Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Основы общей теории относительности**
по направлению подготовки:
03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
14.04.02 «Ядерные физика и технологии»,
16.04.01 «Техническая физика»
физтех-школа: **для всех физтех-школ, кроме ФЭФМ, ФПМИ**
кафедра: **теоретической физики**
курс: 1 (магистратура)
семестр: 1
Трудоемкость:
теор. курс: вариативная часть – 3 зачет. ед.
лекции – 30 часов
Экзамен – 1 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60
Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.
С. Н. Вергелес

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 мая 2019 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
Ю. М. Белоусов

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ

1. Многообразия. Векторы на многообразии и касательное пространство. Ковекторы и кокасательное пространство. Тензоры и тензорные поля на многообразии.

2. Дифференциальные формы на многообразии. Внешнее умножение дифференциальных форм. Внешний дифференциал дифференциальной формы. Комплекс де Рама. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса. Формулы Гаусса–Остроградского и Грина.

3. Векторные расслоения. Связности на расслоении. Связности, согласованные с метрикой на метризованных расслоениях.

4. Перенесение вектора по бесконечно малому параллелограмму. Тензор кривизны. Тензор кручения. Структурные уравнения Картана. Тождества Бианки.

II. ГЕОМЕТРОДИНАМИКА

5. Вывод уравнения движения частицы в гравитационном поле. Переход к нерелятивистскому пределу.

6. Тензор энергии–импульса материи.

7. Уравнения Эйнштейна.

8. Нерелятивистский предел и закон Ньютона.

9. Псевдотензор энергии–импульса.

10. Слабые гравитационные волны в пустоте.

11. Центрально-симметричное гравитационное поле. Решение Шварцшильда. Гравитационный коллапс сферического тела.

12. Движение в центрально-симметричном гравитационном поле массивных и безмассовых частиц. Смещение перигелия орбиты и искривление луча света, пролетающего мимо звезды.

13. Изотропное пространство. Закрытая изотропная модель. Открытая изотропная модель. Красное смещение.

14. Размышления о проблеме квантования гравитации.

Литература

1. *Постников М.М.* Гладкие многообразия. – Москва : Наука, 1987.

2. *Постников М.М.* Дифференциальная геометрия. – Москва : Наука, 1988.

3. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. – Москва : Наука, 1979.

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – Москва : Физматлит, 2006.

5. *Дирак П.А.М.* Общая теория относительности. – Москва : Атомиздат, 1978.

6. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. – Москва : Мир, 1975.

7*. *Дирак П.А.М.* Лекции по квантовой механике. – Москва : Мир, 1968.

З А Д А Н И Е

1. Пусть X, Y, Z — векторные поля. Определим коммутатор двух векторных полей $[X, Y] = -[Y, X]$ как набор следующих компонент:
$$[X, Y] = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} Y^i - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} X^i \,.$$

   а) Доказать, что коммутатор двух векторных полей есть вектор, т.е. набор n указанных компонент преобразуется как набор компонент вектора при общих преобразованиях координат.

   б) Доказать тождество Якоби:
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \equiv 0 \,.$$

2. Доказать равенство $dd\omega = 0$ для любой дифференциальной формы.

3. Пусть $\mathcal{X}$ – пространство R^2, из которого удалено начало координат. Показать, что 1-форма

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

замкнута, т.е. $d\omega = 0$, но не точна, т.е. $\omega \neq df$ ни для какой функции f на $\mathcal{X}$.

4. **а)** Пусть $\mathcal{X}$ – пространство R^3 с координатами x, y, z, $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ – произвольная 2-форма в R^3 и область $D \subset R^3$ имеет регулярную границу. Используя теорему Стокса, доказать формулу Гаусса–Остроградского:

$$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV =$$

$$= \iint_{\partial D} (\, P\, n_x + Q\, n_y + R\, n_z \,)\, dS.$$

Здесь dV и dS – элементы объема пространства R^3 и площади поверхности $S = \partial D$ соответственно, а $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z\,)$ – единичная нормаль к поверхности S, направленная во внешность D.

б) Пусть $D \subset R^2$ – область с регулярной границей ∂D и $\omega = P\,dx + Q\,dy$ – произвольная 1-форма в R^2. Доказать при помощи теоремы Стокса формулу Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial D} (\, P\,dx + Q\,dy\,).$$

в) Получить формулу Стокса в трехмерном пространстве из общей теоремы Стокса.

5. Определим сферу S^2 в пространстве R^3 с координатами x, y, z уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Пусть метрика на сфере S^2 индуцирована евклидовой метрикой $dS_E^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ пространства R^3. Найти на S^2 связность без кручения, согласованную с этой метрикой, и ее тензор кривизны.

