

Фотографии и рисунки, взятые из Википедии (<http://ru.wikipedia.org/>) или Викисклада (<http://commons.wikimedia.org/>), помечены буквой «W» в конце подписи к рисунку, аналогично помечены эпитафии, проверенные по Википедии или Викицитатнику (<http://ru.wikiquote.org/>).

1. Изменения, внесённые во 2-е издание

Во втором издании исправлен ряд опечаток и мелких ошибок, уточнены некоторые формулировки, которые могли быть неправильно поняты читателем, а также добавлен некоторый материал, без изменения структуры книги в целом.

- Расширен раздел 1.1.8 «Поле Хиггса и бозон Хиггса*» в связи с открытием бозона Хиггса.
- Добавлен раздел 3.1.6 «Марковский процесс и квантовая эволюция*».
- В подразделах 5.2.6 «Интегралы движения» и «Пример: эволюция волнового пакета для свободной частицы» добавлено понятие *динамического инварианта*.
- Расширена глава 8 «Место теории измерений (ф*)», в которую добавлен материал, посвящённый выводу *проекционного постулата*.
- В разделе 9.3.9 «Активное сознание (фф*)» более точно изложена позиция М. Б. Менского по вопросу *активного сознания*.
- Добавлен раздел 10.7 «Алгоритм Гровера».
- Расширено обсуждение уравнения непрерывности, для чего добавлены разделы 13.6.5 «Гидродинамическая аналогия**», 13.6.6 «Откуда берётся “квантовый потенциал” (ф*)», 13.7 «Интерпретации квантовой механики, основанные на гидродинамической аналогии (фф*)»
- Переработан раздел 16.4.3 «Атом водорода в “старой квантовой механике”*».

Для читателей первого издания на авторской интернет-страничке книги будет выложен список изменений второго издания книги (ссылку см. ниже) по сравнению с первым и новые (или сильно переработанные) разделы второго издания в виде отдельного файла.

2. Благодарности

В написании книги автору помогали многие люди. Они указывали на ляпы и опечатки, давали советы и консультации по специальным вопросам, просто подтверждали нужность такой книги.

В первую очередь я хочу выразить глубокую благодарность за помощь и поддержку моим родителям: отцу Геннадию Васильевичу Иванову, благодаря которому я решил стать физиком (ещё до того, как понял, что это значит), и матери Валентине Михайловне Ивановой, которая первая заметила у меня страсть к преподаванию.

Из коллег в первую очередь я хочу выразить благодарность моему Учителю Игорю Васильевичу Воловичу, относящемуся к тем Учёным, кто видит в формулах не только математический и физический смыслы, но также философский смысл и педагогическое значение.

Хочу выразить благодарность всем сотрудникам Отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН, во главе с патриархом отдела и института Василием Сергеевичем Владимировым за плодотворную научную и человеческую атмосферу, в которую я имел счастье погрузиться, начиная с 5-го курса МФТИ.

Также хочу выразить благодарность всем сотрудникам кафедры теоретической физики МФТИ и особенно Н. Н. Пастушковой за создание научно-педагогической и человеческой среды, которая вызвала появление этой книги.

Помощь советами, консультациями, дискуссиями и критикой мне оказали: И. В. Волович, Ю. М. Белоусов, В. И. Манько, Г. С. Ирошников, О. И. Толстихин, С. В. Козырев, Е. И. Зеленов, О. Г. Смолянов. Дали развёрнутые дружески-критические отзывы: Л. А. Моргун, С. Петренко, С. Шушкевич. Прочитали бета-версию и объяснили, что такая книга непременно нужна и должна быть издана *несмотря на* или, наоборот, *по причине* своего непривычного и личного стиля изложения В. Б. Гейшкенбеин, В. М. Вайнберг, Н. Г. Марчук. На ляпы и опечатки указали: М. А. Энтин, Г. А. Гимранов, А. В. Зыков, А. В. Зыкова, А. Н. Волощук, С. Г. Абаймов и другие.

Не все замечания и критика были учтены. В некоторых случаях я осознанно (хотя, возможно, и опрометчиво) отказался от внесения исправлений, за что приношу коллегам свои извинения.

Отдельную благодарность хочу выразить издательству РХД и лично директору Алексею Владимировичу Борисову за то, что выход книги на бумаге не помешает свободному доступу к электронной версии на русском языке.

Автор благодарен всем читателям первого издания книги. Благодаря вам мне пришлось готовить второе издание, которое, я надеюсь, будет лучше первого.

Очень важной проблемой для астрофизики является оценка плотности энергии, содержащейся в нейтрино низких энергий. Такие нейтрино несут слишком низкую энергию, чтобы их можно было зарегистрировать по вызываемым ими ядерным реакциям, поэтому они могут незаметно для астрономов обладать энергией, сравнимой с энергией всего «обычного» вещества во Вселенной. Нейтрино должны давать вклад в *тёмную материю* — неизвестное вещество, обнаруживаемое астрономами только по гравитационным эффектам, составляющее большую часть (порядка $\frac{3}{4}$) массы галактик и свободно проходящее сквозь галактики при их столкновении.

1.1.8. Поле Хиггса и бозон Хиггса*

В квантовой теории поля безмассовые частицы описываются проще, чем массивные. В частности, наличие массы у истинно элементарных частиц (лептонов, кварков, калибровочных W и Z бозонов) нарушает некоторые симметрии, естественные для стандартной модели физики элементарных частиц.

По этой причине большой популярностью среди современных физиков пользуется *механизм Хиггса* образования масс фундаментальных элементарных частиц.

Масса частицы связана с её энергией покоя знаменитым соотношением

$$\mathcal{E} = mc^2.$$

Можно сказать, что масса — это и есть энергия покоя, только пересчитанная в единицы массы (делённая на c^2).

Гипотеза Хиггса предполагает, что все истинно элементарные частицы «на самом деле» безмассовы, а их энергия покоя (наблюдаемая масса) — это потенциальная энергия в *поле Хиггса*.

Поле Хиггса — это гипотетическое поле, потенциал которого, как правило, постоянен и отличен от нуля во всём пространстве. (Почему потенциал Хиггса оказался отличен от нуля мы обсудим в следующем разделе 1.1.9. «Вакуум».) Потенциальная энергия взаимодействия частицы с полем Хиггса определяется произведением потенциала Хиггса на некоторую константу взаимодействия, характерную для данного сорта частиц (эта константа пропорциональна наблюдаемой массе частицы)¹².

тать с одноимённым рассказом!), в котором предполагается, что недостаток нейтрино связан с предстоящей вспышкой Солнца как новой звезды.

¹²В лагранжиане фермиона массе соответствует член вида $\frac{1}{2}\bar{\psi}m\psi$, который по форме похож на взаимодействие поля ψ , описывающего частицу, с некоторым полем m . Мы представляем

Следует специально отметить, что данный механизм относится только к истинно элементарным частицам. Для протонов и нейтронов, которые образуют большую часть массы обычного вещества, подавляющую часть массы составляют не массы образующих их кварков, а энергия соединяющих кварки глюонных струн¹³.

Как и всякое физическое поле, поле Хиггса должно быть квантовым. На фоне упомянутого выше постоянного (фонового) потенциала Хиггса возможны возбуждения (волны). Кванты этих возбуждений представляют собой ещё один сорт элементарных частиц — *бозон Хиггса* (или *частица Хиггса*, или просто *хиггс*).

Даже когда механизм Хиггса являлся гипотезой, не подкреплённой достаточными экспериментальными доказательствами, популярность этой гипотезы была столь велика, что её опровержение вызвало бы в сообществе физиков намного большее удивление, чем её подтверждение. (Впрочем, и на этот случай физики уже подготовили несколько альтернативных гипотез.)

В 2012 г. на Большом адронном коллайдере был обнаружен бозон Хиггса (или частица очень на него похожая). В 2013 году¹⁴ Нобелевская премия по физике была вручена Франсуа Энглеру и Питеру Хиггсу «За теоретическое обнаружение механизма, который улучшает наше понимание происхождения массы субатомных частиц, подтверждённого в последнее время обнаружением предсказанной элементарной частицы в экспериментах ATLAS и CMS на Большом адронном коллайдере в ЦЕРН.» W

Масса открытой частицы составила

$$125,5 \pm 0,6 \text{ ГэВ (ATLAS)}, \quad 125,7 \pm 0,4 \text{ ГэВ (CMS)}.$$

Пока преждевременно считать, что проблема исследована в достаточной степени, но если открытие подтвердится и частица действительно окажется тем самым хиггсом, то взаимодействие Хиггса окажется пятым фундаментальным взаимодействием, (в дополнение к гравитационному, электромагнитному, сильному и слабому).

Как и слабое взаимодействие, хиггсовское взаимодействие не создаёт экспериментально обнаружимых сил взаимодействия, по причине большой

$m = m_0\Phi$, где Φ — поле Хиггса, а m_0 — константа взаимодействия, и получаем стандартный по форме трёхчастичный член $\frac{1}{2}m_0\bar{\psi}\Phi\psi$.

¹³Напомним, что суммарная масса кварков для протона — 11 МэВ, а его полная масса — 938 МэВ; суммарная масса кварков для нейтрона — 13 МэВ, а его полная масса — 939,5 МэВ.

¹⁴Неслыханная оперативность, не свойственная Нобелевскому комитету в последние годы.

массы переносчика. Оно проявляется в процессах двух видов: в появлении массы у кварков, лептонов, калибровочных W и Z бозонов и в распадах, в которых бозон Хиггса появляется на промежуточном этапе как виртуальная частица.

Бозон Хиггса и пресса

Ещё не будучи открытым бозон Хиггса приобрёл бешеную популярность (с элементами истерии) в прессе, где его величают «частицей Бога» и связывают его получение с возможным концом света. Разумеется, подобная популярность связана не столько с физикой, сколько с эффектами общественного сознания.

Вероятно, первопричиной популярности частицы Хиггса является то, что её обнаружение объявлено одной из главных целей Большого адронного коллайдера (БАК) — самого сложного технического устройства, созданного когда-либо человечеством. Первоначальный толчок раздуваемым прессой сенсациям дали сами физики, пытаясь популярно объяснить прессе зачем нужен БАК.

Такая популяризация современной физики для широкой неподготовленной аудитории неизбежно содержит в себе черты вульгаризации, а в условиях, когда новости (и, в особенности, сенсации) являются скоропортящимся товаром, который надо быстро продать, жёлтая пресса¹⁵ начала соревнование по наиболее сенсационной подаче публике Большого адронного коллайдера и бозона Хиггса.

Дополнительным источником сенсаций («газетных уток») про бозон Хиггса явилась «интерференция» новостей о нём с сообщениями о возлагаемых на БАК надеждах на открытие эффектов квантовой гравитации, таких как рождение микроскопических *чёрных дыр* и их разновидностей (*кратовых нор, машин времени*).

