. Выполняется ли для такого поля принцип суперпозиции? Пусть $\varphi(\mathbf{r},t) = \phi(t)\cdot\cos(\mathbf{kr})$, где $\mathbf{k}$ — постоянный вектор. Запишите и решите уравнения движения для обобщённой координаты $\phi(t)$. Как бы вы проинтерпретировали такое решение?

3. Тензор электромагнитного поля F_{ij}. Его связь с 4-потенциалом A_i и полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Калибровочная инвариантность F_{ij}, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

4. Действие для электромагнитного поля имеет вид
$$S[A_i(\underline{x})] = \int\left(-\frac{F^{ij}F_{ij}}{16\pi} + A_i j^i(\underline{x})\right) d^4\underline{x}, \qquad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$
Получите уравнения Максвелла в 4-мерной форме. Из каких соображений получается 1-я пара, а из каких 2-я?

5. Действие для электромагнитного поля имеет вид
$$S[A_i(\underline{x})] = \int\left(-\frac{F^{ij}F_{ij}}{16\pi} + A_i j^i(\underline{x})\right) d^4\underline{x}, \qquad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$
Как преобразуется это действие при калибровочном преобразовании? Какое условие накладывает на источники калибровочная инвариантность действия?

6. Разложите $\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}$ в ряд по степеням r_α до второго порядка включительно. Используя данное разложения получите мультипольное разложения для электростатического потенциала до квадрупольного члена.

7. Электростатическая энергия имеет вид $E_e = \int\frac{E^2}{8\pi}\,dV$. Выразите энергию через плотность заряда ρ и электростатический потенциал φ. Пусть система зарядов разбита на две подсистемы. Выделите в общей энергии энергии самодействия подсистем и энергию их взаимодействия.

8. $H(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Используя законы сохранения сведите задачу к задаче о движении центра масс и задаче об относительном движении частиц.

9. $H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(|\mathbf{r}|)$. Используя законы сохранения сведите задачу к задаче о радиальном движении частицы.

10. $G = \sum_a(\mathbf{r}_a,\mathbf{p}_a)$ (сумма берётся по всем частицам). Пусть система описывается гамильтонианом $H = \sum_a\frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + U$, где U — однородная функция координат степени k. Выразите $\frac{dG}{dt}$ через кинетическую и потенциальную энергии системы. С какой теоремой связана эта задача?

11. Что такое адиабатический инвариант? При каких условиях адиабатический инвариант сохраняется? Найдите адиабатический инвариант для гармонического осциллятора.

12. Рассмотрим уравнение Клейна-Фока-Гордона. $\Box\varphi = a\varphi$ ($a = \mathrm{const}$). Выполняется ли для этого уравнения принцип суперпозиции? Найдите решения в виде $\varphi = \cos(\mathbf{kr} - \omega t)$. Из функции $\omega(\mathbf{k})$ найдите фазовую скорость и групповую скорость.

13. Найдите остаточные калибровочные преобразования для калибровки Лоренца. Т.е. найдите ограничения на функцию $f(\underline{x})$, задающую калибровочное преобразование, если и до и после калибровочного преобразования потенциалы удовлетворяют калибровочному условию Лоренца $\nabla_i A^i(\underline{x}) = 0$.

14. Имеется неоднородное волновое уравнение $\Box A^i = -4\pi j^i$. Написать уравнение на функцию Грина (не решать). Выразить решение через функцию Грина $G(\mathbf{r}, t)$ и $j^i(\mathbf{r}, t)$, показать, что это действительно решение. Подставить запаздывающую функцию Грина $G_-(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(t-r/c)}{r}$ и получить запаздывающие потенциалы.

15. Найдите остаточные калибровочные преобразования для калибровки Кулона. Т.е. найдите ограничения на функцию $f(\mathbf{r}, t)$, задающую калибровочное преобразование, если и до и после калибровочного преобразования потенциалы удовлетворяют калибровочному условию Лоренца $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} = 0$.

