УДК 519.179.1

А. Э. Хузиева

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

О сильных раскрасках 4-однородных случайных гиперграфов

В работе рассматривается проблема о поиске пороговой вероятности сильной раскрашиваемости случайного 4-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, 4, p)$. Раскраска множества вершин гиперграфа называется сильной, если любым двум вершинам $u \neq v$, лежащим в одном ребре, присвоены различные цвета. Оценивается точная пороговая вероятность существования сильной раскраски $H(n, 4, p)$ в r-цветов. Этому порогу отвечает так называемый разреженный случай, когда $p = cn/\binom{n}{4}$ для фиксированного $c > 0$. Доказано, что при $c \leqslant \frac{r \ln r}{6} - \frac{13}{36} \ln r - \frac{1}{6} - r^{-1/9}$ случайный гиперграф $H\left(n, 4, \frac{cn}{\binom{n}{4}}\right)$ является сильно раскрашиваемым в r цветов с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$.

Ключевые слова: случайные гиперграфы, раскраска гиперграфов, сильная раскраска, сильное хроматическое число, метод второго момента.

A. E. Khuzieva

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

On the strong colorings of a random 4-uniform hypergraph

The paper deals with the problem of estimating the probability threshold for the property of the strong colorability for a random 4-uniform hypergraph in the binomial model $H(n, 4, p)$. A coloring of the hypergraph vertex set is said to be strong if any two vertices $u \neq v$ that are contained in the same edge, are given different colors. We estimate the probability threshold of the existence of a strong coloring with r colors for $H(n, 4, p)$. The threshold corresponds to the so called sparse case when $p = cn/\binom{n}{4}$ for fixed $c > 0$. We prove that for $c \leqslant \frac{r \ln r}{6} - \frac{13}{36} \ln r - \frac{1}{6} - r^{-1/9}$ the random hypergraph $H\left(n, 4, \frac{cn}{\binom{n}{4}}\right)$ is strongly r-colorable with r colors with probability tending to 1 as $n \to \infty$.

Key words: random hypergraphs, coloring of hypergraphs, strong coloring, strong chromatic number, second moment method.

1. Введение и история задачи

В работе рассматривается задача об асимптотическом поведении сильного хроматического числа в случайных гиперграфах. Напомним основные определения.

1.1. Основные определения и изучаемая модель

Пусть $H = (V, E)$ — некоторый гиперграф. Раскраска множества вершин гиперграфа V называется *правильной*, если она не порождает одноцветных ребер в E. Если существует правильная раскраска гиперграфа H в r цветов, то H называется *r-раскрашиваемым*.

Хроматическим числом гиперграфа H, $\chi(H)$, называют такое минимальное r, что H является r-раскрашиваемым.

В данной работе мы концентрируемся на изучении сильного хроматического числа. Раскраска множества вершин гиперграфа называется *сильной*, если любые вершины $u \neq v$, лежащие в одном ребре, имеют различные цвета. Если существует сильная раскраска гиперграфа H в r цветов, то будем говорить, что H является *r-сильно раскрашиваемым. Сильным хроматическим числом* гиперграфа H, $\chi_{str}(H)$, называется такое минимальное r, что H является r-сильно раскрашиваемым. Очевидно, что сильная раскраска является и правильной, а потому $\chi_{str}(H) \geqslant \chi(H)$.

Основным объектом изучения работы является случайный k-однородный гиперграф $H(n,k,p)$ в биномиальной модели, в которой каждое k-подмножество некоторого множества из n вершин включается в $H(n,k,p)$ в качестве ребра независимо от других с вероятностью $p \in (0,1)$. Целью работы является получение асимптотических результатов относительно $\chi_{str}(H(n,k,p))$ при фиксированном $k \geqslant 3$, $p = p(n)$ и растущем n.

1.2. История результатов

Изучение хроматического числа гиперграфа $H(n,k,p)$ началось в 80-х годах прошлого века. Асимптотическое поведение $\chi(H(n,k,p))$ изучал, например, Э. Шамир [1]. Им были получены результаты для фиксированного $k > 2$ и $p > n^{-\varepsilon}$ для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$. Его результаты были дополнены М. Кривелевичем и Б. Судаковым для почти всех остальных значений $p = p(n)$ [2]. Суммируя эти результаты, можно заключить, что если $p = p(n) \to 0$ с ростом n, при этом $n^{k-1}p \to +\infty$, то выполнен следующий закон больших чисел:

$$\chi(H(n,k,p)) \cdot \left(\frac{d}{k \ln d}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \xrightarrow{\mathsf{Pr}} 1$$

при $n \to +\infty$, где $d = (k-1)\binom{n-1}{k-1}p$. Указанный выше результат не распространяется лишь на так называемый разреженный случай, когда $p = cn/\binom{n}{k}$ для фиксированного $c > 0$. Оказывается, в разреженном случае хроматическое число случайного гиперграфа ограничено, и здесь можно получать очень точные результаты, связанные с оценками пороговых вероятностей r-раскрашиваемости.

Изучение хроматического числа разреженного случайного гиперграфа началось в неопубликованной работе Н. Алона и Дж. Спенсера (текст доступен на личном сайте Н. Алона), в которой они рассматривали пороговую вероятность для свойства 2-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$. Алон и Спенсер с помощью метода первого момента доказали, что при

$$c > 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} + o_k(1)$$

гиперграф $H(n,k,cn/\binom{n}{k})$ с вероятностью, стремящейся к 1, не является 2-раскрашиваемым. А при $c = O(2^k/k^2)$, наоборот, хроматическое число $H(n,k,cn/\binom{n}{k})$ равно двум с вероятностью, стремящейся к 1. Их результаты были в дальнейшем улучшены в работах [3] Д. Ахлиоптаса, М. Кривелевича, Дж. Кима и П. Тетали, а также Д. Ахлиоптаса и К. Мура [4]. Последние показали, что при

$$c < 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + o_k(1)$$

гиперграф $H(n,k,cn/\binom{n}{k})$ является 2-раскрашиваемым с вероятностью, стремящейся к 1. Тем самым им удалось найти пороговую вероятность свойства 2-раскрашиваемости как пороговое значение для параметра c разреженного случая с точностью до аддитивной константы. А. Коджа-Огланом и Л. Здеборовой в [5] нижняя граница 2-раскрашиваемости была усилена до $2^{k-1}\ln 2 - \ln 2 + o_k(1)$, также они предположили, что пороговая константа должна равняться $2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + o_k(1)$.