На протяжении многих десятилетий эффекты квантовой гравитации предсказывались для энергий, сравнимых с энергией Планка ($1,2 \times 10^{28}$ эВ). Такие прогнозы убивали надежды на экспериментальное исследование квантовой гравитации в исторически обозримом будущем (энергия, достигаемая на БАК, — $1,4 \times 10^{13}$ эВ, она меньше энергии Планка в 10^{15} раз).

¹⁵К сожалению, в вопросах фундаментальной науки к «жёлтой прессе» следует относить все средства массовой информации (СМИ), за исключением специальных научных изданий и очень небольшого числа лучших научно-популярных изданий. В качестве первого приближения вы смело можете считать «жёлтым» любое СМИ, в котором может быть опубликован астрологический гороскоп.

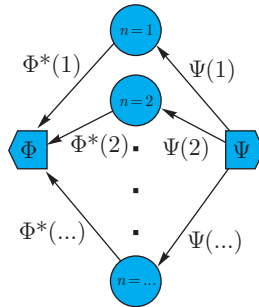


Рис. 3.5. Переход от Ψ к Φ совершается через все возможные взаимоисключающие состояния n по стрелкам с соответствующими амплитудами согласно (3.13).

одного состояния в другое при измерении. Сама структура формулы скалярного произведения имеет физический смысл, показывая, что переход осуществляется через все возможные взаимоисключающие промежуточные состояния.

Наборы амплитуд $\Psi(n)$ и $\Phi(n)$ можно рассматривать как компоненты комплексных векторов. Тогда замена базиса будет соответствовать замене набора взаимоисключающих состояний ϕ_k (базиса) новым набором состояний (базисом) ϕ'_k , который состоит из суперпозиций (линейных комбинаций) состояний старого базиса. Разложение по новому базису будет ничуть не хуже, чем разложение по старому, если новый базис также будет ортонормированным, т. е. если скалярное произведение (3.13) будет в нём задаваться прежней формулой.

Оказывается естественным смотреть на волновые функции как на комплексные векторы (возможно, бесконечномерные). Аргументы волновых функций при этом нумеруют компоненты вектора в конкретном базисе, а значение волновой функции в точке выступает как компонента вектора.

3.1.6. Марковский процесс и квантовая эволюция*

Марковский процесс — это случайный процесс, поведение которого зависит только от текущего состояния системы. Пусть $p(n, t)$ — вероятность состояния номер n (из некоторого дискретного набора³) в момент

³В случае, если состояния нумеруются непрерывной переменной x , надо перейти к плотности вероятности $\rho(x, t)$ и от суммы к интегралу, причём функция $M(x, x')$ будет обобщённой, но идейно это нам ничего не даст, поэтому мы пока не будем усложнять рассмотрение.

времени t . Марковский процесс с дискретным временем с шагом δt можно описать с помощью матрицы $\delta t \cdot M(n, n')$, недиагональные компоненты которой задают условные вероятности переходов из n' в n , а диагональные — условные вероятности ухода из данного состояния со знаком минус:

$$p(n, t + \delta t) = p(n, t) + \delta t \cdot \sum_{n'} M(n, n') p(n', t). \quad (3.14)$$

Если устремить шаг по времени к нулю $\delta t \rightarrow 0$, то получается *линейное* уравнение для марковского процесса с непрерывным временем:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, t) = \sum_{n'} M(n, n') p(n', t). \quad (3.15)$$

Просуммировав уравнение по n с учётом сохранения вероятности $\sum_n p(n, t) = 1$ и произвольности $p(n, t)$ получаем условие сохранения вероятности

$$\sum_n M(n, n') = 0. \quad (3.16)$$

Помимо этого имеются условия на положительность вероятностей и условных вероятностей:

$$M(n, n') \geq 0, \quad n \neq n' \quad (3.17)$$

$$M(n, n) \leq 0, \quad (3.18)$$

$$p(n, t) \geq 0. \quad (3.19)$$

Квантовый аналог марковского процесса, *когда над системой не совершается наблюдений*, можно получить заменив вероятности $p(n, t)$ на амплитуды $\psi(n, t)$, а условные вероятности в единицу времени $M(n, n')$ на условные амплитуды в единицу времени $A(n, n')$. Для дискретных состояний получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(n, t) = \sum_{n'} A(n, n') \psi(n', t). \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) — это *временное уравнение Шрёдингера*.

Как и уравнение марковского процесса, уравнение Шрёдингера всегда *линейно*.

Согласно традициям квантовой механики матрица условных вероятностей $A(n, n')$ записывается через матрицу оператора Гамильтона $H(n, n')$

$$A(n, n') = -\frac{i}{\hbar} H(n, n').$$

Уравнение Шрёдингера (3.20) переписывается с следующим виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(n, t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n'} H(n, n') \psi(n', t). \quad (3.21)$$

Условие сохранения вероятности в данном случае оказывается сложнее

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(n, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \psi^*(n, t) \psi(n, t)}{\partial t} = \psi^*(n, t) \frac{\partial \psi(n, t)}{\partial t} + \psi(n, t) \frac{\partial \psi^*(n, t)}{\partial t} = \\ &= \psi^*(n, t) \sum_{n'} A(n, n') \psi(n', t) + \psi(n, t) \sum_{n'} A^*(n, n') \psi^*(n', t). \end{aligned}$$

$$\sum_n \frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = 0 = \sum_{n, n'} \psi^*(n, t) (A(n, n') + A^*(n', n)) \psi(n', t).$$

В силу произвольности $\psi(n, t)$ получаем условие сохранения вероятности

$$A(n, n') + A^*(n', n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H(n, n') = H^*(n', n). \quad (3.22)$$

Однако, условия положительности, аналогичные (3.17), (3.18), (3.19) в квантовом случае отсутствуют! Это связано с тем, что вероятности $p(n, t) = |\psi(n, t)|^2$ положительны по определению, а промежуточные переходы не наблюдаются, а потому описываются не вероятностями, а амплитудами.

Это приводит к важному физическому различию. Классический марковский процесс либо тривиален ($M(n, n') \equiv 0$), либо необратим, т. к. при изменении знака времени матрица $M(n, n')$ должна менять знак, что запрещено условиями положительности (3.17), (3.18). Уравнение Шрёдингера (квантовый аналог марковского процесса) наоборот, всегда обратимо, т. к. условие (3.22) сохраняется при изменении знака времени.

3.2. Возможно всё, что может произойти (ф*)

Рассмотрим квантовую эволюцию, описанную выше в разделе 3.1.6 «Марковский процесс и квантовая эволюция*» с другой точки зрения.

Представим себе следующий эксперимент, в котором частицы вылетают из источника и попадают на фотопластинку, на которой возникает интерференционная картина. Пусть вначале между источником и фотопластинкой нет никаких препятствий (рис. 3.6). Теперь поместим между фотопластинкой и источником экран с двумя щелями (рис. 3.7). Чтобы получить

Антисимметрия, линейность и наличие тождества Якоби позволяет рассматривать коммутатор как *скобку Ли*, действуя в квантовой механике мощный математический аппарат теории *алгебр Ли*. Возможность рассмотрения коммутатора как скобки Ли будет важна и для установления соответствия с теоретической механикой, где аналогичную роль играет скобка Пуассона.

Интегралы движения

Определив полную производную от оператора по времени, мы можем обратиться к вопросу об интегралах движения.

Чтобы оператор \hat{A} задавал закон сохранения достаточно, чтобы оператор явно не зависел от времени и коммутировал с гамильтонианом

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0, \quad [\hat{H}, \hat{A}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{A}}{dt} = 0.$$

Такой эрмитов оператор порождает соответствующую однопараметрическую группу симметрий (унитарных операторов) вида $e^{ia\hat{A}}$. Это соответствует выводам раздела 11.3 «Непрерывные симметрии и законы сохранения».

(*) Возможны также *интегралы движения зависящие от времени (динамические инварианты)*, для которых $\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial t} \neq 0$, но $\frac{d\hat{A}_n}{dt} = 0$. Динамические инварианты (в представлении Шрёдингера) меняются со временем в обратную сторону по сравнению с эволюцией гайзенберговских операторов

$$\hat{A}_n(t_2) = \hat{U}(t_2, t_1) \hat{A}_n(t_1) \hat{U}^\dagger(t_2, t_1), \quad \hat{A}_r(t_2) = \hat{U}^\dagger(t_2, t_1) \hat{A}_r(t_1) \hat{U}(t_2, t_1).$$

Ниже мы продемонстрируем это на примере свободной частицы.

Вопрос для самопроверки: Как зависит от времени интеграл движения в представлении Гайзенберга?

Пример: эволюция волнового пакета для свободной частицы

Гамильтониан для свободной частицы получается из классического наложением шляпок на H и p (в координатном представлении, когда волновые функции представлены как функции от координат, $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}$) в формуле для классической функции Гамильтона (в выражении энергии через координаты и импульсы):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}.$$

Используя его, мы можем написать полные производные по времени от операторов координаты и импульса (координата и импульс не зависят от времени явно, так что частная производная по времени вклада не даёт):

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{p} \right] = 0, \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x} \right] = \frac{i}{2m\hbar} (\underbrace{\hat{p} [\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{x}] \hat{p}}_{-i\hbar}) = \frac{\hat{p}}{m}.$$

Мы воспользовались здесь тождеством (5.21).

Формулы совпадают с классическими «с точностью до шляпок».

В представлении Гайзенберга мы получаем:

$$\frac{d\hat{p}_r}{dt} = 0, \quad \hat{p}_r(0) = \hat{p}_ш; \quad \frac{d\hat{x}_r}{dt} = \frac{\hat{p}_r}{m}, \quad \hat{x}_r(0) = \hat{x}_ш.$$

Система легко интегрируется:

$$\hat{p}_r(t) = \hat{p}_ш = \hat{p}_r(0); \quad \hat{x}_r(t) = \hat{x}_ш + t \frac{\hat{p}_ш}{m} = \hat{x}_r(0) + t \frac{\hat{p}_r(0)}{m}.$$

(*) Для любой наблюдаемой мы можем задать такую зависимость от времени, что она станет динамическим инвариантом. Для координаты свободной частицы можно задать динамический инвариант $x_n(t)$ следующим образом

$$\hat{x}_n(t) = \hat{x}_ш - \frac{\hat{p}}{m} t. \quad (5.24)$$

$$\frac{d\hat{x}_n}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{x}}{dt}}_{\hat{p}/m} - \underbrace{\frac{d\hat{p}}{dt}}_0 \frac{t}{m} - \frac{\hat{p}}{m} = 0.$$

Мы видим, что $\hat{x}_n(t)$ соответствует эволюции по времени в обратную сторону. $\hat{x}_n(t)$ — начальная координата частицы (при $t = 0$) выраженная через наблюдаемые в момент времени t .

