

## Заключение по содержанию диссертации

Белов Алексей Яковлевич

(Ф.И.О. члена диссертационного совета)

Буркин Антон Валерьевич

(Ф.И.О. соискателя ученой степени)

диссертация “Задачи о распределении подграфов в случайных графах”,  
представленная на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

(Название диссертации, ученая степень, на которую представлена диссертация, специальность)

Дата защиты 05.12.2019

Оценка соответствия диссертации требованиям Положения о присуждении ученых степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ (далее — Положение):

### 1. Актуальность тематики диссертации:

В диссертации исследуются классические задачи теории случайных графов. В частности, изучается задача о вхождении в случайный граф некоторого фиксированного графа. Этим задачам посвящено множество работ; можно отметить, например, работы П. Эрдеша, Б. Боллобаша, А. Ручински, Т. Лучака, Дж. Спенсера, А. Фриза, М. Кривелевича и др.

Настоящая работа посвящена изучению случайных подграфов дистанционных графов  $G(n, r, s)$ . Эти графы представляют собой центральный объект в задачах дискретной геометрии. В работе рассматриваются два противоположных случая: когда  $r, s$  постоянны и когда  $r, s$  растут линейно с ростом  $n$ . Исследуемые свойства существенно различаются в этих случаях, и доказательства требуют совершенно разных подходов.

### 2. Научная новизна выносимых на защиту результатов:

Все результаты диссертации являются новыми и самостоятельно полученными.

Во введении дается обзор понятий и результатов, касающихся случайных графов в модели Эрдеша–Реньи и дистанционных графов. Также очерчена структура диссертации.

Первая глава посвящена графам  $G(n, r, s)$  с постоянными  $r, s$ . Для случайного подграфа  $G_p(n, r, s)$  (где каждое ребро исходного графа берется с вероятностью  $p$  независимо друг от друга) доказывается теорема о пороговой вероятности содержать фиксированный граф, а также доказано, что распределение числа копий графа, когда вероятность пропорциональна пороговой, сходится к пуассоновскому. Для доказательства этих теорем потребовалось найти асимптотику числа вхождений фиксированного графа в полный дистанционный граф  $G(n, r, s)$  с помощью разложения графа на компоненты двусвязности.

При помощи этих результатов была найдена пороговая вероятность для планарности  $G_p(n, r, s)$ . Интересно это утверждение в контексте случайных подграфов произвольных растущих регулярных графов (число вершин будем обозначать  $N$ , а степень вершины —  $N_1$ ). Несложно доказать, что при  $N_1^4 \ll N$  пороговая вероятность для планарности таких графов может лежать в интервале

$$\left[ \frac{1}{N_1} \left( \frac{N_1^4}{N} \right)^{1/9}, \frac{1}{N_1} \right]$$

Из доказанной теоремы следует, что нижняя граница этой пороговой вероятности достигается на некотором семействе  $G(n, r, s)$  с константными  $r, s$ .

Во второй главе рассматривается случай симметричного дистанционного графа  $G(n, n/2, n/4)$ . Для нахождения асимптотики числа подграфов, изоморфных данному, была применена следующая техника. Вначале была доказана равномерная асимптотика для числа так называемых расширений. Грубо говоря, интересует число способов, которыми можно достроить граф, если мы зафиксировали какие-то две вершины графа в  $G(n, n/2, n/4)$ , причем нам известно скалярное произведение этих вершин. Далее доказательство асимптотики для числа копий проводится сразу для всех графов с помощью индукции по числу ребер.

Также во второй главе доказывается пороговая вероятность для более общих свойств расширений. Эта теорема для классического случая модели Эрдеша–Реньи была получена Дж. Спенсером.

В третьей главе результаты второй главы распространяются на графы  $G(n, \alpha n, \alpha^2 n)$ . В данном случае неочевидно, как “сконцентрированы” вложения фиксированного графа в  $G(n, \alpha n, \alpha^2 n)$ . Доказательство этой “концентрации” потребовало интересной комбинаторной техники.

**3. Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы:**

Диссертация носит теоретический характер. Получены новые результаты в классической задаче теории случайных графов. Кроме того, полученные результаты, касающиеся дистанционных графов, интересны в контексте задач дискретной геометрии.

**4. Полнота опубликования основных результатов диссертации в рецензируемых научных изданиях в соответствии с требованиями Положения:**

Результаты диссертации в полном объеме опубликованы в 4 работах, 3 из которых индексируются международными базами цитирования и одна работа опубликована в журнале из перечня ВАК. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно, включая опубликованные в совместных работах.

**5. Вопросы и замечания (в соответствии с п. 4.13 Положения соискатель отвечает на сформулированные здесь вопросы и замечания на заседании по защите диссертации):**

Отдельные доказательства кажутся несколько громоздкими. Возможно, их можно было бы немного упростить.

**6. Общая характеристика диссертации (не включает резолютивную часть):**

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- Найдена пороговая вероятность для свойства содержать фиксированный граф в случайном дистанционном графе  $G_p(n, r, s)$



с постоянными  $r, s$ . Также доказаны центральная и пуассоновская предельные теоремы для числа копий графа в случае, когда вероятность ребра пропорциональна пороговой.

- Найдена пороговая вероятность для планарности  $G_p(n, r, s)$  с постоянными  $r, s$ .
- Доказана пуассоновская предельная теорема для числа копий фиксированного графа в случайном симметричном дистанционном графе  $G_p(n, n/2, n/4)$ .
- Найдена пороговая вероятность для свойства расширения в  $G_p(n, n/2, n/4)$ .
- Последние 2 пункта обобщены на графы  $G_p(n, \alpha n, \alpha^2 n)$ .

Диссертационная работа является законченным научным исследованием, выполненным на высоком уровне. Результаты диссертации опубликованы в хороших научных журналах и прошли апробацию на ряде научных семинаров и конференций. Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ.

Дата

Подпись

А. Белов

/ Белов Алексей Яковлевич  
/ д.ф.м.н., федеральный проф. математики

ЗАВЕРЯЮ  
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ  
МФТИ  
Ю. И. СКАЛЬКО