В последние годы активно шли исследования по поиску пороговой вероятности r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ для заданного $r \geqslant 3$. Так, М. Дайер, А. Фриз и К. Гринхилл в работе [6] получили следующие результаты:

1) если $k \geqslant 3, r \geqslant 2, k, r \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ фиксированы, $p = cn/\binom{n}{k}$, то при $c > r^{k-1}\ln r - \ln r/2$ выполнено $\Pr(\chi(H(n,k,p) \geqslant r+1)) \to 1$ при $n \to \infty$;

2) если же $c < r^{k-1}\ln r - \frac{r-1}{r}(1 + \ln r) - O(\frac{k^2 \ln r}{r^{k-1}})$, то, наоборот, выполнено $\Pr(\chi(H(n,k,p)) \leqslant r) \to 1$ при $n \to \infty$.

Вышеприведенные результаты были в дальнейшем усилены в работах П. Эйра, А. Коджа-Оглана, К. Гринхилл [7] и Д. А. Шабанова [8], в которых авторы уменьшили интервал неопределенности для параметра c до $\ln 2 + o_r(1)$ при фиксированном k и $r \to \infty$ (работа [7]) и до $\frac{r-1}{r} + o_k(1)$ при фиксированном r и $k \to \infty$ (работа [8]).

Исследования сильного хроматического числа случайного гиперграфа также велись весьма активно. В неразреженных случаях асимптотическое поведение $\chi_{str}(H(n,k,p))$ было изучено в уже упоминавшихся работах Э. Шамира [1], М. Кривелевича и Б. Судакова [2]: пусть $d = (k-1)\binom{n-1}{k-1}p$ и $d = o(n)$, но $d \to +\infty$ с ростом n, тогда выполнен следующий закон больших чисел:

$$\chi_{srt}(H(n,k,p)) \cdot \left(\frac{d}{2\ln d}\right)^{-1} \xrightarrow{\Pr} 1$$

при $n \to +\infty$. Но снова данный результат неприменим в разреженном случае, когда $p = cn/\binom{n}{k}$ для фиксированного $c > 0$. В разреженном случае известно гораздо меньше. Единственный содержательный результат был получен в недавней работе А. Е. Балобанова и Д. А. Шабанова [9], где авторы рассмотрели частный случай $k = 3$. Они показали, что при достаточно больших r и

$$c < \frac{r\ln r}{6} - \frac{5}{18}\ln r - \frac{1}{3} - r^{-1/6}$$

сильное хроматическое число $H(n, 3, cn/\binom{n}{3})$ с вероятностью, стремящейся к 1, не превосходит r, а при

$$c > \frac{r\ln r}{6} - \frac{5}{18}\ln r + O(\ln r/r)$$

оно, наоборот, строго больше r с вероятностью, стремящейся к 1. Случай $k > 3$ ранее не исследовался.

1.3. Новый результат

Основной результат настоящей работы состоит в получении нижней оценки пороговой вероятности для сильной r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ при $k = 4$.

Теорема 1. *Существует такое r_0, что для любого $r > r_0$ и любого $c > 0$, удовлетворяющего неравенству*

$$c < \frac{r\ln r}{6} - \frac{13}{36}\ln r - \frac{1}{6} - r^{-1/9}, \tag{1}$$

выполнено

$$\Pr\left(\chi_{str}\left(H\left(n, 4, cn/\binom{n}{4}\right)\right) \leqslant r\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что наш результат весьма близок к максимально возможному. Так, из следствия 3.2 работы [2] следует, что с вероятностью, стремящейся к 1, при $p = cn/\binom{n}{4}$ выполнено

$$\chi_{str}(H(n,4,p)) \geqslant \frac{d}{2\ln d}$$

при $d = 3\binom{n-1}{3}p$. Тем самым $\chi_{str}(H(n,4,p)) \geqslant \frac{6c}{\ln c} > r$ уже при $c > \frac{r\ln r}{6}(1+o_r(1))$ для подходящей функции $o_r(1)$.

В следующем разделе мы докажем теорему 1.

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы основывается на применении метода второго момента и следует идеям и структуре работ [6], [8], [9].

2.1. Точная пороговая вероятность

Существование точной пороговой вероятности для свойства сильной r-раскрашиваемости случайных гиперграфов является одним из основных моментов нашего доказательства. Напомним, что функция $\hat{p}_{r,k} = \hat{p}_{r,k}(n) \in [0,1]$ называется *точной пороговой вероятностью* для свойства сильной r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$, если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнено:

$$\Pr(\chi_{str}(H(n,k,p)) \leqslant r) \to \begin{cases} 0, & \text{если } p = p(n) \geqslant (1+\varepsilon)\hat{p}_{r,k} \text{ для всех достаточно больших } n; \\ 1, & \text{если } p = p(n) \leqslant (1-\varepsilon)\hat{p}_{r,k} \text{ для всех достаточно больших } n. \end{cases}$$

Доказательство существования точной пороговой вероятности для классического свойства r-раскрашиваемости было произведено в работе [6] в лемме 1.2. Аналогичные рассуждения дают нам доказательство существования точной пороговой вероятности для свойства сильной r-раскрашиваемости.

Существование точной пороговой вероятности позволяет нам проверять, что вероятность $\Pr(\chi_{str}(H(n,4,cn/\binom{n}{4})) \leqslant r)$ отделена от нуля при выполнении условия (1):

$$\liminf_{n\to\infty} \Pr\left(\chi_{str}\left(H\left(n,4,\frac{cn}{\binom{n}{4}}\right)\right) \leqslant r\right) > 0. \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то $\Pr(\chi_{str}(H(n,4,\frac{c'n}{\binom{n}{4}})) \leqslant r) \to 1$ для всех $c' < c$. Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать выполнение (2) при условии (1).

2.2. Равномерная модель

Нам понадобится также другая модель случайного гиперграфа: $H(n,4,m)$, в котором m ребер выбираются случайно и независимо. Четыре вершины в каждом ребре также выбираются случайно и независимо с равномерным распределением на множестве всех вершин. Подобный гиперграф $H(n,4,m)$ может содержать повторяющиеся ребра с одинаковым набором вершин и неправильные ребра с повторяющимися вершинами. В [6] авторы показали, что достаточно доказать выполнение неравенства (2) для гиперграфа $H(n,4,\lceil cn\rceil)$ вместо $H(n,4,\frac{cn}{\binom{n}{4}})$ для классического хроматического числа гиперграфа. Доказательство данного факта использует два свойства рассматриваемого события: монотонность и асимптотику математического ожидания числа ребер в двух моделях. Данные свойства выполнены и для события сильной r-раскрашиваемости.