При усреднении по произвольной волновой функции (которая в гайзенберговском представлении не зависит от времени) получаем, что в среднем волновой пакет движется с постоянной скоростью:

$$\langle \hat{p} \rangle_t = \langle \hat{p} \rangle_0; \quad \langle \hat{x} \rangle_t = \langle \hat{x} \rangle_0 + t \frac{\langle \hat{p} \rangle_0}{m}. \quad (5.25)$$

Для вычисления среднеквадратичных отклонений нам понадобятся операторы \hat{x}_r^2 и \hat{p}_r^2 :

$$\hat{p}_r^2(t) = \hat{p}_ш^2; \quad \hat{x}_r^2(t) = \left(\hat{x}_ш + t \frac{\hat{p}_ш}{m} \right)^2 = \hat{x}_ш^2 + t^2 \frac{\hat{p}_ш^2}{m^2} + \frac{t}{m} (\hat{p}_ш \hat{x}_ш + \hat{x}_ш \hat{p}_ш).$$

Для среднеквадратичных отклонений получаем:

$$\langle \delta p^2 \rangle_t = \langle \hat{p}^2 \rangle_t - \langle \hat{p} \rangle_t^2 = \langle \delta p^2 \rangle_0; \quad (5.26)$$

$$\langle \delta x^2 \rangle_t = \langle \hat{x}^2 \rangle_t - \langle \hat{x} \rangle_t^2 = \frac{t^2}{m^2} \langle \delta p^2 \rangle_0 + \frac{t}{m} (\langle \hat{p} \hat{x} + \hat{x} \hat{p} \rangle_0 - 2 \langle \hat{x} \rangle_0 \langle \hat{p} \rangle_0) + \langle \delta x^2 \rangle_0.$$

Линейный по времени член в $\langle \delta x^2 \rangle_t$ можно обнулить выбором нулевого момента времени, однако для любого t выполняется соотношение неопределённостей $\langle \delta x^2 \rangle_t \langle \delta p^2 \rangle_t \geq \frac{\hbar^2}{4}$. При больших положительных или отрицательных временах размер волнового пакета неограниченно расплывается, что однозначно говорит нам, что размер волнового пакета действительно никак не связан с размером самой частицы.

5.2.7. Скобка Пуассона и коммутатор*

В теоретической механике наблюдаемые представляются не эрмитовыми операторами, как в квантовой механике, а функциями от канонических переменных (координат и импульсов), т. е. классическая наблюдаемая имеет вид

$$F(Q, P, t). \quad (5.27)$$

Полная производная от классической наблюдаемой (с учётом динамической эволюции системы) имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_a \left(\frac{\partial F}{\partial Q_a} \frac{dQ_a}{dt} + \frac{\partial F}{\partial P_a} \frac{dP_a}{dt} \right).$$

Производные по времени от координат и импульсов в классической механике выражаются с помощью уравнений Гамильтона:

$$\frac{dQ_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_a}, \quad \frac{dP_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_a}.$$

Где $H(Q, P)$ — функция Гамильтона, т. е. энергия, выраженная через координаты и импульсы. Функция Гамильтона — тоже наблюдаемая, классический аналог квантового гамильтониана.

Используя уравнения Гамильтона, мы можем переписать полную производную от F :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\sum_a \left(\frac{\partial F}{\partial Q_a} \frac{\partial H}{\partial P_a} - \frac{\partial F}{\partial P_a} \frac{\partial H}{\partial Q_a} \right)}_{\{F, H\}} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$

Здесь мы обозначили сумму по a через скобку Пуассона $\{F, H\}$.

ванный около точки Q_0 :

$$F(q) = \frac{1}{2\delta Q} \int_{-\delta Q}^{+\delta Q} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi a^2}} \cdot e^{-\frac{(Q-Q_0-\frac{T}{\tau}q)^2}{2a^2}} dQ.$$

Ранее (уравнение (3.9) в разделе 3.1.4 «Распределения вероятностей и волновые функции при измерении») мы уже постулировали, что при измерении волновая функция умножается на прямоугольный импульс (характеристическую функцию), который «вырезает» из неё часть, соответствующую диапазону, в который попала измеренная величина. Теперь, путём анализа квантового процесса измерения с точки зрения квантовой механики, мы получили обобщение этого правила, которое допускает замену прямоугольного импульса на сглаженный импульс, либо на волновую функцию общего вида⁴.

Мы сдвинули границу между системой и наблюдателем, включив в систему «стрелку» прибора. Взаимодействие системы и стрелки мы рассмотрели в рамках унитарной квантовой механики (с помощью оператора эволюции). Однако результат измерения положения стрелки наблюдателем мы снова были вынуждены постулировать как неунитарный процесс, не описываемый унитарной квантовой механикой.

Таким образом, мы «вывели» проекционный постулат для системы, но в качестве исходного положения использовали аналогичный проекционный постулат, но уже для стрелки прибора. Тем не менее, новый проекционный постулат имеет более общий вид, чем исходный. Теперь волновые функции, получаемые при взаимоисключающих результатах измерения, могут быть уже не ортогональными. Однако по-прежнему конечная волновая функция линейна по начальной.

8.2.2. Измерение с двумя стрелками

Моделирование измерения по фон Нейману описывает измерение наблюдаемой с непрерывным спектром, что существенно усложняет задачу,

⁴Замена характеристической функции на функцию $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ общего вида соответствует замене обычного множества, *нечётким множеством (fuzzy set)*, когда для точек определяется не принадлежность/непринадлежность к множеству, а вероятность принадлежности. Впрочем, классические нечёткие множества не позволяют описать умножение на волновую функцию произвольного вида, а значит уместнее рассматривать *квантовые (нечёткие) множества*, для попадания точек в которые задаётся не вероятность, а амплитуда вероятности.

запутывая вопрос о проекционном постулате с вопросом о точности измерения. Мы рассмотрим похожую модель для дискретного спектра. Кроме того, чтобы обсуждать волновую функцию системы после наблюдения, следует также рассмотреть следующее наблюдение. Поэтому мы смоделируем последовательное измерение двух наблюдаемых с помощью двух приборов. Модель будет построена так, что измерение состояния стрелок обоих приборов происходит одновременно в конце эксперимента. Благодаря этому дальнейшая судьба системы может не рассматриваться, а проекционный постулат нам не понадобится. Нам понадобится только правило Борна для вероятностей.⁵

Рассмотрим измерение двух некоммутирующих наблюдаемых \hat{A} и \hat{B} с дискретными спектрами. Собственные числа этих наблюдаемых — a_i и b_j . Соответствующие ортонормированные собственные состояния *малой системы* (собственно измеряемой системы без измерительных приборов) — $|a_i, k\rangle$ и $|b_j, l\rangle$ (индексы k и l различают собственные состояния с одинаковыми собственными числами). Проекторы на собственные подпространства:

$$\hat{P}_i = \sum_k |a_i, k\rangle \langle a_i, k|, \quad \hat{R}_j = \sum_l |b_j, l\rangle \langle b_j, l|,$$

$$\hat{P}_{i_1} \hat{P}_{i_2} = \hat{P}_{i_1} \delta_{i_1 i_2}, \quad \hat{R}_{j_1} \hat{R}_{j_2} = \hat{R}_{j_1} \delta_{j_1 j_2}, \quad \sum_i \hat{P}_i = \sum_j \hat{R}_j = \hat{1}.$$

Пусть начальное состояние малой системы $|\psi_0\rangle$. *Большая система* помимо малой системы включает две *стрелки*, состояния которых мы будем обозначать буквами α и β , в частности базисные состояния обозначим как $|\alpha_n\rangle$, $n \in \mathbb{Z}_N$, $|\beta_m\rangle$, $m \in \mathbb{Z}_M$ (N и M — достаточно большие натуральные числа⁶, или бесконечность). В начале обе стрелки выставлены в базисные состояния с номером 0:

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |\alpha_0\rangle \otimes |\beta_0\rangle.$$

Измерение наблюдаемой \hat{A} описывается как создание корреляции состояния малой системы с первой стрелкой, состояние второй стрелки (про-

⁵ Аналогичная модель была независимо предложена в статье David Oehri, Andrei V. Lebedev, Gordey B. Lesovik, Gianni Blatter “Repeated measurements from unitary evolution: avoiding the projection postulate” arXiv:1502.02938

⁶ N не меньше чем число различных собственных чисел оператора \hat{A} , M не меньше чем число различных собственных чисел оператора \hat{B} .

извольное состояние $|\beta_X\rangle$ остаётся неизменным)

$$\hat{U}_A : |a_i, k\rangle \otimes |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_X\rangle \rightarrow |a_i, k\rangle \otimes |\alpha_{n+i}\rangle \otimes |\beta_X\rangle, \quad \langle \alpha_{i_1} | \alpha_{i_2} \rangle = \delta_{i_1 i_2}.$$

Оператор \hat{U}_A является унитарным, если понимать сумму $n+i$ в смысле \mathbb{Z}_N (как остаток от деления суммы на N).

Аналогично, измерение наблюдаемой \hat{B} описывается как создание корреляции состояния малой системы со второй стрелкой, состояние первой стрелки (произвольное состояние $|\alpha_X\rangle$ остаётся неизменным)

$$\hat{U}_B : |b_j, l\rangle \otimes |\alpha_X\rangle \otimes |\beta_m\rangle \rightarrow |b_j, l\rangle \otimes |\alpha_X\rangle \otimes |\beta_{m+j}\rangle, \quad \langle \beta_{j_1} | \beta_{j_2} \rangle = \delta_{j_1 j_2}.$$

Оператор \hat{U}_B является унитарным, если понимать сумму $m+j$ в смысле \mathbb{Z}_M (как остаток от деления суммы на M).

Под действием оператора \hat{U}_A состояние большой системы $|\Psi_0\rangle$ преобразуется следующим образом:

$$\hat{U}_A |\Psi_0\rangle = \hat{U}_A \sum_i (\hat{P}_i |\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_0\rangle \otimes |\beta_0\rangle = \sum_i (\hat{P}_i |\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_0\rangle.$$

Если теперь подействовать на новое состояние большой системы $\hat{U}_A |\Psi_0\rangle$ оператором \hat{U}_B , мы получим

$$\begin{aligned} \hat{U}_B \hat{U}_A |\Psi_0\rangle &= \hat{U}_B \sum_i (\hat{P}_i |\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_0\rangle = \\ &= \hat{U}_B \sum_{ji} (\hat{R}_j \hat{P}_i |\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_0\rangle = \\ &= \sum_{ji} (\hat{R}_j \hat{P}_i |\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_j\rangle \end{aligned}$$

Каждый член этой суперпозиции соответствует определённом положению стрелок (первая стрелка показывает, что $A = a_i$, а вторая — $B = b_j$). Вероятность такого исхода —

$$p_{ij} = \|\hat{R}_j \hat{P}_i |\psi_0\rangle\|^2 = \langle \psi_0 | \hat{P}_i \hat{R}_j^2 \hat{P}_i | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \hat{P}_i \hat{R}_j \hat{P}_i | \psi_0 \rangle.$$

$$p_{ij} = \langle \psi_{A_i} | \hat{R}_j | \psi_{A_i} \rangle.$$

Здесь $|\psi_{A_i}\rangle = \hat{P}_i |\psi_0\rangle$

Такое описание соответствует тому, что наблюдатель производит измерение состояния стрелок одновременно в конце эксперимента. Таким образом, измерение двух некоммутирующих наблюдаемых \hat{A} и \hat{B} сводится к измерению коммутирующих наблюдаемых — состояний двух стрелок.

