

Заключение по содержанию диссертации

Шабанов Дмитрий Александрович
(Ф.И.О. члена диссертационного совета)

Пушняков Филипп Анатольевич
(Ф.И.О. соискателя ученой степени)

диссертация “О числе рёбер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов”,
представленная на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

(Название диссертации, ученая степень, на которую представлена диссертация, специальность)

Дата защиты 28.08.2020

Оценка соответствия диссертации требованиям Положения о присуждении ученых степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ (далее - Положение):

1. Актуальность тематики диссертации:

Представленная работа является исследованием в области теории графов. Одним из первых классических результатов теории графов является знаменитая теорема Турана 1941 года о минимально возможном числе ребер в графе на n вершинах с заданным числом независимости. Первый результат в этой области восходит вообще к теореме Мантеля 1909 года.

В диссертации Ф.А. Пушнякова рассматривается вопрос о минимально возможном числе ребер в индуцированных подграфах графов Джонсона $G(n, r, s)$ с заданным числом вершин. Граф $G(n, r, s)$ строится как граф s -пересечений для полного r -однородного гиперграфа на n вершинах, т.е. вершины — это ребра гиперграфа, и две вершины соединяются ребром тогда и только тогда, когда соответствующие ребра гиперграфа имеют ровно s общих вершин. Такие графы являются классическим объектом изучения экстремальной комбинаторики, их активное исследование началось с теоремы Эрдеша–Ко–Радо (1961) и продолжается до сих пор. В научной школе А.М. Райгородского написаны сотни работ по исследованию подобных графов.

Направление же, связанное с теоремой Турана, активно развивается в направлении, связанном с изучением чисел Рамсея. Начиная примерно с 1980-81 годов многие авторы получали результаты о минимально возможном числе ребер в графах на n вершинах с заданными числом независимости и обхватом. Здесь стоит выделить имена М. Айтаи, Я. Комлоша, Е. Семереди, Дж. Ширера, Дж. Кима и многих других. В последние 15 лет очень активно идут исследования по изучению Triangle free process, цель которого — найти минимально возможное число независимости в графе без треугольников на n вершинах.

Тем самым, можно смело утверждать, что тема представленной диссертационной работы относится к фундаментальному направлению в теории графов, находится в тренде мировых исследований, а ее актуальность не вызывает сомнений.

2. Научная новизна выносимых на защиту результатов:

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых в общей сложности на 15 параграфов, заключения и списка литературы.

Во введении даются необходимые определения, обсуждается актуальность темы диссертации, приводятся краткий обзор литературы и общая характеристика работы.

Первая глава диссертации состоит всего из 3 страниц, в ней обсуждаются постановка задачи и некоторые известные ранее результаты.

Во второй главе изучается минимально возможное количество ребер в индуцированных подграфах графа $G(n, 3, 1)$. Рассматривается величина $r(\ell, G)$, равная минимально возможному количеству ребер в индуцированном ℓ -вершинном подграфе графа G . Автором получен ряд результатов, представляющих собой асимптотические оценки величины $r(\ell, G(n, 3, 1))$ для разных функций $\ell = \ell(n)$. Оценки получены как функции от ℓ и $\alpha_n = n - O(1)$ — числа независимости графа $G(n, 3, 1)$. В теореме 4 показано, что при $\ell = O(n^2)$ и $\ell = \omega(n)$ выполнено

$$r(\ell, G(n, 3, 1)) \sim \frac{\ell^2}{2n}.$$

Это соответствует классической оценке в теореме Турана для общего случая. В теореме 5 показано, что при $\ell = o(n^3)$ и $\ell = \omega(n^2)$ выполнено

$$\frac{\ell^2}{n}(1 + o(1)) \leq r(\ell, G(n, 3, 1)) \leq \frac{5\ell^2}{n}(1 + o(1)).$$

Теорема 6 улучшает нижнюю оценку для $\ell = \omega(n^2)$

$$r(\ell, G(n, 3, 1)) \geq \frac{3\ell^2}{n}(1 + o(1)).$$

В теореме 7 рассматривается наиболее интересный случай, когда $\ell = \Theta(n^3)$. Здесь получены нижние оценки как функции от $c_n = 1 - \frac{\ell}{\binom{n}{3}}$. Наконец, в теореме 8 доказано, что при $\ell = \omega(n)$ выполнено

$$r(\ell, G(n, 3, 1)) \leq \frac{9\ell^2}{n}(1 + o(1)).$$

В третьей главе изучаются аналогичные вопросы, но оценка ищется как функция от несколько другого параметра. А именно, для подмножества вершин W рассматривается величина $d(W)$, равная максимальному количеству элементов в независимых множествах специального вида. В диссертации показано, что при $\ell = \omega(n^2)$ выполнено

$$r(W) \geq \frac{\ell^2}{n} \left(2 - \frac{d(W)^3}{6\ell} + o(1) \right).$$

В четвертой главе автор обобщает некоторые результаты на случай произвольного графа $G(n, r, s)$, получены верхняя оценка $r(\ell, G(n, r, s))$ и нижние оценки для $r(\ell, G(n, r, 0))$.

Все результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми и обоснованы строгими математическими доказательствами.

3. Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы:

Работа носит теоретический характер. Автором внесен весомый вклад в развитие направления теории графов, связанного с изучением индуцированных подграфов графов Джонсона. Результаты подобного рода фундаментальны и чрезвычайно важны в теории графов, они могут найти применение в самых разных исследованиях.

Результаты диссертационной работы могут найти применение в теории случайных графов, теории дистанционных графов, теории кодирования и других смежных областях математики. Они могут быть интересны специалистам, работающим в ведущих математических центрах страны.