2.3. Сбалансированная раскраска

Мы будем искать сильную раскраску во множестве сбалансированных раскрасок. Напомним, что раскраска гиперграфа на n вершинах в r цветов называется *сбалансированной*, если количество вершин каждого цвета равняется $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ или $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$.

В работе [6] (лемма 1.4) авторы показали, что достаточно рассмотреть случай, когда n делится на r. В частности, они доказали, что если $t = \lfloor n/r \rfloor$, то

$$\Pr(\chi(H(n,k,\lceil cn\rceil)) \leqslant r) \geqslant \Pr(\chi(H(tr,k,\lceil cn\rceil)) \leqslant r) - o_n(1). \tag{3}$$

Данная лемма дословно переносится на наш случай сильного хроматического числа. Таким образом, нам достаточно доказать неравенство

$$\liminf_{t\to\infty} \Pr(\chi_{str}(H(tr,4,\lceil c(t+1)r\rceil)) \leqslant r) > 0.$$

Пусть n делится на r, обозначим через X_n число сильных сбалансированных раскрасок в r цветов случайного гиперграфа $H(n,4,\lceil c(n+r)\rceil)$. Несложно заметить, что

$$\Pr(\chi_{str}(H(n,k,\lceil c(n+r)\rceil)) \leqslant r) \geqslant \Pr(X_n > 0). \tag{4}$$

Если мы покажем, что $\liminf\limits_{n\to\infty} \Pr(X_n > 0) > 0$ при условии (1), то неравенства (4) и (3) обеспечивают выполнение (2). Далее, раз X_n — неотрицательная случайная величина с целыми значениями, то согласно неравенству Пэли–Зигмунда получаем

$$\Pr(X_n > 0) = \Pr(X_n \geqslant 1) \geqslant \frac{(\mathsf{E}X_n)^2}{\mathsf{E}X_n^2}.$$

Таким образом, нам достаточно показать, что для всех достаточно больших n выполнено

$$\mathsf{E}X_n^2 = O_r((\mathsf{E}X_n)^2) \tag{5}$$

при условии (1) и в предположении, что n делится на r.

2.4. Вычисление первого и второго моментов

Напомним, что X_n — это число сильных сбалансированных раскрасок $H(n,4,m)$ в r цветов. Тогда при $m = \lceil c(n+r)\rceil$ имеем

$$\mathsf{E}X_n = \frac{n!}{((n/r)!)^r}\left(\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{r^4} + 6\frac{r(r-1)(r-2)}{r^3 n} + 10\frac{r(r-1)}{r^2n^2} + \frac{1}{n^3}\right)^m =$$

$$= \Theta_r\left(n^{(1/2-r/2)} r^n \left(\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{r^4}\right)^{cn}\right) =$$

$$= \Theta_r\left(n^{(1/2-r/2)} \exp\left[n\Big(\ln r + c\ln\left(\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{r^3}\right)\Big)\right]\right).$$

Используя метод из работы Д. А. Шабанова [8], посчитаем второй момент X_n с помощью суммы по матрицам $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^r$, в которых $a_{ij} \geqslant 0$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, и сумма по любой строке и любому столбцу равна $\frac{n}{r}$.

$$\mathsf{E}X_n^2 = \sum_A \frac{n!}{\prod\limits_{i,j=1}^r a_{ij}!}\left(\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4,\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \frac{a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}a_{i_4j_4}}{n^4} + O(\frac{1}{n})\right)^{cn}.$$

Применяя выражение для первого момента и формулу Стирлинга для факториалов, получаем

$$\mathsf{E}X_n^2 = O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 n^{r-1/2}\sum_A \frac{1}{\prod\limits_{i,j=1}^r \sqrt{a_{i,j}+1}}\exp[n(g(A)-f(A))]\right),$$

где

$$f(A)=\sum_{i,j=1}^{r}\frac{a_{ij}}{n}\ln(r^2a_{ij}),$$

$$g(A)=c\ln\left([\frac{r^3}{(r-1)(r-2)(r-3)}]^2\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\|\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}}\frac{a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}a_{i_4j_4}}{n^4}\right).$$

Введем $\varepsilon_{ij}=\frac{a_{ij}}{n}-\frac{1}{r^2}$, $i,j=1,\ldots,r$. Тогда для матрицы $\Upsilon=(\varepsilon_{ij}:i,j=1,...,r)$ выполнено: сумма по любой строке и любому столбцу равна нулю, при этом каждое $\varepsilon_{ij}\in[-1/r^2,1/r-1/r^2]$. Тогда

$$f(A)=f(\Upsilon)=\sum_{i,j=1}^{r}\frac{a_{ij}}{n}\ln(r^2a_{ij})=\sum_{i,j=1}^{r}(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij})\ln(1+r^2\varepsilon_{ij});$$

$$g(A)=g(\Upsilon)=c\ln\left((\frac{r^3}{(r-1)(r-2)(r-3)})^2\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\|\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}}(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_1j_1})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_2j_2})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_3j_3})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_4j_4})\right). \tag{6}$$

В условиях теоремы 1 верна следующая лемма (доказательство будет представлено в разделе 3).

Лемма 1. *Существует такая функция $b=b(r)>0$, что для любой матрицы $\Upsilon=(\varepsilon_{ij}:i,j=1,..,r)$ с указанными свойствами выполнено следующее неравенство*:

$$f(\Upsilon)-g(\Upsilon)\geqslant b\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2.$$

Завершим доказательство теоремы, используя лемму 1.

$$\mathsf{E}X_n^2\leqslant O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2n^{r-1/2}\sum_A\frac{1}{\prod\limits_{i,j=1}^{r}\sqrt{a_{ij}+1}}e^{-bn\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2}\right)=$$

$$=O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2n^{r-1/2}\sum_A\frac{1}{\prod\limits_{i,j=1}^{r}\sqrt{a_{ij}+1}}e^{-bn\sum\limits_{i,j=1}^{r}(\frac{a_{ij}}{n}-\frac{1}{r^2})^2}\right).$$