Естественно проверить, как соотносится такое описание процесса измерения, с описанием с помощью проекционного постулата. Вероятность того, что первая стрелка покажет $A = a_i$

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_j p_{ij} = \sum_j \langle \psi_0 | \hat{P}_i \hat{R}_j \hat{P}_i | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \hat{P}_i \underbrace{\left(\sum_j \hat{R}_j \right)}_{\hat{1}} \hat{P}_i | \psi_0 \rangle = \\ &= \langle \psi_0 | \hat{P}_i | \psi_0 \rangle = \langle \psi_{A_i} | \psi_{A_i} \rangle. \end{aligned}$$

Условная вероятность того, что вторая стрелка покажет $B = b_j$, при условии, что первая стрелка показала $A = a_i$

$$p_{j|i} = \frac{p_{ij}}{p_i} = \frac{\langle \psi_{A_i} | \hat{R}_j | \psi_{A_i} \rangle}{\langle \psi_{A_i} | \psi_{A_i} \rangle}.$$

Условная вероятность $p_{j|i}$ соответствует вероятности получить $B = b_j$ в результате измерения, выполненного над состоянием $|\psi_{A_i}\rangle = \hat{P}_i |\psi_0\rangle$, которое получается из исходного состояния малой системы с помощью проекционного постулата.

Таким образом, мы показали, что предсказания, которые проекционный постулат даёт для корреляций некоммутирующих наблюдаемых, соответствуют предсказаниям, полученным в рамках рассмотренной модели процесса измерения. В этом смысле, можно сказать, что мы «вывели» проекционный постулат из правила Борна для вероятностей.

Использование проекционного постулата для описания состояния малой системы в результате промежуточного измерения можно рассматривать как переход к условным вероятностям, и, в силу произвольности выбора второй измеряемой наблюдаемой \hat{B} , к *условным амплитудам вероятности*.

Представленный вывод проекционного постулата зависит от модели процесса измерения. Мы продемонстрируем это ниже (8.4.4 «ЛЛ-схема»). Однако, рассмотренная модель описывает измерение с минимально возможным взаимодействием в том смысле, что если измерение совершается над собственным состоянием наблюдаемой, то состояние малой системы не изменяется.

8.2.3. Измерение с одной стрелкой

Мы можем модифицировать описанную выше процедуру измерения исключив вторую стрелку и действие унитарного оператора \hat{U}_B . В этом случае в конце эксперимента вместо одновременного измерения показания двух стрелок измеряются показания первой стрелки, и напрямую измеряется наблюдаемая \hat{B} для малой системы. В роли второй стрелки выступает сама малая система, для которой измеряется наблюдаемая \hat{B} .

$$\begin{aligned} |\Psi'_0\rangle &= |\psi_0\rangle \otimes |\alpha_0\rangle. \\ \hat{U}_A : |\psi_{Aik}\rangle \otimes |\alpha_n\rangle &\rightarrow |\psi_{Aik}\rangle \otimes |\alpha_{n+i}\rangle. \\ \hat{U}_A |\Psi'_0\rangle &= \sum_i (\hat{P}_i |\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle = \sum_{ji} (\hat{R}_j \hat{P}_i |\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \end{aligned}$$

В последнем выражении слагаемые двойной суммы снова соответствуют тому, что измерение показало, что $A = a_i$, $B = b_j$.

Вероятности p_{ij} и условные вероятности $p_{j|i}$ при таком подходе остаются прежними.

Обсуждение

Рассмотрение схемы с одной стрелкой представляет ещё более наглядные аргументы в пользу проекционного постулата. В схеме с двумя стрелками после применения к системе операторов \hat{U}_A и \hat{U}_B конечное измерение для разных наблюдаемых \hat{B} осуществляется для разных состояний. По этой причине мы можем для фиксированного состояния перед измерением однозначно определить только условные вероятности, но не условные амплитуды. В схеме с одной стрелкой конечное измерение осуществляется для состояния, которое не зависит от наблюдаемой \hat{B} , поэтому определение условных амплитуд осуществляется однозначно для фиксированного состояния перед измерением.

В схеме с двумя стрелками мы не можем задать вопрос «Каково состояние системы между измерениями?» Это связано с тем, что измерение наблюдаемой \hat{B} состоит из двух частей: создание корреляции между измеряемой системой и второй стрелкой и измерение состояния второй стрелки. В схеме с одной стрелкой измерение наблюдаемой \hat{B} происходит в момент конечного измерения и мы можем себе представить, что конечное измерение осуществляется в два этапа: измерение состояния первой стрелки (завершает измерение наблюдаемой \hat{A}) и измерение наблюдаемой \hat{B} . И мы

можем поставить вопрос о том, какое состояние надо приписать системе между этими двумя моментами.

После создания корреляции между измеряемой системой и стрелкой (с помощью оператора \hat{U}_A), стрелка и измеряемая система больше не взаимодействуют, так что одновременность обоих измерений перестаёт быть принципиальной. Например, если после действия оператора \hat{U}_A измеряемая система и стрелка удалились друг от друга в пространстве, то измерения состояния стрелки и измеряемой системы разделены пространственно-подобным интервалом, а в этом случае, одновременность относительна, и переходом к другой инерциальной системе отсчёта мы можем сделать измерение состояния измеряемой системы более поздним, чем измерение состояния стрелки.

Таким образом, для схемы с двумя стрелками мы показали, что условные вероятности в этой схеме равны условным вероятностям при двух последовательно выполняемых идеальных измерениях, из которых первое описывается проекционным постулатом. Для схемы с одной стрелкой мы показали более сильное утверждение, что в соответствующей системе отсчёта между измерениями может быть временной промежуток, в котором единственное состояние, которое можно приписать системе описывается проекционным постулатом.

Отметим специально, что мы вывели проекционный постулат не из унитарной эволюции, как пытаются делать многие авторы, а из правила Борна для вероятностей. Проекционный постулат при этом сводится к переходу условным вероятностям и условным амплитудам вероятности. Компоненты волновой функции, описывающие не реализовавшиеся исходы первого измерения не исчезают сами собой в процессе унитарной эволюции системы, но перестают оказывать влияние на результаты дальнейших измерений.

8.2.4. Эксперимент ЭПР как измерение по схеме с одной стрелкой

Мысленный эксперимент Эйнштейна–Подольского–Розена⁷ основан на том, что измерение некоммутирующих наблюдаемых сводится к измерению заведомо коммутирующих наблюдаемых, относящихся к разным под-

⁷Русский перевод оригинальной статьи со вступительным словом В. А. Фока и ответом Н. Бора был опубликован в журнале УФН: Фок В.А., Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н., Бор Н., «Можно ли считать квантовомеханическое описание физической реальности полным?» УФН 16 (4) (1936).

системам. Мы покажем, что эксперимент ЭПР в модификации предложенной Д. Бомом⁸ в точности соответствует описанной выше схеме измерения с одной стрелкой. Таким образом, эксперимент ЭПР полностью согласуется со стандартной квантовой механикой.

Пусть малая система — кубит в состоянии $|\psi_0\rangle = \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$. Стрелка — тоже кубит в состоянии $|\uparrow\rangle$.

$$|\Psi'_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)|\uparrow\rangle.$$

Первая измеряемая наблюдаемая — $\hat{A} = \hat{\sigma}_z$, соответствующий унитарный оператор определим как «условное не», которое переворачивает состояние стрелки, если малая система находится в состоянии $|\uparrow\rangle$

$$\hat{U}_A : |\uparrow\rangle|x\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle \underbrace{(\hat{\sigma}_x|x\rangle)}_{|\text{не } x\rangle}, \quad |\downarrow\rangle|x\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle|x\rangle.$$

Тогда подействовав оператором \hat{U}_A мы получаем ЭПР-состояние измеряемой системы и стрелки

$$\hat{U}_A|\Psi'_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle).$$

Далее, схема предполагает измерение наблюдаемой $\hat{\sigma}_z$ над вторым кубитом (стрелкой), и измерение произвольной однокубитовой наблюдаемой \hat{B} над первым кубитом — малой системой.

Мы описали эксперимент ЭПР в формулировке Бома как часть рассмотренной выше схемы измерения с одной стрелкой. Исходная идея эксперимента ЭПР соответствует исходной идее нашего рассмотрения: замена невозможного одновременного измерения двух некоммутирующих наблюдаемых одновременным измерением каких-либо иных, уже коммутирующих, наблюдаемых, связанных с разными подсистемами.

8.3. Сдвиг измерения по времени

Два измерения, выполняемые над замкнутой системой в разные моменты времени мы будем считать эквивалентными, если возможно заменить

⁸См. стр. 700 книги Д. Бом «Квантовая теория». М.: Наука, 1965.

одно измерение другим, причём по окончании причём результаты эксперимента при этом не изменяются.

Более точно, мы можем заменить измерение наблюдаемой $\hat{A}(t_1)$ в момент времени t_1 измерением наблюдаемой $\hat{A}(t_2)$ в момент времени t_2 (примем для определённости $t_2 > t_1$) и считать такую замену эквивалентной, если набор возможных значений наблюдаемых и их вероятности совпадают, а состояние системы после момента времени t_2 не зависит от того, в какой момент времени измерение было выполнено (но может зависеть от результата измерения).

Оказывается, что для эквивалентности измерений достаточно, чтобы наблюдаемая $\hat{A}(t)$ была *динамическим инвариантом* (см. 5.2.6 «Интегралы движения»), а на временном отрезке $[t_1, t_2]$ не выполнялось измерений других наблюдаемых, не коммутирующих с $\hat{A}(t)$.

Покажем, что любую наблюдаемую $\hat{A}(t_1)$ можно продолжить на другие моменты времени, как интеграл движения $\hat{A}(t)$.