16. Имеется уравнение Пуассона для скалярного потенциала в электродинамике $\triangle\varphi = -4\pi\rho$. Написать уравнение на функцию Грина (не решать). Выразить решения через функцию Грина $g(\mathbf{r})$ и ρ, показать, что это действительно решения. Подставить функцию Грина $g(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$ и получить электростатический потенциал. Показать, что $g(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$ — действительно функция Грина.

17. Постановка задачи рассеяния для частиц. Для аксиально-симметричного случая записать $d\sigma$ через прицельный параметр.

18. Имеется неоднородное волновое уравнение $\Box A^i = -4\pi j^i$. Написать уравнение на функцию Грина (не решать). Выразить решение через функцию Грина $G(\mathbf{r}, t)$ и $j^i(\mathbf{r}, t)$, показать, что это действительно решение. Подставить опережающую функцию Грина $G_+(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(t+r/c)}{r}$ и получить опережающие потенциалы.

19. Записать $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ для точечной частицы с зарядом q, движущейся по закону $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$.

20. Постановка задачи рассеяния для электромагнитной волны. Поляризация рассеянной волны в дипольном приближении.

21. В точке равновесия матрица вторых производных потенциальной энергии имеет вид: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Матрица массовых коэффициентов имеет вид $M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Определите устойчивость положения равновесия. Найдите собственные частоты малых колебаний.

    + похожие вопросы в других формулировках.

22. Дипольный момент меняется по закону $\mathbf{d} = (d_0 \cos\omega t, d_0 \sin\omega t, 0)$. d_0, ω — константы. Найдите полную (или по углам) интенсивность дипольного излучения.

    + похожие вопросы в других формулировках

23. $\mathbf{E} = 3\mathbf{e}_x \cos(kz - ckt) + 3\mathbf{e}_y \sin(kz - ckt)$. Запишите 4-мерный волновой вектор k^i и 3-мерный вектор поляризации $\mathbf{e}$. Какая это поляризация?

    + похожие вопросы в других формулировках

24. Квадрупольный момент меняется по закону $Q_{\alpha\beta} = Q_0 \cos\omega t \begin{pmatrix} 1 & ? & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$. Q_0, ω — константы, ? — восстановите самостоятельно. Найдите полную интенсивность квадрупольного излучения.

    + похожие вопросы в других формулировках

25. Магнитный дипольный момент меняется по закону $\boldsymbol{\mu} = (-\mu_1 \sin\omega t, \mu_2 \cos\omega t, 0)$. $\mu_1, \mu_2, , \omega$ — константы. Найдите полную интенсивность магнитного дипольного излучения.

    + похожие вопросы в других формулировках.

26. Нерелятивистская частица с зарядом q движется по синусоиде $\mathbf{r}(t) = (a \sin\omega t, 0, 0)$. a, ω — константы. Найдите интенсивность э.-м. излучения по углам $\frac{dI}{d\Omega}$.

    + похожие вопросы в других формулировках.

27. $H(u, v, p_u, p_v) = \frac{v^2 p_u^2}{2} + \frac{p_v^2}{2} + \frac{1}{4}(v+1)^2 + \frac{3}{2}u^4$. Найти положение равновесия и собственные частоты.

    + похожие вопросы в других формулировках.

28. Осциллятор имеет массу m, заряд q и жёсткость k. Найти амплитудно-частотную характеристику (зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней вынуждающей силы $F = F_0 \cos \omega t$) с учётом радиационного трения.

29. Полную интенсивность излучения релятивистской частицы, движущейся во внешнем электромагнитном поле выразите через тензор электромагнитного поля F_{ij}, 4-скорость u^i, заряд q и массу m.

30. Осциллятор имеет массу m, заряд q и жёсткость k. Записать и решить уравнения движения с учётом радиационного трения.