Несложно заметить, что $(a+1)^{-1/2}e^{-bn(a/n-1/r)^2}=O_r(n^{-1/2})$ для всех $a=0,...,n/r$. Оценим таким образом соответствующий множитель для a_{ij} при $\max(i,j)=r$:

$$\mathsf{E}X_n^2\leqslant O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2n^{r-1/2}n^{-(r^2-(r-1)^2)/2}\sum_A\frac{1}{\prod\limits_{i,j=1}^{r-1}\sqrt{a_{ij}+1}}e^{-bn\sum\limits_{i,j=1}^{r-1}(\frac{a_{ij}}{n}-\frac{1}{r^2})^2}\right)=$$

$$=O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2\sum_A\frac{1}{\prod\limits_{i,j=1}^{r-1}\sqrt{a_{ij}+1}}e^{-bn\sum\limits_{i,j=1}^{r-1}(\frac{a_{ij}}{n}-\frac{1}{r^2})^2}\right)=$$

$$= O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 \sum_{i,j=1}^{r-1} \sum_{a_{ij}=0}^{n/r} \frac{1}{\prod\limits_{i,j=1}^{r-1} \sqrt{a_{ij}+1}} e^{-bn\sum\limits_{i,j=1}^{r-1}(\frac{a_{ij}}{n}-\frac{1}{r^2})^2}\right) =$$

$$= O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 \left(\sum_{a=0}^{n/r} \frac{1}{\sqrt{a+1}} e^{-bn(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2})^2}\right)^{(r-1)^2}\right).$$

Для $a \leqslant n/2r^2$ выполнено

$$\sum_{a=0}^{n/2r^2} \frac{1}{\sqrt{a+1}} e^{-bn(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2})^2} = O_r(n \cdot e^{-\frac{bn}{4r^4}}) = O_r(1).$$

Оставшаяся сумма может быть оценена следующим образом:

$$\sum_{a=\frac{n}{2r^2}}^{\frac{n}{r}} \frac{1}{\sqrt{a+1}} e^{-bn(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2})^2} = O_r\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{a=\frac{n}{2r^2}}^{\frac{n}{r}} e^{-bn(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2})^2}\right) =$$

$$= O_r\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bn(\frac{x}{n}-\frac{1}{r^2})^2} dx\right) = O_r\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{bx^2}{n}} dx\right) = O_r(1).$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{E}X_n^2 = O_r((\mathsf{E}X_n)^2).$$

Равенство (5) выполнено, и теорема 1 доказана.

3. Доказательство леммы 1

Рассмотрим сумму под логарифмом в (6) подробнее:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} (\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_1j_1})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_2j_2})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_3j_3})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_4j_4}) =$$

$$= \frac{r^2(r-1)^2(r-3)^2(r-3)^2}{r^8} + 4\sum_{i_1,j_1=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1} \frac{(r-1)^2(r-2)^2(r-3)^2}{r^6} +$$

$$+6 \sum_{\substack{|\{i_1,i_2\}|=2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} \frac{(r-2)^2(r-3)^2}{r^4} + 4 \sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} \frac{(r-3)^2}{r^2} +$$

$$+ \sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4}.$$

Несложно понять, что (подробное доказательство мы приведем в приложении)

$$\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij} = 0; \quad \sum_{\substack{|\{i_1,i_2\}|=2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2; \quad \sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} = 4\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^3;$$

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4} = 3\Big(\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2\Big)^2 - 18\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2 -$$

$$-18\sum_{i,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2+36\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4+6\sum_{i_1,i_3,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_3}. \qquad (7)$$

Тогда

$$g(\Upsilon)=c\ln\big(1+6(\frac{r}{r-1})^2\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2+16\frac{r^4}{(r-1)^2(r-2)^2}\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^3+$$

$$+3\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}(\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2)^2-18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2-$$

$$-18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2+36\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4+$$

$$+6\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_1,i_3,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_3j_3}\big). \qquad (8)$$

Утверждение 1

$$\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\leqslant\frac{1}{r^2}$$

Доказательство. Если $\varepsilon_{ij}<0$, то $|\varepsilon_{ij}|\leqslant\frac{1}{r^2}$. Таким образом, получаем, что $\sum\limits_{j:\varepsilon_{ij}<0}\varepsilon_{ij}^2\leqslant\frac{1}{r^4}r=\frac{1}{r^3}$. Кроме того, $\sum\limits_{j:\varepsilon_{ij}>0}\varepsilon_{ij}\leqslant\frac{r-1}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}$. В итоге $\sum\limits_{j:\varepsilon_{ij}>0}\varepsilon_{ij}^2\leqslant\big(\sum\limits_{j:\varepsilon_{ij}>0}\varepsilon_{ij}\big)^2\leqslant\big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}\big)^2<\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^3}$. Стало быть, $\sum\limits_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\leqslant\frac{1}{r^2}$.

Рассмотрим каждое слагаемое в (8) по отдельности:

1) $6\left(\frac{r}{(r-1)^2}\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2=6(1+\frac{2}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2$;

2) $\big|16\frac{r^4}{((r-1)(r-2))^2}\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^3\big|\leqslant\frac{1}{r}16(1+\frac{6}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2$;

3) Используя утверждение 1, получаем
$$3\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\leqslant\frac{1}{r}3(1+\frac{12}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$$

4) Используя утверждение 1, получаем
$$18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2\leqslant18\frac{1}{r^2}(1+\frac{12}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$$

5) Используя утверждение 1, получаем
$$18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2\leqslant18\frac{1}{r^2}(1+\frac{12}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$$

6) $36\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4\leqslant36\frac{1}{r^2}(1+\frac{12}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2$;

7) Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем
$$|6\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_1,i_3,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_3j}\big|\leqslant6(1+\frac{12}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2=$$
$$=6\frac{1}{r}(1+\frac{12}{r}+O(\frac{1}{r^2})\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2.$$

Таким образом,

$$g(\Upsilon) \leqslant c\left(6+\frac{37}{r}+O(\frac{1}{r^2})\right)\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2. \tag{9}$$

Введем следующие обозначения:

$$f_i(\Upsilon)=\sum_{j=1}^{r}\big(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij}\big)\ln(1+r^2\varepsilon_{ij}), \tag{10}$$

$$g_i(\Upsilon)=c\big[6(\frac{r}{r-1})^2\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2+16\frac{r^4}{(r-1)^2(r-2)^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^3+$$
$$+3\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\sum_{i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_3j}^2+18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_3j}^2\varepsilon_{ij}^2+$$
$$+18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2+36\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4+$$
$$+6\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_3,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_3}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_3j_3}\big]. \tag{11}$$

Заметим, что при этом $f(\Upsilon)=\sum\limits_{i=1}^{r}f_i(\Upsilon)$, а $g(\Upsilon)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{r}g_i(\Upsilon)$. Наша стратегия будет состоять в оценивании разностей $f_i(\Upsilon)-g_i(\Upsilon)$ в разных случаях, чем мы и займемся в следующем параграфе.