Пусть наблюдаемая $\hat{A}(t_1)$ разложена по проекторам $\hat{P}_k(t_1)$, которые отвечают собственным числам a_k

$$\hat{A}(t_1) = \sum_k a_k \hat{P}_k(t_1).$$

Если в момент времени t_1 проведено измерение наблюдаемой $\hat{A}(t_1)$, которое дало значение a_k , то, согласно проекционному постулату, состояние $\psi(t_1)$ перешло в состояние

$$\psi_k(t_1) = \hat{P}_k(t_1)\psi(t_1).$$

К моменту времени $t_2 > t_1$ состояние $\psi_k(t_1)$ эволюционирует в состояние

$$\psi_k(t_2) = \hat{U}(t_2, t_1) \psi_k(t_1) = \hat{U}(t_2, t_1) \hat{P}_k(t_1) \psi(t_1).$$

Вставив перед состоянием $\psi(t_1)$ единичный оператор $\hat{1} = \hat{U}^\dagger(t_2, t_1) \hat{U}(t_2, t_1)$ получаем, что то же состояние $\psi_2(t_2)$ может быть получено в результате унитарной эволюции исходного состояния $\psi(t_1)$, и некоторого нового измерения, которое выполняется в момент времени t_2 и описывается проекционным оператором $\hat{P}_k(t_2)$:

$$\psi_k(t_2) = \underbrace{\hat{U}(t_2, t_1) \hat{P}_k(t_1) \hat{U}^\dagger(t_2, t_1)}_{\hat{P}_k(t_2)} \underbrace{\hat{U}(t_2, t_1) \psi(t_1)}_{\psi(t_2)} = \hat{P}_k(t_2) \psi(t_2).$$

Измерение в момент времени t_2 соответствует обнаружению собственного числа a_k для другой наблюдаемой

$$\hat{A}(t_2) = \hat{U}(t_2, t_1) \hat{A}(t_1) \hat{U}^\dagger(t_2, t_1), \quad \hat{A}(t_2) = \sum_k a_k \hat{P}_k(t_2).$$

По сравнению с $\hat{A}(t_1)$ спектр $\hat{A}(t_2)$ остаётся прежним, а собственные подпространства «доворачиваются» с помощью оператора $\hat{U}(t_2, t_1)$.

Используя дифференциальное уравнение на оператор эволюции

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_1) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t) U(t, t_1),$$

мы можем написать для операторнозначной функции $\hat{A}(t)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{A}(t)] \Leftrightarrow \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{A}(t)] = 0.$$

Это уравнение отличается знаком от уравнения Гайзенберга, т. е. оно описывает эволюцию оператора «в обратную сторону». Антигайзенберговская эволюция оператора компенсирует шрёдингеровскую эволюцию квантовых состояний. (Ранее мы уже приводили пример динамического инварианта для свободной частицы, который в момент времени $t = 0$ соответствует оператору координаты (5.24): $x_{\text{и}}(t) = \hat{x} - \hat{p}t/m$.)

Таким образом, точный момент времени, когда выполняется то или иное измерение не важен, если доопределить измеряемые величины, как динамические инварианты. Важен лишь порядок в котором проводятся измерения некоммутирующих величин. Измерения коммутирующих величин можно переставлять, в силу коммутативности соответствующих проекторов.

8.4. Возможна ли иная теория измерений? (фф)

Теория селективных измерений состоит из двух частей:

- формула для вероятности определённого исхода измерения;
- формула для волновой функции после измерения с определённым исходом (проеекционный постулат).

ЛЛ-схема

В классическом учебнике Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица¹⁰ вместо проекционного постулата рассматривается более общая схема (далее ЛЛ-схема). Состояние до измерения Ψ может быть разложено по собственным функциям Ψ_n измеряемой наблюдаемой \hat{F} :

$$\Psi = \sum_m a_m \Psi_m, \quad \hat{F}\Psi_n = f_n \Psi_n, \quad \langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle = 1, \quad a_n = \langle \Psi_n | \Psi \rangle.$$

Вероятность p_n того, что измерение даст значение f_n задаётся стандартным правилом Борна: $p_n = |a_n|^2$, однако состояние после измерения в общем случае $\varphi_n \neq \Psi_n$, $\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = 1$. Причём специально подчёркивается, что состояния φ_n не обязательно ортогональны и, следовательно, могут не быть собственными для какого-либо эрмитового оператора. Длительность процесса измерения по ЛЛ-схеме явно не обсуждается.

ЛЛ-схема — это наиболее общее описание изменения состояния при селективном квантовом измерении, *в предположении, что начальное чистое состояние переходит снова в чистое состояние.*

ЛЛ-схема может быть сведена к комбинации проекционного постулата и унитарной эволюции. Измерение по ЛЛ-схеме можно описать как комбинацию двух этапов:

- Мгновенное идеальное измерение, описывающееся проекционным постулатом. $\Psi \rightarrow \Psi_n$ с вероятностью $p_n = |a_n|^2$.
- Унитарная эволюция на протяжении короткого времени δt , с гамильтонианом \hat{H}_n , зависящим от исхода измерения. $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_n \delta t} : \Psi_n \rightarrow \varphi_n$ с вероятностью 1.

Мы видим, что подбором гамильтонианов \hat{H}_n можно описать измерение с совершенно произвольным набором состояний φ_n . Можно даже добиться того, что конечное состояние системы при всех результатах измерения будет одинаковым, т. е. используя ЛЛ-схему можно описать приготовление заданного конечного состояния из произвольного начального с вероятностью 1.

ЛЛ-схема на примере опыта Штерна–Герлаха

Рассмотрим пример измерения по ЛЛ-схеме в эксперименте Штерна–Герлаха. При измерении спина частицы пучок частиц пролетает через об-

¹⁰Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 3. Квантовая механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. §7. Волновая функция и измерение.

ласть сильно неоднородного магнитного поля. На частицы действует сила, пропорциональная проекции спина на магнитное поле. Исходный неполяризованный пучок расщепляется на несколько пучков с определёнными значениями проекции спина на магнитное поле. В результате создаётся корреляция между координатой частицы вдоль поля (поперёк пучка) и проекцией её спина. Благодаря этой корреляции последующее измерение поперечной координаты частицы позволяет определить проекцию спина частицы. (Можно рассматривать частицу как совокупность двух подсистем: спиновой и координатной, причём в данном измерении координатная подсистема выступает в роли «стрелки».) Если рассматривать спиновое состояние частицы, то его эволюция зависит от магнитного поля в области, где частица пролетает. В эксперименте Штерна-Герлаха магнитное поле сильно неоднородно, таким образом, для компонент расщепившегося пучка эволюция спина по времени описывается различными гамильтонианами, в соответствии с ЛЛ-схемой. Впрочем, в исходной схеме опыта, проекция спина на магнитное поле в подпучках определена и эволюция спина после расщепления пучков сводится к разному набегу фазы $e^{-i\omega_m \delta t}$, где m — проекция спина. Опыт можно легко модифицировать для воспроизводства ЛЛ-схемы общего вида, поместив после установки Штерна-Герлаха магниты, создающие на пути пучков различные магнитные поля произвольной величины и направления.

8.4.5. Место проекционного постулата (фф)

С учётом вышеизложенного, может показаться, что постановка вопроса о выводе проекционного постулата вообще лишена смысла, поскольку он является лишь одним из возможных приближений при описании селективного измерения. В частности, заведомой идеализацией представляется предположение о мгновенности процесса измерения.

Обычно проекционный постулат обосновывается тем, что повторное измерение физической величины сразу после завершения первого измерения должно давать тот же результат.

Это аналогично изменению при измерении классического распределения вероятности: если в результате измерения установлено, что $x \in [a, b]$, то из распределения вероятностей без изменений «вырезается» кусок $x \in [a, b]$, а вне этого отрезка вероятности обнуляются: $\rho(x) \rightarrow \chi_{[a,b]}(x) \rho(x)$, где $\chi_{[a,b]}$ — характеристическая функция отрезка. Такое изменение состояния в классической теории вероятностей может произойти без взаимодействия: вне отрезка $[a, b]$ частица не обнаружена, т. е. прибор с ней не взаимодей-

ствовал. (См. 3.1.4. «Распределения вероятностей и волновые функции при измерении».)

Измерение, описываемое проекционным постулатом в квантовой механике также можно рассматривать как измерение с минимально возможным взаимодействием. Как и в классической теории вероятностей, мы можем (по крайней мере теоретически) построить измерение так, что при интересующем нас исходе взаимодействие системы с прибором отсутствовало, т. е. можно построить установку так, что интересующий нас исход измерения соответствует тому, что ни один датчик не сработал. Точная локализация во времени процесса измерения и его длительность оказываются не существенны.

Другой важный случай, когда применяется именно проекционный постулат — измерение, которому подвергается одна из подсистем сложной системы, состоящей из двух (или более) невзаимодействующих (в процессе измерения) подсистем. Состояния подсистем могут быть скоррелированы за счёт более раннего взаимодействия (прямого или косвенного). Отсутствие взаимодействия в период измерения может достигаться, например, пространственной удалённостью, в этом случае изолированность может гарантироваться постулатами специальной теории относительности. Проекционный постулат, применительно к системе в целом может не выполняться (например, измерение может описываться ЛЛ-схемой), но проекционный постулат обязан выполняться для подсистемы, которая не взаимодействовала с измерительным прибором (корреляция подсистем разрушается в процессе измерения). Отсутствие взаимодействия подсистем делает несущественным конкретный момент времени, когда происходит измерение, а также дальнейшую судьбу подсистемы, взаимодействовавшей с прибором. Эта подсистема может быть вообще уничтожена в процессе измерения, например фотон может быть поглощён датчиком.

Таким образом, хотя проекционный постулат не является универсальным законом изменения состояния системы при измерении, он описывает измерение, происходящее с минимальным возможным взаимодействием системы и прибора. Проекционный постулат становится точным в двух важных случаях «измерения без взаимодействия»:

- выбранный исход соответствует отсутствию взаимодействия системы и датчика;
- система состоит из невзаимодействующих коррелированных подсистем, причём описывается состояние той подсистемы, которая не взаимодействует с прибором.

В этих случаях проекционный постулат допускает экспериментальную проверку, более того, регулярно проверяется в различных опытах по проверке оснований квантовой механики.

Наличие этих случаев также придаёт смысл попыткам вывода (или обоснования) проекционного постулата из других принципов квантовой теории.

8.5. Декогеренция (фф)

Более подробное рассмотрение взаимодействия наблюдателя и прибора включает в себя неконтролируемое взаимодействие прибора и среды (термостата). В результате микросистема, прибор и среда попадают в зацепленное состояние, и хотя состояние системы в целом (микросистема+прибор+среда) остаётся чистым (могло бы описываться волновой функцией), при описании только подсистемы микросистема+прибор мы должны применять язык смешанных состояний (матриц плотности). Этот процесс называют *декогеренцией*.

Доказывается, что матрица плотности, получаемая при описании прибора, взаимодействующего со средой, оказывается неотличимой от матрицы плотности, возникающей при неселективном измерении (стремится к диагональному виду в базисе конечных состояний). Многие авторы делают из этого вывод, что теория декогеренции позволяет вывести проекционный постулат теории квантовых измерений. Часто декогеренция рассматривается как альтернатива многомировой интерпретации квантовой механики, т. е. как *интерпретация квантовой механики с точки зрения декогеренции*. К преимуществу декогеренции перед прочими интерпретациями относят развитый математический аппарат, который в приложении к физическим задачам позволяет говорить о том, что декогеренция не просто интерпретирует ранее постулированные классиками принципы квантовой механики, но и позволяет их уточнять (ведь матрица плотности при декогеренции диагонализуется лишь в пределе) и делать нетривиальные теоретические предсказания.

