

# Олимпиада по теоретической физике

суббота 17 мая 2014 г.

## 1 Когерентное состояние спина (А.Л. Барабанов)

Пусть  $\Omega$  — это множество всех состояний частицы со спином  $s = 1/2$ , в которых  $\langle s_x \rangle = \alpha/2$ , где  $0 < \alpha < 1$ . Найдите спиноры  $\psi$  (нормированные на единицу) всех состояний из множества  $\Omega$ , в которых произведение дисперсий  $\langle (\Delta s_y)^2 \rangle$  и  $\langle (\Delta s_z)^2 \rangle$  принимает наименьшее возможное значение.

**Ответ:**

В множестве  $\Omega$  имеются четыре состояния, в которых произведение  $\langle (\Delta s_y)^2 \rangle$  и  $\langle (\Delta s_z)^2 \rangle$  принимает наименьшее возможное значение:

$$\langle (\Delta s_y)^2 \rangle \langle (\Delta s_z)^2 \rangle = \frac{\langle s_x \rangle^2}{4}.$$

Соответствующие спиноры имеют вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}} \\ \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \alpha^2}} \end{pmatrix}, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2} \end{pmatrix}.$$

Если параметризовать условия задачи следующим образом  $\alpha = \cos \theta$ , то можно записать все четыре решения единообразно:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + i^n \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} - i^n \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

**Решение задачи:**

Известно, что из коммутационного соотношения для эрмитовых операторов

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{K}$$

следует соотношение неопределённости

$$\langle (\Delta F)^2 \rangle \langle (\Delta G)^2 \rangle \geq \frac{\langle K \rangle^2}{4}.$$

При этом состояние  $\psi$ , в котором произведение дисперсий принимает наименьшее возможное значение, определяется уравнением

$$\left( \frac{\langle K \rangle}{2\langle (\Delta F)^2 \rangle} (\hat{F} - \langle F \rangle) + i (\hat{G} - \langle G \rangle) \right) \psi = 0.$$

Такие состояния  $\psi$  иногда называют «когерентными».

Таким образом, из коммутационного соотношения

$$[\hat{s}_y, \hat{s}_z] = i\hat{s}_x$$

следует соотношение неопределённости

$$\langle (\Delta s_y)^2 \rangle \langle (\Delta s_z)^2 \rangle \geq \frac{\langle s_x \rangle^2}{4}.$$

При этом «когерентное» состояние, в котором произведение дисперсий принимает наименьшее возможное значение, определяется уравнением

$$\left( \frac{\langle s_x \rangle}{2\langle (\Delta s_y)^2 \rangle} (\hat{s}_y - \langle s_y \rangle) + i(\hat{s}_z - \langle s_z \rangle) \right) \psi = 0$$

или

$$\left( \frac{\alpha}{4\langle (\Delta s_y)^2 \rangle} \sigma_y + i\sigma_z \right) \psi = \left( \frac{\alpha}{4\langle (\Delta s_y)^2 \rangle} P_y + iP_z \right) \psi.$$

Здесь мы воспользовались определением вектора поляризации

$$\vec{P} = 2\langle \vec{s} \rangle, \quad \vec{P}^2 = 1,$$

а также тем, что по условию задачи  $P_x = \alpha$ .

Выписанное уравнение для  $\psi$  может быть решено, но это очень нудный способ решения задачи. Значительно более простой способ заключается в следующем.

Заметим, что для дисперсии  $\langle (\Delta s_y)^2 \rangle$  справедливо

$$\langle (\Delta s_y)^2 \rangle = \langle s_y^2 \rangle - \langle s_y \rangle^2 = \frac{1}{4} (1 - P_y^2),$$

и аналогичное соотношение имеется для  $\langle (\Delta s_z)^2 \rangle$ . Поэтому искомое произведение дисперсий принимает вид

$$\begin{aligned} \langle (\Delta s_y)^2 \rangle \langle (\Delta s_z)^2 \rangle &= \frac{1}{16} (1 - P_y^2) (1 - P_z^2) = \frac{1}{16} (1 - P_y^2 - P_z^2 + P_y^2 P_z^2) = \\ &= \frac{1}{16} (P_x^2 + P_y^2 P_z^2) = \frac{1}{4} (\langle s_x \rangle^2 + 4\langle s_y \rangle^2 \langle s_z \rangle^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\langle (\Delta s_y)^2 \rangle \langle (\Delta s_z)^2 \rangle = \frac{\langle s_x \rangle^2}{4},$$

лишь если  $\langle s_y \rangle = 0$  или  $\langle s_z \rangle = 0$ .

Пусть  $\langle s_y \rangle = 0$ . Тогда вектор поляризации  $\vec{P}$  лежит в плоскости  $(x, z)$  и имеет составляющие

$$\vec{P} = (\alpha, 0, \pm\sqrt{1 - \alpha^2}).$$

Другими словами, направление единичного вектора  $\vec{P}$  определяется азимутальным углом  $\varphi = 0$  и полярным углом  $\theta$  таким, что

$$\sin \theta = P_x = \alpha, \quad \cos \theta = P_z = \pm\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Но в общем случае вектору  $\vec{P}$ , направление которого определяется углами  $\varphi$  и  $\theta$ , соответствует спинор

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

В данном случае из системы

$$\begin{cases} \cos^2(\theta/2) - \sin^2 \theta/2 = P_z, \\ \cos^2(\theta/2) + \sin^2 \theta/2 = 1, \end{cases}$$

легко находим

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{1+P_z}{2}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1-P_z}{2}}.$$

Таким образом, в случае  $\langle s_y \rangle = 0$  искомые спиноры «когерентных» состояний имеют вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}} \\ \sqrt{1 \mp \sqrt{1-\alpha^2}} \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь  $\langle s_z \rangle = 0$ . Тогда вектор поляризации  $\vec{P}$  лежит в плоскости  $(x, y)$  и имеет составляющие

$$\vec{P} = (\alpha, \pm\sqrt{1-\alpha^2}, 0).$$

Другими словами, направление единичного вектора  $\vec{P}$  определяется полярным углом  $\theta = \pi/2$  и азимутальным углом  $\varphi$  таким, что

$$\cos \varphi = P_x = \alpha, \quad \sin \varphi = P_y = \pm\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Таким образом, в случае  $\langle s_z \rangle = 0$  искомые спиноры «когерентных» состояний имеют вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

### Замечание 1:

Строго говоря, область изменения  $\alpha$  можно расширить, включив в неё точки  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ . При  $\alpha = 0$  ответы (и приведенное решение) верны; но если решать через уравнение для «когерентного» состояния, то случай  $\alpha = 0$  требует, очевидно, отдельного анализа. И это уже лишнее усложнение. А в случае  $\alpha = 1$  все четыре ответа «сливаются» в один — в единственно возможный и поэтому очевидный спинор; поэтому этот случай неинтересен.

### Замечание 2:

Если задать  $\langle s_y \rangle$ , то ответы будут чуть-чуть более сложными (будет больше мнимых единиц). А если задать  $\langle s_z \rangle$ , то, наоборот, задача станет значительно более простой (см. следующее Замечание 3). Поэтому фиксация  $\langle s_x \rangle$  представляется оптимальной. Но если вдруг нужны 2 варианта, то нужно брать состояния с определённой проекцией  $\langle s_y \rangle$ .

### Замечание 3:

Если задана проекция  $\langle s_z \rangle = P_z/2$ , где  $P_z = \cos \theta$  при стандартном выборе спинора

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

то произведение дисперсий  $\langle(\Delta s_x)^2\rangle$  и  $\langle(\Delta s_y)^2\rangle$  легко выражается через единственный неопределённый в данном случае азимутальный угол  $\varphi$ ,

$$\langle(\Delta s_x)^2\rangle\langle(\Delta s_y)^2\rangle = \frac{1}{16} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) = \frac{1}{16} (1 - \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi).$$

Отсюда ясно, что произведение дисперсий достигает наименьшего возможного значения  $\langle s_z \rangle^2/4 = \cos^2 \theta/16$ , только если  $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . В этом смысле задача получается простой.

Ясно, однако, что при заданных  $\langle s_x \rangle$  или  $\langle s_y \rangle$  всегда можно догадаться рассмотреть сначала случай фиксированного  $\langle s_z \rangle$ . И далее, поняв, что происходит, вернуться к исходной задаче. И это будет вполне законным «олимпиадным» решением.

#### Замечание 4:

Воспроизведём для полноты решение, основанное на уравнении для спинора «когерентного» состояния,

$$(\lambda \sigma_y + i \sigma_z) \psi = (\lambda P_y + i P_z) \psi, \quad \lambda \equiv \frac{\alpha}{4\langle(\Delta s_y)^2\rangle}.$$

Здесь

$$\lambda \sigma_y + i \sigma_z = \begin{pmatrix} i & -i\lambda \\ i\lambda & -i \end{pmatrix}.$$

Условие разрешимости уравнение выглядит так:

$$\begin{vmatrix} i - (\lambda P_y + i P_z) & -i\lambda \\ i\lambda & -i - (\lambda P_y + i P_z) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + (\lambda P_y + i P_z)^2 - \lambda^2 = 0$$

или

$$\begin{cases} P_y P_z = 0, \\ 1 - P_z^2 = \lambda^2(1 - P_y^2). \end{cases} \quad (*)$$

Из первого уравнения этой системы следует, что  $P_y = 0$  или  $P_z = 0$ .

Пусть  $P_y = 0$ . Тогда

$$\langle(\Delta s_y)^2\rangle = \frac{1}{4},$$

и из определения параметра  $\lambda$  следует, что  $\lambda = \alpha$  (и это согласуется со вторым уравнением системы (\*)). Уравнение для спинора принимает вид

$$(\alpha \sigma_y + i \sigma_z) \psi = i P_z \psi, \quad P_z = \pm \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

При  $\alpha = 1$  это уравнение,

$$\sigma_+ \psi = 0, \quad \sigma_+ \equiv \sigma_y + i \sigma_z,$$

по форме аналогично уравнению для «когерентного» основного состояния осциллятора (в литературе подобные спиновые состояния для произвольного спина  $s$ , в самом деле, называют «когерентными»).

Если же  $P_z = 0$ , то

$$\langle(\Delta s_y)^2\rangle = \frac{1}{4} (1 - P_y^2) = \frac{\alpha^2}{4}.$$

Тогда из определения параметра  $\lambda$  следует, что  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$  (и это согласуется со вторым уравнением системы (\*)). Уравнение для спинора принимает вид

$$\left(\frac{1}{\alpha}\sigma_y + i\sigma_z\right)\psi = \frac{P_y}{\alpha}\psi, \quad P_y = \pm\sqrt{1-\alpha^2}.$$

В данном случае его удобно переписать так:

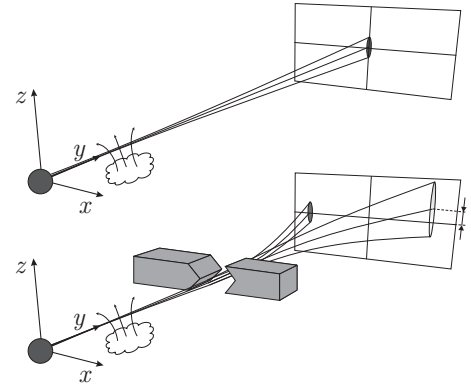
$$(-\alpha\sigma_z + i\sigma_y)\psi = iP_y\psi, \quad P_y = \pm\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Видно, что это уравнение тоже радикально упрощается при  $\alpha = 1$ .

Решая выписанные (уже несложные) уравнения для  $\psi$ , можно получить искомые спиноры.

## 2 Измерение слабых полей (С.Н. Филиппов)

Селективные квантовые измерения позволяют многократно повысить чувствительность приборов. Предположим, необходимо измерить неоднородность магнитного поля  $b_z = \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z}$  вблизи некоторого объекта. Пролетая через эту неоднородность, пучок частиц со спином  $s = \frac{1}{2}$  и магнитным моментом  $\mu$  должен “расщепиться” так же, как в эксперименте Штерна-Герлаха. В случае слабой неоднородности  $b_z$  приобретаемая добавка к импульсу оказывается много меньше первоначального разброса по импульсу  $\sqrt{\langle p_z^2 \rangle}$ , и измерить расщепление экспериментально не удаётся (даже для достаточно медленных частиц и больших расстояниях до экрана). Однако, если на пути пучка после пролёта области неоднородности поставить “истинный” прибор Штерна-Герлаха, ориентированный в перпендикулярном направлении (с большим значением  $b_x = \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x}$ ), то для одного из отклонённых пучков можно наблюдать существенное увеличение среднего значения проекции импульса на направление  $z$ , измеряя которое легко определить  $b_z$  (см. рис.). Рассчитайте нерелятивистскую динамику произвольного импульсно-спинового состояния  $\psi(p_x, p_z)(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)$  при распространении пучка до экрана и найдите увеличение разрешающей способности (отношение отклонений центров пучков во втором и первом случаях), если  $\psi(p_x, p_z)$  – гауссовский волновой пакет и  $\alpha/\beta = -1.1$ . Покажите, что увеличение разрешающей способности достигается за счёт уменьшения интенсивности.



### Решение задачи:

Распространение пакета вдоль оси  $y$  происходит с постоянной скоростью и отвечает ходу времени. Гамильтониан взаимодействия со слабым магнитным полем  $\hat{H} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathcal{H}_z =$

$-2\mu b_z \hat{s}_z \hat{z}$ , эволюция за время  $t_z$  действия неоднородности поля принимает вид

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i\hat{H}t_z}{\hbar}\right)|\Psi_0\rangle &= \exp\left(\frac{i2\mu b_z t_z \hat{s}_z \hat{z}}{\hbar}\right)\psi(p_x, p_z)(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) = \\ &= \alpha|\uparrow\rangle \exp\left(\frac{i\mu b_z t_z \hat{z}}{\hbar}\right)\psi(p_x, p_z) + \beta|\downarrow\rangle \exp\left(\frac{-i\mu b_z t_z \hat{z}}{\hbar}\right)\psi(p_x, p_z) = \\ &= \alpha|\uparrow\rangle \exp\left(-\mu b_z t_z \frac{\partial}{\partial p_z}\right)\psi(p_x, p_z) + \beta|\downarrow\rangle \exp\left(\mu b_z t_z \frac{\partial}{\partial p_z}\right)\psi(p_x, p_z) = \\ &= \alpha|\uparrow\rangle\psi(p_x, p_z - \mu b_z t_z) + \beta|\downarrow\rangle\psi(p_x, p_z + \mu b_z t_z). \end{aligned}$$

В первом случае отклонение центра пучка вдоль оси  $z$  не может превосходить  $\mu b_z t_z \ll \sqrt{\langle p_z^2 \rangle}$ . Поскольку состояния  $|\pm\rangle = \frac{|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$  являются собственными для  $\hat{s}_x$ , то во втором случае получаем следующую волновую функцию:

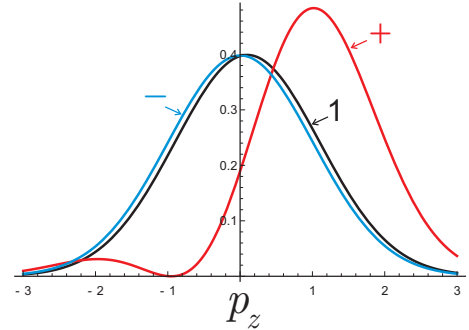
$$\begin{aligned} &\frac{|+\rangle}{\sqrt{2}} [\alpha\psi(p_x - \mu b_x t_x, p_z - \mu b_z t_z) + \beta\psi(p_x - \mu b_x t_x, p_z + \mu b_z t_z)] + \\ &+ \frac{|-\rangle}{\sqrt{2}} [\alpha\psi(p_x + \mu b_x t_x, p_z - \mu b_z t_z) - \beta\psi(p_x + \mu b_x t_x, p_z + \mu b_z t_z)], \end{aligned}$$

из которой находим плотность вероятности распределения проекции импульса на ось  $z$  для “+” пучка:

$$w(p_z) = \mathcal{N} \left\{ |\alpha|^2 \exp\left[-\frac{(p_z - \mu b_z t_z)^2}{2\langle p_z^2 \rangle}\right] + (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta) \exp\left[-\frac{p_z^2 + (\mu b_z t_z)^2}{2\langle p_z^2 \rangle}\right] + |\beta|^2 \exp\left[-\frac{(p_z + \mu b_z t_z)^2}{2\langle p_z^2 \rangle}\right] \right\},$$

где  $\mathcal{N}^{-1} = \sqrt{2\pi\langle p_z^2 \rangle} [|\alpha|^2 + |\beta|^2 + (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta) \exp(-(\mu b_z t_z)^2/2\langle p_z^2 \rangle)]$  показывает интенсивность пучка.

На рис. представлены нормированные плотности вероятности обнаружить  $p_z$  для пучка в первом случае ( $\mathbf{s} \parallel z$ , нет селекции), а также пучков “+” и “-” во втором случае ( $\mu b_z t_z = 0.1$ ,  $\sqrt{\langle p_z^2 \rangle} = 1$ ,  $\alpha/\beta = -1.1$ ; пучки “+” и “-” суть результаты деструктивной и конструктивной интерференции сдвинутых по  $z$  волновых пакетов). С учётом  $\mu b_z t_z \ll \sqrt{\langle p_z^2 \rangle}$  среднее отклонение  $\int p_z w(p_z) dp_z = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{|\alpha + \beta|^2} \mu b_z t_z$ , коэффициент “усиления” разрешающей способности равен  $\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{|\alpha + \beta|^2} = 21$ . Однако, интенсивность “+” пучка в  $\left|\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right|^2 \approx 400$  раз меньше, чем “-” пучка.



### 3 Мю-нуклонный водород (Ю.М. Белоусов)

Отрицательный мюон, попадая в среду, захватывается в связанное состояние с ядром, образуя «мюонный изотоп» с эффективным зарядом  $Z - 1$ . Определите энергию ионизации мюонного водорода  $\mu\text{H}$ , образовавшегося в результате такого захвата в  ${}^4\text{He}$ . Каково отличие от энергии ионизации обычного водорода  ${}^1\text{H}$ ? Масса мюона  $m_\mu \approx 207m_e$ . Считать, что мюон находится в  $1s$ -состоянии.

#### Решение задачи:

Основное состояние системы, состоящей из мюона и альфа-частицы, в системе центра инерции задаётся волновой функцией  $\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi b^3}} e^{-r/b}$ , где  $b = \frac{\hbar^2}{2m_\mu^* e^2}$ ,  $m_\mu^* = \frac{m_\mu m_\alpha}{m_\mu + m_\alpha}$ ,

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\alpha$ . Характерная частота такой системы в  $\frac{Z^2 m_\mu}{m_e} \approx 800$  раз превышает атомную, поэтому электрон в  $\mu\text{H}$  будет по кулоновскому закону взаимодействовать со средней плотностью заряда  $\rho(\mathbf{r}') = 2ew_\alpha(\mathbf{r}') + (-e)w_\mu(\mathbf{r}')$ , где  $w_\alpha(\mathbf{r}_\alpha) = \left| \psi\left(-\frac{m_\alpha+m_\mu}{m_\mu} \mathbf{r}_\alpha\right) \right|^2 = \frac{1}{\pi b^3} \exp\left[-2\frac{m_\alpha+m_\mu}{m_\mu} \frac{r_\alpha}{b}\right]$  – плотность вероятности различных положений альфа-частицы в пространстве,  $w_\mu(\mathbf{r}_\mu) = \left| \psi\left(\frac{m_\alpha+m_\mu}{m_\alpha} \mathbf{r}_\mu\right) \right|^2 = \frac{1}{\pi b^3} \exp\left[-2\frac{m_\alpha+m_\mu}{m_\alpha} \frac{r_\mu}{b}\right]$  – плотность вероятности различных положений мюона в пространстве. Поскольку  $\frac{m_\mu}{m_\alpha} \approx \frac{1}{35}$ , то распределение заряда альфа-частицы можно считать точечным по сравнению с мюонным распределением заряда:

$$\rho(\mathbf{r}') \approx 2e\delta(\mathbf{r}') - \frac{e}{\pi b^3} e^{-2r'/b}. \quad (1)$$

Решая уравнение Пуассона  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ , находим потенциал, создаваемый “ядром” мюонного изотопа:

$$\varphi(\mathbf{r}') = \frac{e}{r'} + e\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{r'}\right) e^{-2r'/b}. \quad (2)$$

Гамильтониан электрона в поле мюонного изотопа  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ , где  $\hat{H}_0$  – гамильтониан атома водорода,  $V(\mathbf{r}') = -e^2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{r'}\right) e^{-2r'/b}$ . Основное состояние в атоме водорода  $\psi_e(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r'/a}$ , где  $a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ . Поправка к энергии основного состояния  $\delta E = \langle \psi_e | \hat{V} | \psi_e \rangle = -\frac{e^2 b^2 (2a+b)}{a(a+b)^3} \approx -\frac{e^2 2b^2}{a^2} = -\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = -0.32 \cdot 10^{-3}$  эВ.

Изотопический сдвиг  $\delta E_M = E_{\mu\text{H}} - E_{\text{H}} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{m_e(m_\alpha - m_p)}{m_\alpha m_p} = -5.56 \cdot 10^{-3}$  эВ.

Релятивистские поправки  $\delta E_r = -\frac{\alpha^2 m_e e^4}{4 \cdot 2\hbar^2} = -0.18 \cdot 10^{-3}$  эВ.

## 4 Белый карлик. Предел Чандрасекара (А.А. Пухов)

На финальной стадии эволюции, когда термоядерное “топливо” звезды уже выгорело, она превращается в белый карлик, состоящий из релятивистского вырожденного газа электронов и  $\alpha$ -частиц. Из-за огромной разницы масс давление создают электроны, а гравитационное сжатие –  $\alpha$ -частицы. Найдите (оцените) связь между равновесными радиусом  $R$  и массой  $M$  звезды. Найдите предельную массу звезды  $M_{ch}$ , сравните её с массой Солнца  $M_\odot \approx 10^{33}$  г.

### Решение задачи:

Запишем выражение для полного числа электронов  $N$  при  $T = 0$

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp$$

и получим выражение для импульса Ферми  $p_F = \hbar(3\pi^2 N/V)^{1/3}$ . Запишем выражение для полной энергии  $E$  идеально релятивистского электронного газа при  $T = 0$

$$E = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi \sqrt{c^2 p^2 + (m_e c^2)^2} p^2 dp.$$

Разложив подинтегральную функцию по степеням  $m_e c/p \ll 1$ , вычислим  $E$ , удерживая два первых члена разложения. При  $x_F = p_F/m_e c \gg 1$ , получим:

$$\frac{E}{N} \approx \frac{3}{4} m_e c^2 x_F [1 + x_F^{-2}].$$

Выразим давление газа  $P = -(\partial E/\partial V)_N$

$$P \approx \frac{m_e^4 c^5 N}{12\pi^2 \hbar^3} x_F^4 [1 - x_F^{-2}].$$

через массу  $M$  и радиус  $R$  белого карлика, считая, что на каждые два электрона приходится одна  $\alpha$ -частица,  $m_e \ll m_\alpha$ . От  $N$  и  $V$  перейдем к  $M$  и  $R$ :  $N = 2M/m_\alpha$ .  $V = 4\pi R^3/3$ . Тогда

$$x_F = \frac{\hbar}{m_e c} \left( \frac{9\pi}{2m_\alpha} \right)^{1/3} \frac{M^{1/3}}{R},$$

и давление электронного газа в рассматриваемом пределе есть

$$P = \frac{c\hbar}{12\pi^2} \left( \frac{9\pi}{2m_\alpha} \right)^{4/3} \frac{M^{4/3}}{R^4} \left[ 1 - \left( \frac{m_e c}{\hbar} \right)^2 \left( \frac{2m_\alpha}{9\pi} \right)^{2/3} \frac{R^2}{M^{2/3}} \right].$$

Положим для оценки, что гравитационное давление внутри звезды равно по порядку величины  $\approx GM^2/R^4$ . Приравняв его давлению  $P$ , получим зависимость радиуса белого карлика от его массы  $R(M)$  в условиях, когда вырожденный электронный газ ультрарелятивистский (при  $R \rightarrow 0$ ). Для нахождения этой зависимости в обратном предельном случае (при  $R \rightarrow \infty$ ) необходимо проделать те же выкладки для нерелятивистского газа  $x_F \ll 1$ . Итак

$$R = \frac{\hbar^2}{9\pi^2 G m_e} \left( \frac{9\pi}{2m_\alpha} \right)^{1/3} M^{1/3} \left[ 1 - \frac{12\pi^2 G}{c\hbar} \left( \frac{2m_\alpha}{9\pi} \right)^{4/3} M^{2/3} \right]^{1/2}.$$

Таким образом, с ростом  $M$  радиус звезды  $R$  убывает и обращается в ноль при значении массы

$$M_{ch} = \left( \frac{c\hbar}{12\pi^2 G} \right)^{3/2} \left( \frac{9\pi}{2m_\alpha} \right)^2.$$

Величина предела Чандрасекара  $M_{ch}$  ( $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{м}^3 \text{кг}^{-1} \text{с}^{-2}$ ,  $m_p \approx 1,6 \cdot 10^{-27} \text{кг}$ ,  $h \approx 10^{-27} \text{эрг} \cdot \text{с}$ )

$$M_{ch} = \left( \frac{c\hbar}{12\pi^2 G} \right)^{3/2} \left( \frac{9\pi}{2m_\alpha} \right)^2 \sim 10^{33} \text{г}$$

оказывается одного порядка с массой Солнца  $M_\odot \approx 10^{33} \text{г}$ .