3.1. Анализ различных вариантов

Хорошие строчки

Назовем строчку i матрицы Υ *хорошей*, если для каждого $j=1,\ldots,r$ выполнено $\varepsilon_{ij}\leqslant\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-\frac{2}{r\ln r}$. Используя (9) и (11), получаем

$$g_i(\Upsilon)\leqslant c(6+\frac{37}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2.$$

Далее, применяя оценку сверху $c<\frac{r\ln r}{6}-\frac{13}{36}\ln r$, получаем

$$g_i(\Upsilon)\leqslant(r\ln r+\frac{30}{6}\ln r-\frac{259}{36}\frac{\ln r}{r}+O(\frac{1}{r^2}))\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2.$$

Теперь рассмотрим (10) в случае хороших строк.

- Если $\varepsilon_{ij}<0$, то

$$\big(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij}\big)\ln(1+r^2\varepsilon_{ij})\geqslant\varepsilon_{ij}+\frac{1}{r^2}\frac{(r^2\varepsilon_{ij})^2}{2}=\varepsilon_{ij}+\frac{r^2}{2}\varepsilon_{ij}^2.$$

- Если $\varepsilon_{ij}>0$, но $\varepsilon_{ij}\leqslant\frac{1}{r\ln r}-\frac{1}{r^2}$, то используем оценку функции $\varphi(x)=(1+x)\ln(1+x)$. Известно, что $\varphi(x)>x+\dfrac{x^2}{2(1+\frac{x}{3})}$ для $x>0$. Положим $x=r^2\varepsilon_{ij}$ и получим следующую оценку:

$$(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij})\ln(1+r^2\varepsilon_{ij})\geqslant\varepsilon_{ij}+\frac{r^2\varepsilon_{ij}^2}{2(1+\frac{r^2\varepsilon_{ij}}{3})}.$$

Оценим знаменатель: $1+\frac{r^2\varepsilon_{ij}}{3}<1+\frac{r}{3\ln r}$.

$$(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij})\ln(1+r^2\varepsilon_{ij})\geqslant\varepsilon_{ij}+\frac{3r\ln r}{2}(1+O(\frac{\ln r}{r}))\varepsilon_{ij}^2.$$

- Далее, если $\varepsilon_{ij} \in (\frac{1}{r\ln r} - \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - 2\frac{\ln\ln r}{r\ln r})$, то оценим слагаемое следующим образом:

$$(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij})\ln(1 + r^2\varepsilon_{ij}) \geqslant (\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij})\ln\big(\frac{r}{\ln r}\big) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}(\ln r - \ln\ln r - 1).$$

Используем неравенство $1 \geqslant r\varepsilon_{ij}(1 - \frac{1}{r} - \frac{2\ln\ln r}{\ln r})^{-1}$:

$$(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij})\ln(1 + r^2\varepsilon_{ij}) \geqslant \varepsilon_{ij} + r\varepsilon_{ij}^2\big(1 - \frac{1}{r} - \frac{2\ln\ln r}{\ln r}\big)^{-1}(\ln r - \ln\ln r - 1) =$$
$$= \varepsilon_{ij} + r\ln r\varepsilon_{ij}^2\big(1 + \frac{2\ln\ln r}{\ln r} + O(\frac{\ln\ln r}{\ln r})^2\big)\big(1 - \frac{\ln\ln r}{\ln r} - \frac{1}{\ln r}\big) =$$
$$= \varepsilon_{ij} + r\ln r\varepsilon_{ij}\big(1 + \frac{\ln\ln r}{\ln r} + O(\frac{\ln\ln r}{\ln r})^2\big).$$

- Наконец, если $\varepsilon_{ij} \in (\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - 2\frac{\ln\ln r}{r\ln r}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r\ln r})$, то оценим слагаемое следующим образом:

$$(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij})\ln(1 + r^2\varepsilon_{ij}) \geqslant (\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij})\big(\ln r + \ln\big(1 - \frac{2\ln\ln r}{\ln r}\big)\big) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}(\ln r - o(1) - 1).$$

Воспользуемся тем, что $1 \geqslant r\varepsilon_{ij}(1 - \frac{1}{r} - \frac{2}{r\ln r})^{-1}$:

$$(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij})\ln(1 + r^2\varepsilon_{ij}) \geqslant \varepsilon_{ij} + r\varepsilon_{ij}^2\big(1 - \frac{1}{r} - \frac{2}{\ln r}\big)^{-1}(\ln r - o(1) - 1) =$$
$$= \varepsilon_{ij} + r\ln r\varepsilon_{ij}^2\big(1 + \frac{2}{\ln r} + O(\frac{1}{\ln r})^2\big)(1 - o(\frac{1}{\ln r}) - \frac{1}{\ln r}) =$$
$$= \varepsilon_{ij} + r\ln r\varepsilon_{ij}^2\big(1 + \frac{1}{\ln r} + o(\frac{1}{\ln r})\big).$$

Таким образом, для хорошей строки при всех достаточно больших r получаем

$$f_i(\Upsilon) - g_i(\Upsilon) \geqslant \frac{r^2}{4}\sum_{j:\varepsilon_{ij}<0}\varepsilon_{ij}^2 + \frac{r}{2}\sum_{j:\varepsilon_{ij}>0}\varepsilon_{ij}^2. \tag{12}$$

Нормальные строчки

Строчку i матрицы Υ назовем *нормальной*, если существует j_0 с условием $\varepsilon_{ij_0} \in [\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r\ln r}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - r^{-\frac{7}{4}}]$. Заметим, что подобный j_0 может быть только один, а все остальные ε_{ij} должны быть меньше $\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r\ln r}$, $j \neq j_0$. Будем считать, что $j_0 = i$, и обозначим $\delta_{ii} = \delta_i = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \varepsilon_{ii}$, тогда $\delta_i \in [r^{-\frac{7}{4}}, \frac{2}{r\ln r}]$. Также обозначим $\delta_{ij} = \frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}$ при $j \neq i$. Тогда все δ_{ij} неотрицательны, и их сумма по $j \neq i$ равна δ_i.

Оценим (10) в этом случае:

$$f_i(\Upsilon) = \sum_{j=1}^{r}(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij})\ln(1 + r^2\varepsilon_{ij}) =$$
$$= (\frac{1}{r} - \delta_i)\ln(r - r^2\delta_i) + \sum_{j\neq i}^{r}\delta_{ij}\ln(r^2\delta_{ij}) =$$
$$= \frac{\ln r}{r} - \delta_i\ln r + (\frac{1}{r} - \delta_i)\ln(1 - r\delta_i) + 2(\ln r)\sum_{j\neq i}^{r}\delta_{ij} + \sum_{j\neq i}^{r}\delta_{ij}\ln\delta_{ij}.$$

$\sum\limits_{j\neq i}^{r}\delta_{ij} = \delta_i$, поэтому последняя сумма по нервенству Йенсена не меньше, чем $\delta_i\ln\delta_i - \delta_i\ln(r-1)$, получаем

$$f_i(\Upsilon) \geqslant \frac{\ln r}{r} + \delta_i\ln r + (\frac{1}{r} - \delta_i)\ln(1-r\delta_i) + \delta_i\ln\delta_i - \delta_i\ln(r-1).$$

Воспользуемся тем, что $\ln(1-r\delta_i) > \dfrac{-r\delta_i}{1-r\delta_i}$, и получим следующее неравенство:

$$f_i(\Upsilon) \geqslant \frac{\ln r}{r} + \delta_i\ln\delta_i + \delta_i\ln\big(\frac{r}{r-1}\big) - \delta_i. \tag{13}$$

Теперь оценим (11). Необходимо рассмотреть и оценить сумму $\sum\limits_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2$.

$$\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2 = \big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \delta_i\big)^2 + \sum_{j\neq i}\big(\frac{1}{r^2} - \delta_{ij}\big)^2 =$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^3} - \frac{2\delta_i}{r} + \frac{2\delta_i}{r^2} + \delta_i^2 + \frac{r-1}{r^4} - \frac{2\delta_i}{r^2} + \sum_{j\neq i}\delta_{ij}^2.$$

Так как $\sum\limits_{j\neq i}\delta_{ij}^2 \leqslant \delta_i^2$, то

$$\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2 \leqslant \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{2\delta_i}{r} + 2\delta_i^2. \tag{14}$$

Используя эту оценку и (9), получаем, что

$$g_i(\Upsilon) \leqslant 6c\big(1 + O(\frac{1}{r})\big)\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2 = 6c\big(\frac{1}{r^2} - \frac{2\delta_i}{r} + 2\delta_i^2 + O(\frac{1}{r^3})\big).$$

Воспользуемся оценкой $c < \frac{r\ln r}{6}$:

$$g_i(\Upsilon) \leqslant \frac{\ln r}{r} - 2\delta_i\ln r + 2\delta_i^2(r\ln r) + O(\frac{\ln r}{r^2}).$$

Заметим, что $r\delta_i = o(1)$ и $\delta_i \gg r^{-2}$, из чего следует, что

$$g_i(\Upsilon) \leqslant \frac{\ln r}{r} - 2\delta_i\ln r(1 + o(1)). \tag{15}$$

Применяя одновременно (13) и (15), получаем, что при $\delta_i \to 0$ выполнено

$$f_i(\Upsilon) - g_i(\Upsilon) \geqslant \delta_i\ln\delta_i - \delta_i + \delta_i\ln\big(\frac{r}{r-1}\big) + 2\delta_i\ln r(1 + o(1)).$$

Так как $\ln\delta_i \geqslant -\frac{7}{4}\ln r$, то

$$f_i(\Upsilon) - g_i(\Upsilon) \geqslant \frac{1}{4}\delta_i\ln r(1 + o(1)) \geqslant \frac{1}{8}r^{-\frac{7}{4}}\ln r. \tag{16}$$

Плохие строчки

Остается разобрать последний случай. Строчку i матрицы Υ будем называть *плохой* в том случае, если существует такое j_0, что $\varepsilon_{ij_0} > \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - r^{-\frac{7}{4}}$. Без ограничения общности считаем, что $j_0 = i$ и обозначим $\delta_i = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \varepsilon_{ii}$, $\delta_{ij} = \frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}$ для $j \neq i$.

Пусть I – набор индексов плохих строчек, т.е. тех индексов, которые приходятся на плохие строчки. Тогда рассмотрим $g'(\Upsilon)$ и $f'(\Upsilon)$, где

$$f'(\Upsilon) = \sum_{i \in I} f_i(\Upsilon),$$

а

$$g'(\Upsilon) = c \ln \big(1 + \sum_{i \in I} \big[6(\frac{r}{r-1})^2 \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2 + 16 \frac{r^4}{(r-1)^2(r-2)^2} \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^3 +$$

$$+3 \frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2} \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2 \sum_{i_3, j=1}^{r} \varepsilon_{i_3 j}^2 - 18 \frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2} \sum_{i_3, j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2 \varepsilon_{i_3 j}^2 +$$

$$-18 \frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2} \sum_{j_1, j_3=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}^2 \varepsilon_{ij_3}^2 + 36 \frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2} \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4 +$$

$$+6 \frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2} \sum_{i_3, j_1, j_3=1}^{r} \varepsilon_{ij_1} \varepsilon_{ij_3} \varepsilon_{i_3 j_1} \varepsilon_{i_3 j_3} \big]\big). \tag{17}$$

Далее, используя (9),(14),(17) и обозначив $x = |I|$, получаем

$$g'(\Upsilon) \leqslant c \ln \big(1 + \sum_{i \in I} \big[\frac{6}{r^2} + \frac{31}{r^3} - \frac{12\delta_i}{r} + O(r^{-\frac{7}{2}})\big]\big) =$$

$$= c \ln \big(1 + \frac{6x}{r^2} + \frac{31x}{r^3} - \sum_{i \in I} \frac{12\delta_i}{r} + O(xr^{-\frac{7}{2}})\big) \leqslant$$

$$\leqslant c \big[\frac{6x}{r^2} + \frac{31x}{r^3} - \sum_{i \in I} \frac{12\delta_i}{r} + O(xr^{-\frac{7}{2}}) - \frac{36x^2}{2r^4} + O(x^2 r^{-\frac{19}{4}})\big] =$$

$$= c\big(\frac{6x}{r^2} + \frac{31x}{r^3} - \frac{18x^2}{r^4} - \sum_{i \in I} \frac{12\delta_i}{r} + O(r^{-\frac{5}{2}})\big).$$

Подставим $c = \frac{r \ln r}{6} - \frac{13}{36} \ln r - \frac{1}{6} - r^{-1/9}$.

$$g'(\Upsilon) = (\frac{r \ln r}{6} - \frac{13}{36} \ln r - \frac{1}{6} - r^{-1/9})\big(\frac{6x}{r^2} + \frac{31x}{r^3} - \frac{18x^2}{r^4} - \sum_{i \in I} \frac{12\delta_i}{r} + O(r^{-\frac{5}{2}})\big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x \ln r}{r} + 3 \frac{x \ln r}{r^2} - \frac{6x}{r^{2+1/9}} - 3x^2 \frac{\ln r}{r^3} - \frac{x}{r^2} - 2(\ln r) \sum_{i \in I} \delta_i + O(\frac{\ln r}{r^{\frac{3}{2}}}). \tag{18}$$