Однако рассмотрение процесса декогеренции прибора со средой на самом деле не позволяет вывести проекционный постулат, который относится к селективному измерению. Декогеренция описывает как различные исходы измерения отделяются друг от друга (как матрица плотности в базисе конечных состояний становится почти диагональной), но не объясняет как из всех возможных исходов измерения выбирается один.

расплывчаты, чтобы их можно было по существу обсуждать с точки зрения физики) следует считать гипотезу о возможности приближённого описания квантовых нелокальных эффектов с помощью некоторой эффективной теории, на роль которой предлагается *классическая локальная теория поля* (как вариант — общая теория относительности). Естественно, такой подход (исторически восходящий к Эйнштейну) при современном уровне физики бесперспективен, поскольку в *таком* приближении пренебрегается как раз тем, что автор хочет описать. Грубые ошибки, допущенные далее в общей теории относительности, после этого только подчёркивают низкий научный уровень работы.

По всей видимости этот парадокс (написание *такой* книги сотрудником уважаемого академического института) может быть объяснён тем, что сам Доронин не столько физик, сколько программист, как написано на интернет-сайте Лаборатории спиновой динамики и спинового компьютеринга, в которой он работает: «С. И. Доронин владеет различными языками программирования, разрабатывает в нашей лаборатории программы для численного решения задач, в том числе параллельные программы для суперкомпьютерных расчётов, проводимых в Межведомственном Суперкомпьютерном Центре (МСЦ)». Я сомневался, следует ли давать здесь ссылку на такую книгу, но решил, что подобного рода предостережение необходимо.

Ситуация осложняется ещё и тем, что ряд настоящих физиков (начиная, по крайней мере, с Шрёдингера) в своих философских работах также обращается к восточной философии, а порой и к обсуждению паранормальных явлений.

9.3.9. Активное сознание (фф*)

Термин *активное сознание*, для сознания которое способно влиять на исход измерения, был введён М. Б. Менским, хотя подобного рода гипотезы периодически высказывались в научной и околонаучной среде очень давно (вероятно, с начальных времён квантовой теории).

Активное сознание по Менскому влияет на вероятности с точки зрения наблюдателя-носителя активного сознания, но для всех остальных (не имеющих активного сознания) наблюда-



Рис. 9.16. Михаил Борисович Менский. [<http://ufn.ru/>]

телей вероятности остаются прежними, даже если они наблюдают те же эксперименты. Такая гипотеза не допускает научной проверки: подобный носитель активного сознания мог бы сам убедиться в том, что может управлять вероятностями, но не смог бы убедить в этом никого, кроме других носителей активного сознания.

Если предположить, что активное сознание влияет на вероятности не только для наблюдателя-носителя, но и для всех остальных наблюдателей, то, несмотря на использование столь нелюбимого большинством физиков слова «сознание», такая гипотеза уже допускает экспериментальную научную проверку. Различные экспериментальные группы время от времени публикуют результаты исследований, в которых «оператор» пытался силой мысли влиять на классический или квантовый случайный процесс (карты, сдаваемые из колоды, дробовой шум и т. п.). Результаты таких поисков (из числа тех, с которыми я ознакомился) неизменно отрицательные или сомнительные (прежде всего сомнительные по методике эксперимента и обработки данных). В качестве примера такого исследования можно привести книгу Р. Г. Джан, Б. Дж. Данн «Границы реальности: роль сознания в физическом мире»²³. Несмотря на то, что авторы организовали свою Лабораторию изучения аномалий при Школе инженерных и прикладных наук Принстонского университета, книга сомнительна прежде всего методологически: если, согласно книге, «оператор» якобы «влияет» на генератор *псевдослучайных чисел*, т. е. на абсолютно детерминистический процесс, то это надо хоть как-то прокомментировать. В книге содержатся отсылки к квантовой теории, но они столь неопределённые, что не могут обсуждаться на содержательном уровне.

Также эта гипотеза допускает содержательное теоретическое обсуждение. Выше мы уже обсуждали «жесткость» формулы для квантовых вероятностей (см. 8.4.2 «“Жесткость” формулы для вероятностей (фф)»). При этом мы показали, что отклонения от стандартной борновской формулы для квантовых вероятностей позволяют передавать информацию со сверхсветовой скоростью с помощью квантовых запутанных состояний, а также позволяют ввести абсолютную одновременность (не зависящую от системы отсчёта). Таким образом, активное сознание явным образом нарушает лоренц-инвариантность теории, т. е. входит в прямое противоречие со специальной теорией относительности. Это именно настоящее, а не кажущееся противоречие с теорией относительности, в отличие от мгновенного

²³ Джан Р. Г., Данн Б. Дж. Границы реальности: роль сознания в физическом мире. — М.: ОИВТ РАН, 1995.

коллапса волновой функции в обычной квантовой теории, который не позволяет передать со сверхсветовой скоростью какую-либо информацию.

В принципе, после того как на эксперименте было показано нарушение такой «очевидной» симметрии, как зеркальная симметрия (несохранение чётности), мы можем допустить, что и лоренцевская симметрия является только приближительной. Однако для большинства физиков противоречие активного сознания СТО ставит крест на этой гипотезе.

мы — описания физических процессов, которые реализуют данное вычисление.

Поскольку линии логической схемы могут разветвляться, произвольная информация в логических схемах может копироваться. Согласно теореме о невозможности клонирования квантового состояния, возможность копирования означает, что информация не может задаваться произвольным квантовым состоянием, в частности, она не может быть квантовой суперпозицией двух логически различных входов. Поскольку число входов логического вентиля больше, чем число выходов, число входных состояний больше, чем число выходных, и работа такого вентиля необратима. Физически из этого, в частности, следует, что работа соответствующего физического устройства генерирует энтропию: *потеря одного бита информации порождает не менее одного бита энтропии, как меры недостатка информации о микросостоянии системы.*

Поскольку квантовая теория замкнутых систем всегда порождает обратимую (унитарную) эволюцию, необратимые логические вентили не могут быть смоделированы как замкнутые квантовые системы.

10.6.3. Обратимые классические вычисления

Унитарная квантовая эволюция, в отличие от классических алгоритмов, полностью обратима. Тем не менее любое классическое вычисление может быть модифицировано так, чтобы каждый шаг выполнялся обратимым образом, и всё вычисление в целом также было обратимым.

Для обратимых *классических* вычислений вход и выход всегда содержат одинаковое количество бит L и любое вычисление можно рассматривать как некоторое взаимно-однозначное отображение (перестановку) множества всех входов (состоит из 2^L элементов) на себя.

Такую перестановку можно представить матрицей $2^L \times 2^L$, в каждой строке и в каждом столбце которой имеется ровно одна единица, а остальные элементы — нули. Такая матрица является унитарной (обратима и сохраняет скалярное произведение), а значит может быть реализована как оператор эволюции некоторой квантовой системы с пространством состояний $\mathcal{H}_L = \mathbb{C}^{2^L}$ (см. рис. 10.1).

10.6.4. Обратимые вычисления

Для записи обратимых вычислений удобно использовать *обратимые логические операции* (они не подпадают под определение логической опе-

рации, данное выше). Обратимые логические операции являются взаимно-однозначными отображениями множества входов (множество состояний l битов, которое имеет 2^l состояний) на множество выходов, которое также имеет 2^l состояний и может быть записано как множество состояний l битов.



Рис. 10.1. Обратимый логический вентиль, действующий на два (ку)бита.

Обратимая логическая операция может быть изображена графически (рис. 10.1) в виде *обратимого логического вентиля*: блока, имеющего равное число входов (однобитных аргументов) и выходов (битов для записи значения функции). Такая картинка полностью аналогична графическому представлению квантового оператора, действующего на сложную систему (см. 4.4.4 «Сравнение разных обозначений*»), и, действительно,

действие такого вентиля на квантовую систему соответствует действию соответствующего унитарного оператора.

Доказано, что любое классическое вычисление может быть сделано обратимым. При этом достаточно применить конечное число разновидностей обратимых логических вентилях, например, достаточно одного универсального вентиля Тоффоли («дважды управляемого не», есть и другие универсальные обратимые вентили):

$$\begin{array}{l} \text{«вентиль Тоффоли»:} \\ 000 \rightarrow 000, \quad 100 \rightarrow 100, \\ 001 \rightarrow 001, \quad 101 \rightarrow 101, \\ 010 \rightarrow 010, \quad \mathbf{110} \rightarrow \mathbf{111}, \\ 011 \rightarrow 011, \quad \mathbf{111} \rightarrow \mathbf{110} \end{array}$$

При применении вентиля Тоффоли первые два бита определяют применять ли операцию «не» ко третьему биту, сами первые два бита передаются со входа на выход без изменений.

Обратимые вентили типа вентиля Тоффоли могут быть реализованы в виде классических, или квантовых устройств. Однако такой вентиль переводит базисное состояние (в котором состояние всех битов задаётся как 0 или 1 и биты не зависят друг от друга) снова в базисные состояния.

То есть в процессе таких вычислений (вычислений в базисных состояниях) нигде не появляются квантовые суперпозиции и квантовая запутанность. Единственное преимущество квантовой реализации таких вычислений — теоретическая возможность вычисления без генерации энтропии, т. е. без диссипации энергии. Генерация энтропии и нагрев будут обязательно

происходить только при необратимой очистке памяти и приготовлении исходного состояния компьютера.

10.6.5. Вентили сугубо квантовые

Чтобы построить универсальный квантовый компьютер в смысле приведённого выше определения, необходимо дополнить описанный выше вентиль Тоффли несколькими сугубо квантовыми вентилями. Обычно берут однобитовые вентили

$$e^{i\alpha\sigma_x}, \quad e^{i\alpha\sigma_y}, \quad e^{i\alpha\sigma_z}, \quad H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Вентиль H называется *вентилем Адамара*. Доказано, что, используя перечисленные вентили, можно воспроизвести любое унитарное преобразование на пространстве состояний входа (пространстве состояний L кубитов) с любой наперёд заданной точностью. Более того, вместо трёхбитового вентиля Тоффли («дважды управляемое не») достаточно применения более простого двухбитового вентиля, например, вентиля «управляемое не»

$$\begin{array}{l} 00 \rightarrow 00 \\ 01 \rightarrow 01 \\ \text{«управляемое не»}: 10 \rightarrow 11 \\ 11 \rightarrow 10 \end{array}$$

В операции «управляемое не» первый бит определяет применять ли операцию «не» ко второму биту, сам первый бит передаётся со входа на выход без изменений.

Иногда количество вентиляей, применяемых для описания квантового компьютера стремятся сократить, например можно зафиксировать α в вентиле $e^{i\alpha\sigma_x}$ каким-то одним значением, несоизмеримым с 2π , а остальные значения получать многократными повторениями. Для практических целей такое «упрощение» не слишком полезно, особенно если квантовые вентили воспроизводятся с конечной точностью. Наоборот, при изложении тех или иных алгоритмов может быть полезно вводить новые вентили, например, N -битную версию «управляемого не», для которой «не» применяется к последнему биту, если все остальные биты равны 1.

10.6.6. Обратимость и уборка «мусора»

Переписывание какого-либо необратимого алгоритма в обратимом виде может привести к тому, что в схеме появятся дополнительные выход-

10.7. Алгоритм Гровера

Квантовый алгоритм Гровера позволяет ускорить решение задачи перебора.

Пусть нам надо найти корень уравнения

$$f(\omega) = 0, \quad \omega = 0, 1, \dots, 2^L - 1, \quad 2^L \gg 1,$$

где f — некоторая функция которую сравнительно легко вычислить, но для которой сложно решить уравнение. То есть f — это такая функция, для которой мы не знаем лучшего алгоритма решения уравнения, чем полный перебор, но для которой в интересующей нас области имеется ровно один корень.

Будем считать, что у нас есть *квантовый чёрный ящик*, который представляет собой унитарный оператор (квантовый вентиль) \hat{U}_ω следующего вида:

$$\hat{U}_\omega = \hat{1} - 2|\omega\rangle\langle\omega|,$$

т. е. для базисных состояний

$$\hat{U}_\omega|\omega\rangle = -|\omega\rangle, \quad \hat{U}_\omega|n\rangle = |n\rangle, \quad n \neq \omega.$$

Помимо неизвестного выделенного состояния ω у нас есть известное выделенное состояние $|X\rangle$, с этого состояния мы начнём вычисления:

$$|X\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{\otimes L} = \frac{1}{2^{L/2}} \sum_{n=0}^{2^L-1} |n\rangle.$$

Для этого состояния мы можем определить аналогичный унитарный оператор \hat{U}_X

$$\hat{U}_X = -\hat{1} + 2|X\rangle\langle X|.$$

Вычисление состоит в поочерёдном действии на состояние $|X\rangle$ операторов \hat{U}_ω и \hat{U}_X :

$$|\Psi_0\rangle = |X\rangle, \quad |\Psi_k\rangle = \hat{U}_X \hat{U}_\omega |\Psi_{k-1}\rangle = (\hat{U}_X \hat{U}_\omega)^k |X\rangle.$$

Легко видеть, что вектор $|\Psi_k\rangle$ всё время остаётся в плоскости натянутой на векторы $|\omega\rangle$ и $|X\rangle$. В этой плоскости операторы \hat{U}_ω и \hat{U}_X задают зеркальные отражения относительно прямой ω' перпендикулярной $|\omega\rangle$ и прямой X

параллельной $|X\rangle$. Угол δ между прямыми ω' и X и угол α между ω и X можно определить из скалярного произведения

$$\delta \approx \sin \delta = \cos \alpha = \langle \omega | X \rangle = \frac{1}{2^{L/2}} \ll 1.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \delta \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^{L/2}}.$$

Комбинация отражений относительно пересекающихся прямых даёт поворот относительно точки пересечения на удвоенный угол между этими прямыми 2δ в направлении от первой прямой ко второй (от ω' к X). Таким образом, примерно за

$$\frac{\alpha}{2\delta} = \frac{\pi}{4\delta} - \frac{1}{2} \approx \frac{\pi}{4} 2^{L/2}$$

шагов вектор $|\Psi_k\rangle$ станет почти параллелен ω (с точностью δ), а при дальнейшем повторении итераций вектор $|\Psi_k\rangle$ начнёт уклоняться от ω в противоположную сторону.

Если $N = 2^L$ — число вариантов перебора, в классическом случае для нахождения ω потребовалось бы вычислить функцию f в среднем $N/2$ раз, а в квантовом — $\frac{\pi}{4}\sqrt{N}$ раз.

Конструирование вентиля \hat{U}_X оставляем читателю в качестве упражнения. Отметим, что тут будет полезен вентиль Адамара H .

(ф) Алгоритм Гровера иногда называют «алгоритмом поиска по неотсортированной базе данных», подразумевая, что функция $f(n)$ задаёт содержимой ячейки номер n некоторой большой базы данных. Такая точка зрения возможно только с существенной оговоркой: это должна быть **квантовая база данных**, т. е. такая база данных должна принимать не только запросы вида «выдать содержимое ячейки номер n », но и суперпозиции таких запросов, выдавая в ответ суперпозиции соответствующих ответов.

нелокальным (невыразимым через переменные в данной точке импульсного пространства).

13.6.5. Гидродинамическая аналогия**

Получив для плотности потока вероятности уравнение непрерывности, аналогичное уравнению непрерывности для гидродинамики жидкости, текущей в конфигурационном пространстве, естественно попытаться развить аналогию, и записать для такой жидкости уравнения движения, соответствующие квантовой динамике. В принципе у нас уже есть уравнение динамики — это уравнение Шрёдингера, но для развития аналогии его надо переписать через плотность ϱ и скорость $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\varrho}$.

Как мы убедились выше, плотность вероятности и скорость потока вероятности связаны с абсолютной величиной и фазой волновой функции.

$$\psi(Q) = \sqrt{\varrho(Q)} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(Q)\right), \quad \mathbf{v}(Q) = \frac{1}{m}\nabla S(Q).$$

Здесь мы считаем, что все векторы имеют размерность конфигурационного пространства, $\frac{1}{m}$ — матрица обратной массы (в смысле раздела 13.6.2). Тогда уравнение Шрёдингера (мы ограничимся случаем без векторного потенциала) имеет следующий вид

$$-\frac{\hbar^2}{2}\nabla\frac{1}{m}\nabla\psi + U(Q)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (13.49)$$

Подставим в него волновую функцию в форме $\psi(Q) = \sqrt{\varrho(Q)}e^{\frac{i}{\hbar}S(Q)}$, после чего умножив уравнение на $e^{-\frac{i}{\hbar}S(Q)}$ из мнимой части получаем уравнение

$$\frac{\partial\sqrt{\varrho}}{\partial t} + (\nabla\sqrt{\varrho})\left(\frac{1}{m}\nabla S\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\varrho}\left(\nabla\frac{1}{m}\nabla S\right) = 0,$$

которое после умножения на $2\sqrt{\varrho}$ совпадает с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\left(\varrho\frac{1}{m}\nabla S\right) = 0, \quad (13.50)$$

из вещественной части получаем уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2}\nabla\frac{1}{m}\nabla\sqrt{\varrho} + \frac{1}{2}\sqrt{\varrho}(\nabla S)\left(\frac{1}{m}\nabla S\right) + U\sqrt{\varrho} = -\sqrt{\varrho}\frac{\partial S}{\partial t},$$

которое после деления на $\sqrt{\varrho}$ совпадает с уравнением Гамильтона–Якоби для действия S

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla S)\left(\frac{1}{m}\nabla S\right) + U - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\nabla\frac{1}{m}\nabla\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} = 0. \quad (13.51)$$

Мы видим, что потенциал в данном уравнении помимо классического члена $U(Q)$ содержит квантовую добавку, которая исчезает в пределе $\hbar \rightarrow 0$

$$U_{\text{кв}}(Q) = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\nabla\frac{1}{m}\nabla\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}. \quad (13.52)$$

Мы можем получить из уравнения Гамильтона–Якоби (13.51) уравнения движения в более привычном виде взяв градиент и приравняв $\mathbf{p} = \nabla S$, $\mathbf{v} = \frac{1}{m}\mathbf{p}$ ⁵

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{p}\frac{1}{m}\mathbf{p} + U - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\nabla\frac{1}{m}\nabla\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}\right) &= 0, \\ \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}\frac{1}{m}\mathbf{p}\right) + \nabla\left(U - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\nabla\frac{1}{m}\nabla\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Частную производную по времени (связанную с фиксированной точкой конфигурационного пространства с координатами Q) перепишем через полную производную по времени (связанную с «частицей жидкости»), которую распишем покомпонентно (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование)

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{p} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} = \frac{dp_\alpha}{dt} - v^\beta\nabla_\beta p_\alpha.$$

Также распишем покомпонентно градиент от потенциальной энергии

$$\nabla_\alpha\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}\frac{1}{m}\mathbf{p}\right) = v^\beta\nabla_\alpha p_\beta$$

Комбинируя члены с вида $v^\beta\nabla p$ получаем

$$v^\beta\nabla_\alpha p_\beta - v^\beta\nabla_\beta p_\alpha = v^\beta(\nabla_\alpha p_\beta - \nabla_\beta p_\alpha) = v^\beta(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)S = 0.$$

⁵ Определяемые так импульс и скорость не совпадают с общепринятыми в квантовой механике и должны (с точки зрения стандартной квантовой механики) рассматриваться как неизмеримые и нефизические.

Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \nabla \left(U - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\nabla \frac{1}{m} \nabla \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} \right) = 0.$$

13.6.6. Откуда берётся «квантовый потенциал» (ф*)

Если проследить ход выкладок, приводящих от уравнения Шрёдингера (13.49) к уравнению Гамильтона–Якоби (13.51), то окажется, что член связанный с кинетической энергией $-\frac{\hbar^2}{2} \nabla \frac{1}{m} \nabla \psi$ даёт в результате два члена: кинетическую энергию для «скорости жидкости» $\frac{1}{2} \mathbf{p} \frac{1}{m} \mathbf{p}$ и «квантовый потенциал» (13.52). В гидродинамике это означало бы, что кинетическая энергия атомов жидкости даёт вклад не только в кинетическую энергию макрочастицы жидкости как целого, но и во внутреннюю энергию макрочастицы, за счёт того, что атомы движутся с разными скоростями. Мы можем переходом в движущуюся систему отсчёта (сдвигом по импульсу $\exp(\frac{i}{\hbar} \mathbf{b} \hat{\mathbf{x}})$) обнулить импульс \mathbf{p} в данной точке конфигурационного пространства в данный момент времени, это обнулит кинетическую энергию макрочастицы как целого, но квантовый потенциал (аналог кинетической энергии движения атомов относительно макрочастицы) останется неизменным.

13.7. Интерпретации квантовой механики, основанные на гидродинамической аналогии (фф*)

Гидродинамическая аналогия предлагает альтернативную форму записи уравнения Шрёдингера, похожую на уравнения классической механики. Естественно, что на этом основании возникли альтернативные интерпретации квантовой механики, сближающие её с классической механикой. Эти интерпретации вполне последовательны и дают предсказания, согласующиеся со стандартной квантовой теорией, однако предлагают альтернативный взгляд и допускают такие обобщения, которые не допускает стандартная теория.

Эти интерпретации предполагают, что определяемые в гидродинамической аналогии импульс $\mathbf{p} = \nabla S$ и скорость $\mathbf{v} = \frac{1}{m} \nabla S$ — это и есть «настоящие» («истинные») импульс и скорость. Так позволяет думать уравнение непрерывности, в котором ϱ можно рассматривать как плотность числа некоторых сохраняющихся частиц (каждая из которых имеет вполне определённую траекторию!), а \mathbf{j} — как плотность их потока.

Гидродинамическая аналогия по-разному описывает координаты и импульсы, она правильно воспроизводит вероятности только при измерении величин, выражающихся через координаты системы, поэтому в таких интерпретациях теория измерений предполагает включение в систему измерительного прибора и сведения измерения для наблюдаемых некоммутирующих с координатами к измерению координат соответствующих стрелок (см. 8.2 «Моделирование измерительного прибора*»).

Гидродинамическая аналогия предполагает непрерывность всех используемых координат, поэтому дискретные координаты (такие как проекции спинов элементарных частиц) должны выражаться через некоторые искусственные непрерывные координаты (сведение момента импульса к двум гармоническим осцилляторам см. в разделе 15.2.7 «Лестничные операторы для осциллятора \hat{a}^{\pm} и момента импульса \hat{j}_{\pm}^{**} »).

Гидродинамическая аналогия заменяет линейное уравнение Шрёдингера на нелинейные уравнения. Кроме того, эта аналогия игнорирует симметрию квантовой механики относительно унитарных преобразований, фиксируя одно произвольно выбранное представление (координатное). Уравнения гидродинамической формулировки локальны с точки зрения конфигурационного пространства, но с точки зрения физического трёхмерного пространства они нелокальны. Проверка отсутствия реальной нелокальности (позволяющей передавать и сигналы со сверхсветовой скоростью) в гидродинамической формулировке становится нетривиальной задачей. По этим причинам работать с такой формулировкой квантовой механики не очень удобно. Кроме того, интерпретации, основанные на гидродинамической аналогии, представляются шагом назад, предполагая отказаться от амплитуд вероятности и вернуться к классическим вероятностям, основанным на незнании. Большинство физиков, основываясь на опыте создания квантовой теории и теории относительности скорее готовы отказаться от какого-либо ещё ранее незыблемого постулата физики, чем вернуться к классическим понятиям. По перечисленным причинам интерпретации, приводимые ниже, не пользуются в настоящее время популярностью, но они по-своему интересны и заслуживают ознакомления.

13.7.1. Интерпретация волны-пилота

Интерпретация волны-пилота первоначально была предложена (для ряда частных случаев) Луи де Бройлем в 1920-х годах, после чего была

забыта и вновь разработана на новом уровне Давидом Бомом в 1950-х. Аналогичные идеи выдвигались и рядом других авторов.⁶

Эта интерпретация предполагает сосуществование волновой функции и траектории эволюции системы. Из всех возможных траекторий эволюции системы существует только одна, но мы не можем определить какая именно, а можем определить только плотность вероятности в конфигурационном пространстве. Система движется по этой траектории испытывая действие классических сил $-\nabla U$ и нелокальных квантовых сил $-\nabla U_{\text{КВ}}$.

Квантовые силы определяются волновой функцией системы, которая как бы управляет движением частицы, поэтому для волновой функции вводится термин *волна-пилот*.

Волновая функция в интерпретации волны-пилота выступает как некоторое *нелокальное* физическое поле. При этом допускается возможность, что вид квантового потенциала может быть модифицирован так, чтобы воспроизводить квантовую механику в той области, где она хорошо проверена, но в других случаях допускать иное поведение, в частности, предполагается, что в будущих обобщениях квантовой механики координаты и импульсы окажутся одновременно измеримыми.

13.7.2. Интерпретация многих взаимодействующих миров

После создания многомировой интерпретации неизбежен был новый взгляд на гидродинамическую аналогию. После того, как мы позволили себе думать об одновременном существовании параллельных эвереттовских миров нет оснований выделять из всех возможных траекторий эволюции системы, которые предлагает гидродинамическая аналогия, какую-то одну и объявлять её единственной истинной. Вместо этого можно считать, что все такие траектории в равной степени реальны и описывают различные «классические» параллельные миры.⁷ Квантовая сила при этом рассматривается как взаимодействие различных параллельных миров между собой. При этом отпадает необходимость в волновой функции, как отдельной сущности: волновая функция лишь удобный способ описания ансамбля параллельных миров в целом. В случае общего положения (если области

⁶Основные статьи по этой теме собраны в сборнике переводов под редакцией Я. П. Терлецкого и А. А. Гусева «Вопросы причинности в квантовой механике». М.: Издательство иностранной литературы, 1955.

⁷P. Holland, Computing the wavefunction from trajectories: particle and wave pictures in quantum mechanics and their relation. *Ann. Phys. (Amsterdam)* **315**, 505 (2005). B. Poirier, Bohmian mechanics without pilot waves. *Chem. Phys.* **370**, 4 (2010)

с ненулевым ρ не отделены друг от друга) волновая функция с точностью до общего фазового множителя восстанавливается по полям ρ и \mathbf{j} .

При всём сходстве с многомировой (эвереттовской) интерпретацией имеются и существенные отличия. В эвереттовской интерпретации параллельные миры определяются неоднозначно, поскольку состояние может быть по-разному представлено как суперпозиция, также неоднозначно определяется история каждого мира. В интерпретации многих взаимодействующих миров эти неоднозначности отсутствуют. Эвереттовские миры, как компоненты линейной суперпозиции независимы друг от друга, тогда как взаимодействующие миры влияют друг на друга посредством квантовых сил.

Интерпретация многих параллельных миров наводит на свои обобщения квантовой физики, которые иначе едва ли могли бы возникнуть. Это модификация закона взаимодействия миров друг с другом, а также сокращение непрерывного множества взаимодействующих миров до дискретного, или даже конечного.⁸

13.8. От матрицы плотности к плотности вероятности**

Смешанное состояние системы в классической теории описывается распределением вероятности в $2N$ -мерном фазовом пространстве $\rho(q, p)$, а в квантовой теории — матрицей плотности $\hat{\rho}$. Однако запись матрицы плотности в виде функции

$$\rho(q_1, q_2) = \langle q_1 | \hat{\rho} | q_2 \rangle, \quad \rho(p_1, p_2) = \langle p_1 | \hat{\rho} | p_2 \rangle$$

мало похожа на функцию распределения, т.к. оба аргумента оказываются одного сорта, а, кроме того, функция оказывается, как правило, комплексной.

Квантовый аналог распределения вероятностей называется *функция Вигнера* и определяется с помощью преобразования Фурье координатного представления матрицы плотности по разности аргументов:

$$W(q, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int \rho(q - x/2, q + x/2) e^{\frac{i}{\hbar} p x} d^N x. \quad (13.53)$$

⁸М. J. W. Hall, D.-A. Deckert, H. M. Wiseman, Quantum phenomena modeled by interactions between many classical worlds. Phys. Rev. X **4**, 041013 (2014).

С точностью до нормировочного множителя

$$u(\rho) = \text{const} \cdot \sum_{k=0}^K \frac{\left(-\frac{2\rho}{n}\right)^k}{(2l+2+k)!(K-1-k)!k!}$$

Это полином степени $K = n - l - 1$.

16.4.3. Атом водорода в «старой квантовой механике»*

Каждый школьник знает, что атом Бора — это не атом бора, а атом водорода.

*П. Л. Капица во время посещения Н. Бором Москвы в 1961 г.**

*Цитируется по книге Белонучин В. Е., Заикин Д. А., Ципенюк Ю. М. Основы физики. Курс общей физики: Учебн. В 2 т. Т. 2. Квантовая и статистическая физика / Под ред. Ю. М. Ципенюка. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Интересно, что точный спектр для частицы в кулоновском поле может быть получен из квазиклассических соображений. Впервые это было сделано Бором в 1913 году исходя из того, что на классической круговой орбите должно уместиться целое число волн де Бройля, это условие соответствует условию квантования классического момента импульса при круговом движении: $L = pR = n\hbar$.

Отметим, что при этом использовалась не современная квазиклассика, а *старая квантовая теория*². С современным квазиклассическим приближением такой вывод согласуется не полностью, а при последовательном использовании современной квазиклассики результат уже не совпадёт с точным решением.

Для круговой орбиты радиуса R^3

$$U = -\frac{e^2}{R}, \quad K = \frac{p^2}{2m} = -\frac{U}{2} = \frac{e^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{\frac{e^2 m}{R}},$$

$$p2\pi R = n2\pi\hbar \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n\hbar}{R} = \sqrt{\frac{e^2 m}{R}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R} = \frac{e^2 m}{n^2 \hbar^2} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{2} = -\frac{e^4 m}{2n^2 \hbar^2}.$$

²М. Джеммер. «Эволюция понятий квантовой механики». М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1985. Глава 3. «Старая квантовая теория», стр. 96.

³Для упрощения выкладок мы пользуемся *теоремой вириала* из теоретической механики, которая для финитного движения в кулоновском поле даёт следующее соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергией $K = -\frac{1}{2}U$, т. е. $E = \frac{U}{2}$.

Как мы видим, значение энергии в точности соответствует строгому решению квантовой задачи, однако соответствующий размерный момент импульса

$$L = pR = n\hbar$$

выходит из диапазона $0, \dots, (n-1)\hbar$, который получается в квантовом случае.

В последствии Зоммерфельд обобщил результат Бора на эллиптические орбиты⁴ с $0 < L \leq n\hbar$. $L = 0$ было исключено, чтобы получить соответствующую эксперименту кратность вырождения. Исключение $L = 0$ мотивировалось тем, что электрон в этом случае сталкивался бы с ядром. Тут чувствуется влияние классической интуиции, в классике случай $L = 0$ имеет нулевую вероятность, и его обычно исключают из рассмотрения. На самом деле, как мы знаем, следовало исключить случай $L = n\hbar$, отвечающий боровской круговой орбите, поскольку для круговой орбиты (даже после усреднения по периоду!) оказываются одновременно определены радиальная координата и радиальный импульс.

(*) Может показаться, что для квазиклассических траекторий координата и импульс всегда определены одновременно, но следует помнить, что в стационарном состоянии точно определена энергия, а потому фаза колебания не определена абсолютно, таким образом оценивая неопределённости надо усреднять по периоду и по симметриям (в данном случае по возможным ориентациям орбиты).

В чём было расхождение между выводом Зоммерфельда и современной квазиклассикой? Зоммерфельд исходил из следующих условий квантования, которые не учитывали фазы волновой функции вблизи точек поворота (13.39)

$$\oint p_r dr = 2\pi\hbar(n_r + \delta_r), \quad \oint L d\varphi = 2\pi\hbar(n_\varphi + \delta_\varphi), \quad \delta_r = \delta_\varphi = 0.$$

Это соответствует квазиклассике для интеграла по углу, где налагаются периодические граничные условия, но не соответствуют для интеграла по r , где следовало положить $\delta_r = \frac{1}{2}$. Также Зоммерфельд при вычислении радиального импульса p_r исходил из центробежного потенциала $\frac{L^2}{2mr^2}$, тогда как правильное квантование момента импульса даёт $\frac{L(L+\hbar)}{2mr^2}$.

⁴А. Зоммерфельд, «Строение атома и спектры», том 1, М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. стр. 102, § 7 «Эллиптические орбиты для атома водорода».