4. Полнота опубликования основных результатов диссертации в рецензируемых научных изданиях в соответствии с требованиями Положения:

По теме диссертации автором опубликовано 4 статьи [67]–[70] из списка литературы. Они опубликованы в центральных академических журналах, которые индексируются международными базами цитирования Scopus и Web of Science.

5. Вопросы и замечания (в соответствии с п. 4.13 Положения соискатель отвечает на сформулированные здесь вопросы и замечания на заседании по защите диссертации):

В целом, работа написана не слишком аккуратно. Имеются следующие замечания.

- (1) На стр. 8 согласно формальному определению величина $r(\ell)$ зависит не только от ℓ , но и от графа G . Автор рассматривает эту величину для разных графов, так что стоило оговорить, что зависимость от графа будет опускаться для сокращения записи.
- (2) На стр. 8 в основных положениях, выносимых на защиту и в заключении в п. (с) сказано про “нижнюю оценку величины $r(\ell)$ для подграфов специального вида”. Формально, величина $r(\ell)$ зависит от всего графа G , а не от подграфов специального вида.
- (3) На странице 16 автор пишет “носителем множества вершин назовем объединение всех вершин данного множества”. Совсем запутанная фраза, для элементов исходного множества $\{1, 2, \dots, n\}$ стоило использовать другой термин. Аналогичная путаница возникает на стр. 40 при обсуждении множества $E(W_n)$.
- (4) Формулировка теоремы 4 нуждается в уточнении. В пункте 1 введены функции f и g , которые выступают только в качестве границ значений функции ℓ . Они не используются в доказательстве, поэтому их использование совершенно непонятно. Возможно, автор хотел сказать, что асимптотические оценки выполнены

равномерно для всех ℓ из этого промежутка, но об этом нет речи в тексте. Это повторяется также в условии теоремы 5. В пункте 2 нет условий на функцию ℓ , а есть на неиспользуемую f .

- (5) В формулировке теоремы 5 утверждается, что выполнено точное неравенство $r(\ell) \geq \frac{\ell^2}{\alpha_n}$. Однако в качестве доказательства автор использует теорему 2, в которой утверждается лишь асимптотическое неравенство:

$$r(\ell) \geq \frac{\ell^2}{\alpha_n}(1 + o(1)).$$

- (6) На стр. 30 в доказательстве п. (i) есть пропущенные моменты в описании. Во-первых, ничего не сказано о вершине w , откуда она взялась и какими свойствами обладает. Во-вторых, неясно, что такое k в формуле $x \in \{x_1, \dots, x_k\}$. Вероятно, имелось в виду K .
- (7) На стр. 35 автор пишет $l(n) \geq |E(W)|$. Вероятно, имелось в виду $r(l(n))$ вместо $l(n)$. Но с формальной точки зрения выполнено обратное неравенство. Стоило обговорить, что W — то множество, на котором достигается минимальное число ребер, а автор пишет “возьмем произвольное”. Аналогичные неточности имеют место на стр. 37.
- (8) На стр. 36 автор в неравенстве $|E(W_1)| \geq \frac{|W_1|^2}{\alpha_n}(1 + o(1))$ ссылается на теорему 4, но в ней утверждается другая оценка и рассматривается другой режим функции ℓ . Правильной ссылкой будет теорема 2.
- (9) Сложно согласиться с утверждением теоремы 8. Дело в том, что в доказательстве автор некорректно считает асимптотики. На стр.38 он пишет: “значит, $t_n \sim \sqrt{6l/n}$ ”. Это напрямую ниоткуда не следует, т.к. в наиболее интересной режиме $\ell = \Theta(n^3)$ величина t_n должна быть линейной по n , но тогда асимптотикой $[n/t_n]$ нельзя считать n/t_n . Дальше это активно используется при выводе оценки. В итоге, формулировка теоремы 8 верна лишь при $\ell = o(n^3)$, но автором в теореме 5 уже была доказана более сильная оценка. А для случая $\ell = \Theta(n^3)$ утверждение теоремы 8 выглядит неверным.
- (10) На стр. 46 приводятся формулировки лемм 2 и 3, но в тексте диссертации нет леммы 1! На стр. 47 на эти леммы идут ссылки как на леммы 1 и 2.
- (11) По непонятным причинам в диссертации не приводится доказательство леммы 2. Автор дает ссылку на статью [68], но это одна из статей, по результатам которых и проходит защита. Учитывая, что статья короткая, не видно причин, по которым доказательство леммы 2 не может быть включено в диссертацию.
- (12) На стр. 60 в формуле $\ell - \binom{n}{r} - |\{w \in W : w \sim v\}|$ принадлежность $w \in W$ уже лишняя.

Однако данные недостатки и замечания скорее носят технический или редакционный характер и не относятся к содержательной части диссертации.

6. Общая характеристика диссертации (не включает резолютивную часть):

Оценивая диссертацию в целом, можно констатировать, что она посвящена актуальным вопросам теории графов и является законченным научным исследованием, содержащим ряд содержательных математических результатов. Работа хорошо опубликована и прошла апробацию на профильных научных конференциях. Считаю, что диссертационная работа Пушнякова Филиппа Анатольевича "О числе рёбер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов" полностью соответствует требованиям Положения МФТИ о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук.

Дата: 28 июля 2020 г.

Подпись

Шабанов Д.

/Шабанов Дмитрий Александрович



Подпись руки

Д. А. Шабанова

ЗАВЕРЯЮ:

СПЕЦИАЛИСТ КАНЦЕЛЯРИИ
АДМИНИСТРАТИВНОГО ОТДЕЛА
САВЧЕНКО

[Handwritten signature]