Выпишем оценку $f'(\Upsilon)$:

$$f'(\Upsilon) = \sum_{i \in I} f_i(\Upsilon) \geqslant \frac{x \ln r}{r} + \sum_{i \in I} \big[\delta_i \ln \delta_i + \delta_i \ln \big(\frac{r}{r-1}\big) - \delta_i\big]. \tag{19}$$

Собирая вместе (18) и (19), получаем, что

$$f'(\Upsilon) - g'(\Upsilon) \geqslant -3 \frac{x \ln r}{r^2} + \frac{6x}{r^{2+1/9}} + 3x^2 \frac{\ln r}{r^3} + O(\frac{\ln r}{r^{\frac{3}{2}}}) + \frac{x}{r^2} +$$

$$+\sum_{i\in I}\left[\delta_i\ln\delta_i+\delta_i\ln\left(\frac{r}{r-1}\right)+2\delta_i\ln r-\delta_i\right]. \qquad (20)$$

Выражение $\delta_i\ln\delta_i+\delta_i\ln\left(\frac{r}{r-1}\right)+2\delta_i\ln r-\delta_i$ минимизируется при $\delta_i=\frac{r-1}{r^2}$. Таким образом, получаем, что

$$f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant -3\frac{x\ln r}{r^2}+\frac{6x}{r^{2+1/9}}+3x^2\frac{\ln r}{r^3}+O(\frac{\ln r}{r^{3/2}})=$$

$$=3\frac{x\ln r}{r^2}\left(\frac{x}{r}-1\right)+\frac{6x}{r^{2+1/9}}+O(\frac{\ln r}{r^{3/2}}). \qquad (21)$$

Перебор случаев

Обозначим через J множество индексов нормальных строчек, а через T — множество индексов хороших строчек. Также обозначим $z=|J|$ — число нормальных строчек, соответственно, число хороших строчек будет равно $r-x-z$.

1) Если $x=0$ и $z=0$, то получаем, что для оценки разности $f(\Upsilon)$ и $g(\Upsilon)$ нам достаточно оценки (12).

2) Если $x=0$ и $z>0$, нам достаточно оценки (16).

3) Случай $x\neq 0$ разбивается на следующие варианты:

- $x\geqslant r-\frac{r^{1-1/9}}{\ln r}$, тогда, используя (21), получаем

$$f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant\frac{3}{2r^{1+1/9}}.$$

- $x<r-\frac{r^{1-1/9}}{\ln r}$, тогда, используя (21), получаем,что

$$f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant-\frac{3\ln r}{r}. \qquad (22)$$

В этом случае возможны следующие варианты:

- $z\geqslant r^{4/5}$. Тогда, используя (16) и (22), получаем

$$f(\Upsilon)-g(\Upsilon)\geqslant\sum_{i\in J}(f_i(\Upsilon)-g_i(\Upsilon))+f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant$$

$$\geqslant r^{4/5}\frac{1}{8}r^{-\frac{7}{4}}\ln r-\frac{3\ln r}{r}\geqslant\frac{1}{9}r^{-19/20}\ln r.$$

- $z<r^{4/5}$. Пусть $i\in I$ — плохая строчка, тогда

$$\sum_{i'\in T}\varepsilon_{i'i}=-\varepsilon_{ii}-\sum_{\substack{h'\in J\cup I;\\ h'\neq i}}\varepsilon_{h'i}.$$

Т.к. $\varepsilon_{ii}\geqslant\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-r^{-7/4}$, а все остальные не меньше $-r^{-2}$, то получаем

$$\sum_{i'\in T}\varepsilon_{i'i}\leqslant-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+r^{-\frac{7}{4}}+\frac{1}{r^2}(|J|+|I|)\leqslant-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+r^{-\frac{7}{4}}+\frac{1}{r^2}(r^{4/5}+r-\frac{r^{1-1/9}}{\ln r})=$$

$$=-\frac{r^{-10/9}}{\ln r}(1+o(1))\equiv y.$$

По неравенству Коши–Буняковского получаем, что

$$\sum_{i' \in T: \varepsilon_{i'i} < 0} \varepsilon_{i'i}^2 \geqslant \frac{1}{r} y^2. \tag{23}$$

Суммируя (12), (16), (21) и (23), получаем

$$f(\Upsilon) - g(\Upsilon) \geqslant \sum_{i \in T} (f_i(\Upsilon) - g_i(\Upsilon)) + f'(\Upsilon) - g'(\Upsilon) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i \in T} (\frac{r^2}{4} \sum_{j: \varepsilon_{ij} < 0} \varepsilon_{ij}^2) - 3\frac{x \ln r}{r^2} + O(\frac{\ln r}{r^{3/2}}) \geqslant x\frac{r}{4} y^2 - 3\frac{x \ln r}{r^2} + O(\frac{\ln r}{r^{3/2}}) =$$

$$= \frac{x}{4r^{11/9}(\ln r)^2}(1 + o(1)) - 3\frac{x \ln r}{r^2} + O(\frac{\ln r}{r^{3/2}}).$$

Т.к. $x \geqslant 1$, полученное выражение превосходит $\frac{1}{8r^{11/9}(\ln r)^2} \sum\limits_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2$. Таким образом, лемма 1 доказана.

4. Приложение

Рассмотрим подробнее, как получаются равенства (7) .

1) Тождество $\sum\limits_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij} = 0$ следует из определения ε_{ij}: сумма по любой строке и любому столбцу равна нулю, при этом каждое $\varepsilon_{ij} \in [-1/r^2, 1/r - 1/r^2]$.

2) Несложными преобразованиями получаем, что

$$\sum_{\substack{i_1 \neq i_2; \\ j_1 \neq j_2}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} = \sum_{\substack{i_1, i_2; \\ j_1 \neq j_2}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} - \sum_{\substack{i; \\ j_1 \neq j_2}} \varepsilon_{i j_1} \varepsilon_{i j_2} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, j_1, j_2 = 1}^{r} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} - \sum_{i_1, i_2, j = 1}^{r} \varepsilon_{i_1 j} \varepsilon_{i_2 j} - \sum_{i, j_1, j_2 = 1}^{r} \varepsilon_{i j_1} \varepsilon_{i j_2} + \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2.$$

Первые три суммы в силу определения ε_{ij} равны нулю. Таким образом, получаем второе тождество:

$$\sum_{\substack{i_1 \neq i_2; \\ j_1 \neq j_2}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} = \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2.$$

3) Аналогичным способом раскроем $\sum\limits_{\substack{|\{i_1, i_2, i_3\}| = 3; \\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_3 j_3}$.

$$\sum_{\substack{|\{i_1, i_2, i_3\}| = 3 \\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_3 j_3} = \sum_{\substack{|\{i_1, i_2\}| = 2, i_3; \\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_3 j_3} - 2 \sum_{\substack{|\{i_1, i_2\}| = 2, i_1 = i_3; \\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_1 j_3}. \tag{24}$$

Распишем вторую сумму:

$$\sum_{\substack{|\{i_1, i_2\}| = 2, i_1 = i_3; \\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_1 j_3} = \sum_{\substack{i_1, i_2; \\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_1 j_3} \varepsilon_{i_2 j_2} - \sum_{\substack{i; \\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i j_1} \varepsilon_{i j_2} \varepsilon_{i j_3} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} - 2 \sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3=j_1}} \varepsilon^2_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} -$$

$$- \sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_2}\varepsilon_{ij_3} + 2 \sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3=j_2}} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon^2_{ij_2}. \qquad (25)$$

Раскроем каждую из четырех сумм.

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} - \sum_{i_1,i_2,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_1} = 0;$$

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3=j_1}} \varepsilon^2_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon^2_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} - \sum_{i_1,i_2,j=1}^{r} \varepsilon^2_{i_1j}\varepsilon_{i_2j} = 0;$$

- $$\sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_2}\varepsilon_{ij_3} = \sum_{i,j_1,j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_2}\varepsilon_{ij_3} - \sum_{i,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon^2_{ij_1}\varepsilon_{ij_3} = 0;$$

- $$\sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3=j_2}} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon^2_{ij_2} = \sum_{i,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon^2_{ij_2} - \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon^3_{ij} = -\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon^3_{ij}.$$

Подставляя полученные выражения в (25), находим, что

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2\}|=2,i_1=i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_1j_3} = -2\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon^3_{ij}. \qquad (26)$$

Раскроем первую сумму в (24):

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2\}|=2,i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} = \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} - \sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} - 2 \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_1=j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_2j_2} -$$

$$- \sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} + 2 \sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_1=j_3}} \varepsilon^2_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}. \qquad (27)$$

Рассмотрим каждую из четырех сумм.

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} = \sum_{i_1,i_2,i_3,j_1,j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} - \sum_{i_1,i_2,i_3,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_1}\varepsilon_{i_3j_3} = 0;$$

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\|\{j_1,j_2\}|=2, j_1=j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,i_3,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_1} - \sum_{i_1,i_2,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}\varepsilon_{i_2j}\varepsilon_{i_3j} = 0;$$

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2;\\|\{j_1,j_2\}|=2, j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} - \sum_{i_1,i_2,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_1} = 0;$$

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2;\\|\{j_1,j_2\}|=2, j_1=j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_2j_2} - \sum_{i_1,i_2,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_2j} = 0.$$

Подставляя полученные значения в (27), а затем (27) и (25) в (24), получаем третье тождество в (7):

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3;\\|\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} = 4\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^3.$$

4) Сумма $\sum\limits_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\|\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4}$ раскрывается аналогичным образом.

Литература

1. *Shamir E.* Chromatic number of random hypergraphs and associated graphs // Adv. Comput. Res. 1989. V. 5. P. 127–142

2. *Krivelevich M., Sudakov B.* The chromatic numbers of random hypergraphs // Random Structures and Algorithms. 1998. V. 12. P. 381–403.

3. *Achlioptas D., Kim J.H., Krivelevich M.,Tetali P.* Two-colorings random hypergraphs // Random Structures and Algorithms. 2002. V. 20. P. 249–259.

4. *Achlioptas D., Moore C.* Random k-SAT: two moments suffice to cross a sharp threshold // SIAM Journal on Computing. 2005. V. 36, I. 3. P. 740–762.

5. *Coja-Oghlan A., Zdeborová L.* The condensation transition in random hypergraph 2-coloring // Proc. 23rd Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms. 2012. P. 241–250.

6. *Dyer M., Frieze A., Greenhill C.* On the chromatic number of a random hypergraph // Journal of Combinatorial Theory. 2015. V. 113, Series B. P. 68–122.

7. *Ayre P., Coja-Oghlan A., Greenhill C.* Hypergraph coloring up to condensation // Random Struct. Algorithms. early view. https://doi.org/10.1002/rsa.20824.

8. *Шабанов Д.А.* О концентрации хроматического числа случайного гиперграфа // Доклады Академии Наук. 2017. Т. 475, № 1. С. 24–28.

9. *Balobanov A.E., Shabanov D.A.* On the strong chromatic number of a random 3-uniform hypergraph: препринт. http://ru.discrete-mathematics.org/preprints/2018/20181117_shabanov.pdf

References

1. *Shamir E.* Chromatic number of random hypergraphs and associated graphs. Adv. Comput. Res. 1989. V. 5. P. 127–142
2. *Krivelevich M., Sudakov B.* The chromatic numbers of random hypergraphs. Random Structures and Algorithms. 1998. V. 12. P. 381–403.
3. *Achlioptas D., Kim J.H., Krivelevich M.,Tetali P.* Two-colorings random hypergraphs. Random Structures and Algorithms. 2002. V. 20. P. 249–259.
4. *Achlioptas D., Moore C.* Random k-SAT: two moments suffice to cross a sharp threshold.SIAM Journal on Computing. 2005. V. 36, I. 3. P. 740–762.
5. *Coja-Oghlan A., Zdeborová L.* The condensation transition in random hypergraph 2-coloring. Proc. 23rd Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms. 2012. P. 241–250.
6. *Dyer M., Frieze A., Greenhill C.* On the chromatic number of a random hypergraph. Journal of Combinatorial Theory. 2015. V. 113, Series B. P. 68–122.
7. *Ayre P., Coja-Oghlan A., Greenhill C.* Hypergraph coloring up to condensation. Random Struct. Algorithms. early view. https://doi.org/10.1002/rsa.20824.
8. *Shabanov D.A.* On the concentration of the chromatic number of a random hypergraph. Doklady Mathematics. 2017. V. 96, N 1. P. 321–325.
9. *Balobanov A.E., Shabanov D.A.* On the strong chromatic number of a random 3-uniform hypergraph. http://ru.discrete-mathematics.org/preprints/2018/20181117_shabanov.pdf

Поступила в редакцию 27.05.2019