6. Вычислить

$$[\,\nabla_\mu,\, \nabla_\nu\,]\, X^\lambda \equiv (\,\nabla_\mu\, \nabla_\nu - \nabla_\nu\, \nabla_\mu\,)\, X^\lambda\,,$$

где X^λ – компоненты контравариантного векторного поля и ∇_μ – оператор контравариантного дифференцирования.

7. Вывести формулу

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_\mu(\sqrt{|g|}\,J^\mu)$$

при отсутствии кручения.

8. а) Вывести уравнение движения частицы в гравитационном поле из принципа наименьшего действия

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \qquad ds = \sqrt{g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu}.$$

б) Получить из вариационного принципа уравнение движения безмассовой частицы

$$\delta S = -\frac{1}{2}\,\delta \int dt\,\frac{1}{e\tau}\,g_{\mu\nu}(x)\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}\,,$$

где $e(\tau)$ и $x^\mu(\tau)$ – независимые переменные.

9. На поверхности планеты (без атмосферы) стоит зенитная пушка, которая выстреливает часы вертикально вверх. В момент вылета из ствола часы синхронизируются с другими такими же часами, которые прикреплены к пушке. Через некоторое время часы, вылетевшие из ствола пушки, под действием силы тяжести падают рядом со вторыми часами. Какие часы отстанут в момент падения первых часов?

10. Исходя из правил пересчета компонент тензора

$$g'_{\mu\nu}(y) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y_\mu}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}\,g_{\sigma\rho}(x)$$

при общекоординатных преобразованиях $y^\mu(x) = f^\mu\,(\,x^1,\,\ldots,\,x^\nu\,)$ показать, что при бесконечно малых преобразованиях $y^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x), \xi^\mu \longrightarrow 0$ имеет место формула

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x),$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu + \xi^\lambda\,(\,T_{\nu,\lambda\mu} + T_{\mu,\lambda\nu}\,).$$

Здесь $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор и $T_{\nu,\lambda\mu} = e_{a\nu}T^a_{\lambda\mu}$ – тензор кручения.

11. Исходя из структурных уравнений Картана получить тождества Бианки для тензоров кривизны и кручения.
Указание: вычислить внешний дифференциал от структурных уравнений Картана.

12. Используя тождество Бианки, доказать, что в отсутствие кручения имеет место тождество

$$\nabla_\nu \left(R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\, \delta^\nu_\mu R \right) = 0.$$

Здесь R^ν_μ – тензор Риччи, R – скалярная кривизна пространства и ∇_μ – оператор ковариантного дифференцирования.

13. При помощи метода Гамильтона–Якоби изучить движение частицы в центрально-симметричном гравитационном поле:

а) Найти угловое смещение перигелия орбиты спутника Солнца за один оборот.

б) Вычислить угловое отклонение светового луча, пролетающего мимо Солнца.

14. Найти метрику для заряженной центрально-симметричной звезды (чёрной дыры) в области пространства, в которой имеются лишь гравитационное и электромагнитное поля.

15. Оценить уносимую гравитационными волнами энергию системы, состоящей из двух звезд, вращающихся друг вокруг друга.

16. В четырёхмерном пространстве-времени (размерность 3+1) для каждого значения импульса имеется два независимых фотона (спиральности ± 1) и два независимых гравитона (спиральности ± 2). Сколько имеется фотонов в пространствах размерности $(2+1)$ и $(1+1)$? То же самое для гравитонов.

17. Доказать, что в замкнутом пространстве полный электрический заряд равен нулю.

18*. Определим в пятимерном пространстве Минковского с координатами $z_0, \ldots, z_4$ и метрикой

$$d\,s^2 = d\,z_0^2 - d\,z_1^2 - d\,z_2^2 - d\,z_3^2 - d\,z_4^2$$

гиперповерхность при помощи уравнения

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -H^{-2}, \quad H = \text{const}\,.$$

Эта гиперповерхность называется пространством де Ситтера. Пусть метрика в пространстве де Ситтера индуцируется метрикой в пространстве Минковского, в которое оно вложено. Найти тензор кривизны Римана в пространстве де Ситтера. Каким должен быть тензор энергии-импульса материи, чтобы метрика пространства де Ситтера удовлетворяла уравнению Эйнштейна?

Срок сдачи задания: 02.12 – 07.12. 2019 г.

Подписано в печать 25.06.2019. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 60 экз. Заказ № 211.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru