УДК 517.951

А. И. Беспорточный, А. Н. Бурмистров, Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Вариант теоремы Хопфа

Сформулирован и доказан вариант теоремы Хопфа об экстремальных значениях решений квазилинейных уравнений в частных производных эллиптического типа. В предложенном варианте ослаблены требования классической теоремы к коэффициентам уравнений. В результате появилась возможность исследования экстремальных свойств некоторых практически важных течений жидкости и газа.

Ключевые слова: принцип максимума, теорема Хопфа.

A. I. Besportochnyy, A. N. Burmistrov, G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Version of the Hopf theorem

A version of the Hopf theorem of extreme values of solutions to quasilinear equations in partial derivatives of an elliptic type is formulated and proved. In the proposed version the requirements of the classical theorem on the coefficients of equations are reduced. Thus, a possibility to study the extremal properties of some practically important liquid and gas flows appears.

Key words: maximum principle, Hopf theorem.

1. Введение

Теорема Хопфа [1, 2] предлагает различные варианты принципа максимума для решений эллиптических квазилинейных уравнений в частных производных в зависимости от свойств коэффициентов этих уравнений. Использование теоремы в аэрогидродинамике показало, что некоторые параметры течений жидкости или газа подчиняются принципу максимума – их максимум достигается на границе ограниченной замкнутой области течения. Соответствующие примеры можно найти в монографии [3] и в статьях [4, 5].

Однако для практически важных задач аэрогидродинамики некоторые условия теоремы Хопфа либо не выполняются, либо их проверка не представляется возможной. Одно из таких условий – ограниченность во всей рассматриваемой области течения коэффициентов уравнения. Дело в том, что некоторые течения удобно изучать в криволинейных координатах, например, в координатах, связанных с линиями тока жидкости [6]. При этом даже для гладких течений в точках нулевой скорости могут возникать различного рода особенности в коэффициентах квазилинейных дифференциальных уравнений, записанных в таких криволинейных координатах. Это накладывает ограничение на применение теоремы Хопфа для исследования течений вязкой жидкости в объеме с неподвижными стенками, поскольку скорость на этих стенках равна нулю [6, 7].

Таким образом, для исследования некоторых практически важных течений жидкости и газа необходимо ослабить упомянутые выше требования теоремы Хопфа к коэффициентам уравнения. Этому посвящена данная статья. Полученное новое утверждение названо вариантом теоремы Хопфа. Доказательство в некоторых деталях отличается от доказательства Хопфа [1, 2], и поэтому требуется его повторение для новых условий теоремы. При этом можно обойтись без повторения доказательства для многомерного случая с разными вариантами коэффициентов уравнения. Все становится понятным после приведенного в данной статье нового доказательства для простейшей комбинации коэффициентов квазилинейного уравнения в двухмерном случае. Только одно свойство, касающееся коэффициентов квадратичных форм, не может очевидным образом быть распространено с двухмерного случая на многомерный. Соответствующее утверждение доказано в первом разделе для многомерного случая.

2. «Произведение» матриц двух неотрицательных квадратичных форм

Пусть A и B — матрицы (размеров $n \times n$) неотрицательных квадратичных форм. Тогда матрица C тех же размеров с элементами $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ является матрицей неотрицательной квадратичной формы (результат Шура [8]). Для удобства читателя приведем доказательство этого свойства. Сами формы будем обозначать такими же символами, как и символы их матриц.

Поскольку A — матрица неотрицательной квадратичной формы, то ортогональной заменой она может быть приведена к диагональному виду: $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные числа. При этом, если форма A положительно определена, то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — положительны. Матрица S, обратная к ортогональной матрице, задающей упомянутую выше замену координат, также будет ортогональной матрицей. Тогда $A = S^T \Lambda S$, т.е. $a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} s_{ki}\lambda_k s_{kj}$, где s_{kj} — элементы матрицы S. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Докажем, что результат действия формы C на вектор $\mathbf{x}$ неотрицателен. Действительно, $C(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_ix_j = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j(\sum\limits_{k=1}^{n} s_{ki}\lambda_k s_{kj}) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(s_{ki}x_i)(s_{kj}x_j) \right]. \tag{1}$$

При фиксированном k выражение в прямоугольных скобках есть результат действия квадратичной формы B на вектор $\xi^k = (s_{k1}x_1, s_{k2}x_2, \ldots, s_{kn}x_n)$. Поскольку B – неотрицательная форма, то $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i^k\xi_j^k \geq 0$. Поэтому для каждого k выражение в прямоугольных скобках неотрицательно. Учитывая неотрицательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, получаем, что $C(\mathbf{x}) \geq 0$ для любого вектора $\mathbf{x}$.

Ниже потребуется следствие этого утверждения, которое получается при применении формы C к вектору $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Утверждение 2.1. *Если a_{ij} и b_{ij} – коэффициенты неотрицательных квадратичных форм, то* $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \geq 0$.

Рассмотрим случай когда формы A и B положительно определены. Пусть $\mathbf{x}$ — отличный от нуля вектор. Если бы все векторы $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ равнялись нулю, то для каждого k было бы верным равенство: $s_{k1}x_1 + s_{k2}x_2 + \ldots + s_{kn}x_n = 0$, которое означало бы ортогональность $\mathbf{x}$ всем строкам (векторам) матрицы S, которые образуют ортонормированный базис n-мерного линейного пространства. Но такое невозможно для ненулевого вектора $\mathbf{x}$. Поэтому для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$ существует такое k, что $\xi^k \neq 0$. А поскольку было предположено, что B положительно определена, то $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i^k\xi_j^k > 0$. Кроме того, в силу положительной определенности формы A все диагональные элементы матрицы Λ положительны. Поэтому для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$ в сумме (1), состоящей из неотрицательных слагаемых, есть хотя бы одно положительное слагаемое. Т.е. $C(x) > 0$, и квадратичная форма C, с коэффициентами $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, положительно определена. Из этого, в результате применения формы C к вектору $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)$, получаем

Утверждение 2.2. *Если две квадратичные формы с коэффициентами a_{ij} и b_{ij} положительно определены, то* $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} > 0$.

3. Двухмерный случай

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$Lu = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор второго порядка:

$$L = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y}. \quad (3)$$

Пусть функции $a_{11}(x, y)$, $a_{12}(x, y)$, $a_{22}(x, y)$, $b_1(x, y)$ и $b_2(x, y)$ (коэффициенты этого уравнения) определены в некоторой плоской области G. Если квадратичная форма с коэффициентами a_{11}, a_{12}, $a_{21} = a_{12}$, a_{22} положительно определена для всех точек $M(x, y)$ из G и, следовательно, определитель матрицы этой формы $a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 > 0$ для всех $M(x, y) \in G$, то уравнение (2) и оператор L имеют эллиптический тип в области G.

Наряду с однородным уравнением (2) будем рассматривать неоднородное уравнение в частных производных

$$Lu = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} = f, \quad (4)$$

где $f(x, y)$ — некоторая функция, заданная в G. Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Утверждение 3.1. *Если во всех точках области G коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы и $f < 0$($f > 0$), то любое решение $u \in C^2(G)$ уравнения (4) не имеет в G точек минимума (максимума).*

Доказательство. Допустим, что *утверждение 3.1* не верно. Пусть, например, $f < 0$ и в области G есть точка минимума. В ней $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$, а второй дифференциал является неотрицательной квадратичной формой:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 \geq 0.$$

Поэтому, согласно утверждению 2.1, в рассматриваемой точке минимума

$$Lu = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geq 0.$$

С другой стороны, в этой точке $Lu = f < 0$. Из полученного противоречия вытекает справедливость утверждения 3.1.

Следуя Хопфу [1, 2], докажем более общее утверждение.

Утверждение 3.2 (вариант теоремы Хопфа). *Пусть во всех точках области G коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} уравнения (2) являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы. Пусть, далее, для любой точки $M(x, y) \in G$ существуют $\omega = \omega(x, y) > 0$ и $\Delta = \Delta(x, y) > 0$ такие, что замкнутый круг $\bar{U}(M; \omega)$ целиком лежит в области G и в нем все коэффициенты уравнения (2) ограничены и выполняется неравенство*

$$a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 > \Delta. \quad (5)$$

Тогда никакое решение $u \in C^2(G)$ однородного уравнения (2) не может иметь в точке $M_0(x_0, y_0) \in G$ минимума (максимума), если оно не обращается в постоянную в любой содержащей $M_0(x_0, y_0)$ области G_0, в которой $u(x, y) \geq u(x_0, y_0)$($u(x, y) \leq u(x_0, y_0)$).

Новизна этой формулировки состоит в следующем. В классическом варианте теоремы Хопфа [1, 2] к коэффициентам уравнения (2) предъявляются более строгие требования – коэффициенты должны быть ограничены во всех точках области G общей константой. Кроме того, в классическом варианте общей для всех точек области G должна быть величина Δ, входящая в неравенство (5).

Доказательство. Для определенности допустим, что $M_0(x_0, y_0)$ — точка минимума, и обозначим через E — множество точек из G_0, для которых $u(x, y) = u(x_0, y_0)$. Поскольку $u(x, y)$ — непрерывная в G_0 функция, то $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ в любой принадлежащей G_0 предельной точке $M(x, y)$ множества E. Следовательно, множество E замкнуто в G_0, т.е. $\bar{E} \cap G_0 = E$, где $\bar{E}$ — замыкание E. Любая граничная точка множества E является либо предельной, либо изолированной точкой этого множества. Если $E \neq G_0$, то область G_0 пересекается с границей ∂E множества E [9]. Поэтому, если доказать, что пересечение $\partial E \cap G_0$ пусто, то это будет означать, что $E = G_0$. Предположим, что $\partial E \cap G_0$ не пусто, тогда существует точка $M^*(x^*, y^*)$ на ∂E, принадлежащая G_0, расстояние $\rho(M^*, \partial G_0)$ от которой до ∂G_0 положительно. Положим: $\delta_0 = \rho(M^*, \partial G_0)$. Если $M'(x', y')$ — такая точка из $G_0 \backslash E$, для которой $\rho(M^*, M') < \delta_0/2$, то расстояние $\rho(M', E)$ от $M'(x', y')$ до E положительно, а все замкнутые круги $\bar{U}(M'; \delta)$ с центром в точке $M'(x', y')$ и радиусом $\delta < \delta_0/2$ содержатся в G_0 (рис. 1).

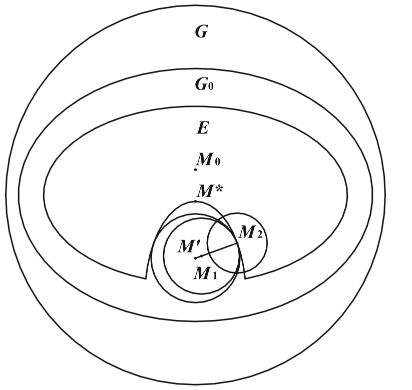

Рис. 1. Расположение точек и множеств в области G

Пусть δ' — верхняя грань значений δ, для которых $\bar{U}(M'; \delta) \subset G_0 \backslash E$. На $\partial \bar{U}(M'; \delta')$ найдется, по крайней мере, одна точка $M_2(x_2, y_2)$ из E [9], так как $\delta' = \rho(M', E)$. Если обозначить через $M_1(x_1, y_1)$ произвольную точку на радиусе $M'M_2$, отличную от $M'(x', y')$, и положить $\rho(M_1, M_2) = \sigma$, то
$u(x, y) > u(x_0, y_0)$, $\forall M(x, y) \in \bar{U}(M_1; \sigma) \backslash M_2$,
$u(x_2, y_2) = u(x_0, y_0)$.

Выберем такое $\delta_1 < \min\{\sigma; \omega(x_2, y_2)\}$, что $\bar{U}(M_2; \delta_1) \subset G_0$, и, положим $r(x, y) = \rho(M, M_1)$, $M(x, y) \in G_0$, $v(x, y) = e^{-k\sigma^2} - e^{-kr^2}$, где k – некоторое число. Рассмотрим выражение

$$e^{kr^2} Lv = -4k^2(a_{11}(x - x_1)^2 + 2a_{12}(x - x_1)(y - y_1) + a_{22}(y - y_1)^2) +$$

$$+ 2k(a_{11} + a_{22} + b_1(x - x_1) + b_2(y - y_1)).$$

Оно представляет собой квадратный двучлен относительно k. Коэффициент при первой степени k ограничен в замкнутом круге $\bar{U}(M_2; \omega(x_2,y_2)) \supset \bar{U}(M_2; \delta_1)$. А коэффициент при второй степени k имеет в $\bar{U}(M_2; \delta_1)$ отрицательную верхнюю грань, так как во всех точках замкнутого круга $\bar{U}(M_2; \omega(x_2,y_2)) \subset G$ для коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} положительно определенной квадратичной формы выполняется неравенство (5). Поэтому можно выбрать число k настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $Lv < 0$ для всех $M(x, y) \in \bar{U}(M_2; \delta_1)$. Пусть число k выбрано таким образом. Тогда для всех $\lambda > 0$ имеем $f = L(u + \lambda v) < 0$ в $\bar{U}(M_2; \delta_1)$. Но последнее неравенство противоречит утверждению 3.1. В самом деле, на дуге окружности $\partial \bar{U}(M_2; \delta_1)$, лежащей в замкнутом круге $\bar{U}(M_1; \sigma)$,

$$u(x, y) > u(x_0, y_0), \quad r \leq \sigma, \quad -1 < v(x, y) = e^{-k\sigma^2} - e^{-kr^2} \leq 0.$$

А на дуге окружности $\partial\bar{U}(M_2;\delta_1)$, лежащей вне $\bar{U}(M_1;\sigma)$,

$$u(x,y) \geq u(x_0,y_0), \quad r > \sigma, \quad v(x,y) = e^{-k\sigma^2} - e^{-kr^2} > 0.$$

Поэтому для $\lambda > 0$ достаточно малых $u + \lambda v > u(x_0,y_0)$ на $\partial\bar{U}(M_2;\delta_1)$ и при этом $u(x_2,y_2) + \lambda v(x_2,y_2) = u(x_0,y_0)$, то есть функция $u+\lambda v$ имеет в открытом круге $U(M_2;\delta_1)$ минимум.

Из полученного противоречия следует, что $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ в области G_0. Утверждение доказано.

Еще раз отметим, что в доказанном утверждении 3.2, в отличие от классической теоремы Хопфа [1, 2], не требуется, чтобы коэффициенты уравнения (2) были ограничены во всей рассматриваемой области G. Теорема Хопфа остается в силе, если для любой точки области можно найти окрестность, в которой выполняется условие ограниченности коэффициентов и справедливо неравенство (5).

Следуя [2], где получено следствие классической теоремы Хопфа, предложим следствие утверждения 3.2.

Утверждение 3.3 (вариант следствия теоремы Хопфа). *Пусть G — ограниченная область и выполняются условия утверждения 3.2. Если решение $u \in C^2(G)$ однородного уравнения* (2) *не равно тождественно постоянной и непрерывно в замкнутой области $\bar{G}$, то во всей области G*

$$\min_{\partial G} u < u < \max_{\partial G} u. \tag{6}$$

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса [9] непрерывная на компакте $\bar{G}$ функция $u(x,y)$ ограничена на нем и достигает своего минимального и максимального значения. Допустим для определенности, что минимум достигается в точке $M_0(x_0,y_0) \in G$. Тогда, согласно утверждению 3.2 неравенство $u(x,y) \geq u(x_0,y_0)$ выполняется во всей области G. Следовательно, $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ в G, что противоречит условию.

Таким образом, $u(x,y)$ достигает минимума на границе ∂G области G, и при этом во всей этой области $\min\limits_{\partial G} u < u$. Аналогично доказывается правая часть двойного неравенства (6).

В приложениях могут быть полезны некоторые утверждения, основанные на обобщении доказанного выше варианта теоремы Хопфа. Доказательство этих утверждений аналогично приведенным выше доказательствам утверждений 3.2 и 3.3. Изложим их применительно к трехмерному случаю. Для этого рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$Lu = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + 2a_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} +$$

$$+ a_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + b_3\frac{\partial u}{\partial z} + cu = f. \tag{7}$$

Предполагается, что коэффициенты этого уравнения a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, b_1, b_2, b_3, c и правая часть f являются функциями трех переменных x, y, z и определены в некоторой трехмерной области G.

Сформулируем общее предположение относительно коэффициентов уравнения (7).

Предположение 3.1. *Пусть во всех точках области G коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} уравнения* (7) *являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A. Пусть, далее, для любой точки $M(x,y,z) \in G$ существуют $\omega = \omega(x,y,z) > 0$ и $\Delta = \Delta(x,y,z) > 0$ такие, что замкнутый круг $\bar{U}(M;\omega)$ целиком лежит в области G, и в нем все коэффициенты уравнения* (7) *ограничены и выполняется неравенство* $\det A > \Delta$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

Утверждение 3.4. *Пусть $c \leq 0$, $f \leq 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 3.1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения* (7) *непрерывно в замкнутой области*

$\bar{G}$, $\min\limits_{\partial G} u \leq 0$, то $u \geq \min\limits_{\partial G} u$ во всей области G. При этом, если $u \neq \mathrm{const}$ в G, равенство $u = \min\limits_{\partial G} u$ возможно только на ∂G.

Утверждение 3.5. *Пусть $c \leq 0$, $f \geq 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 3.1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (7) непрерывно в замкнутой области $\bar{G}$, $\max\limits_{\partial G} u \geq 0$, то $u \leq \max\limits_{\partial G} u$ во всей области G. При этом, если $u \neq \mathrm{const}$ в G, равенство $u = \max\limits_{\partial G} u$ возможно только на ∂G.*

Утверждение 3.6. *Пусть $c = 0$, $f \leq 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 3.1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (7) непрерывно в замкнутой области $\bar{G}$, то $u \geq \min\limits_{\partial G} u$ во всей области G. При этом, если $u \neq \mathrm{const}$ в G, равенство $u = \min\limits_{\partial G} u$ возможно только на ∂G.*

Утверждение 3.7. *Пусть $c = 0$, $f \geq 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 3.1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (7) непрерывно в замкнутой области $\bar{G}$, то $u \leq \max\limits_{\partial G} u$ во всей области G. При этом, если $u \neq \mathrm{const}$ в G, равенство $u = \max\limits_{\partial G} u$ возможно только на ∂G.*

Утверждение 3.8. (вариант следствия теоремы Хопфа). *Пусть $c = 0$, $f = 0$ в ограниченной области G и выполняется предположение 3.1. Если решение $u \in C^2(G)$ уравнения (7) не равно тождественно постоянной и непрерывно в замкнутой области $\bar{G}$, то $\min\limits_{\partial G} u < u < \max\limits_{\partial G} u$ во всей области G.*

4. О положительной определенности квадратичной формы второго дифференциала

Использование утверждения 2.2 позволяет сделать следующий вывод.

Утверждение 4.1. *Если во всех точках области G коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы и $f \leq 0$ ($f \geq 0$), то любое решение $u \in C^2(G)$ уравнения (7) таково, что в точках минимума (максимума) его второй дифференциал не может являться положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой.*

Доказательство проводится «от противного», аналогично доказательству утверждения 3.1, с той лишь разницей, что вместо утверждения 2.1 применяется утверждение 2.2.

5. Пример применения

Рассмотрим задачу об установившемся осесимметричном течении вязкой несжимаемой жидкости. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с началом в точке O так, чтобы течение оказалось осесимметричным относительно оси Oz. В таких координатах уравнение Навье—Стокса для окружной компоненты скорости жидкости V_φ имеет вид [6]:

$$V_z \frac{\partial}{\partial z} V_\varphi + V_r \frac{\partial}{\partial r} V_\varphi + \frac{V_\varphi V_r}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} V_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_\varphi \right),$$

где V_r и V_z — радиальная и осевая компоненты скорости соответственно, $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости. Если выразить окружную компоненту скорости V_φ через окружную циркуляцию $\gamma = 2\pi r V_\varphi$, то последнее уравнение принимает вид

$$\left(V_r + \frac{\nu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \gamma + V_z \frac{\partial}{\partial z} \gamma = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \gamma + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \gamma \right). \tag{8}$$

Поскольку ограниченность V_r и V_z является естественным свойством ламинарного течения, величина $\left(V_r + \frac{\nu}{r}\right)$ не ограничена в окрестности точек, лежащих на оси Oz. Поэтому к решению уравнения (8) применить следствие теоремы Хопфа, представленное в виде [1, 2], нельзя. В работе [10] был доказан принцип максимума для случая неограниченности одного из коэффициентов эллиптических уравнений. В результате был получен следующий принцип максимума окружной циркуляции.

Пусть осесимметричное ламинарное течение несжимаемой жидкости с ненулевой вязкостью установилось в отсутствие внешних массовых сил; и пусть $\bar{G}$ *— произвольная ограниченная замкнутая область, лежащая в радиально-осевой полуплоскости* $r \geq 0$*, тогда минимум и максимум окружной циркуляции достигаются на границе области* $\bar{G}$*.*

Эта формулировка допускает достижение максимума и минимума во внутренних точках области. Из полученного в данной работе варианта следствия теоремы Хопфа (утверждение 3.3) следует более сильный вывод.

Утверждение 5.1 (принцип максимума окружной циркуляции).

Пусть осесимметричное ламинарное течение несжимаемой жидкости с ненулевой вязкостью установилось в отсутствие внешних массовых сил; и пусть $\bar{G}$ *— произвольная ограниченная замкнутая область, лежащая в радиально-осевой полуплоскости* $r \geq 0$*, тогда или окружная циркуляция постоянна, или ее минимум и максимум достигаются на границе и только на границе области* $\bar{G}$*.*

6. Заключение

Сформулирован и доказан вариант теоремы Хопфа об экстремальных значениях решений квазилинейных уравнений в частных производных эллиптического типа. В предложенном варианте ослаблены требования к ограниченности коэффициентов рассматриваемых уравнений. В результате появилась возможность исследования экстремальных свойств некоторых практически важных течений жидкости и газа. Приведен пример такого использования.

Результаты могут быть применены в теоретической аэрогидродинамике.

Литература

1. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957.
2. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1927. V. 19. P. 147–152.
3. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой аэродинамики. М.: Издательство иностранной литературы, 1961.
4. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* Принцип максимума функции Бернулли // Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, № 5. С. 53–56.
5. *Сизых Г.Б.* Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа // Труды МФТИ. 2015. Т. 7, № 2(26). С. 108–112.
6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1973.
9. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. М.: Высшая школа, 1981.
10. *Бурмистров А.Н., Ковалёв В.П., Сизых Г.Б.* Принцип максимума для решения уравнения эллиптического типа с неограниченными коэффициентами // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, № 4. С. 97–102.

Литература

1. *Miranda C.* Partial Differential Equations of Elliptic Type. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1970.

2. *Hopf E.* Elementary remarks on the solutions of partial differential equations of second order of Elliptic type. Meeting reports of the Prussian Academy of Sciences. 1927. V. 19. P. 147–152. (in German).

3. *Bers L.* Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. New York: Wiley, 1958.

4. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Maximum principle for Bernoulli function. TSAGI Science Journal. 2015. V. 46, N 5. P. 53–56. (in Russian).

5. *Sizykh G.B.* The sign of the presence of braking point in a flat non-rotational flow of an ideal gas. Proceedings of MIPT. 2015. V. 7, N 2(26). P. 108–112. (in Russian).

6. *Loytsyansky L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Pergamon Press, 1966.

7. *Sedov L.I.* A cource in continuum mechanics. V. 2. Netherlands: Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.

8. *Lancaster P.* Theory of matrices. New York: Academic Press, 1969.

9. *Kudryavtsev L.D.* A cource of mathematical analysis. V. 1. Moscow: High School, 1981. (in Russian).

10. *Burmistrov A.N., Kovalev V.P., Sizykh G.B.* The maximum principle for solutions of equations of elliptic type with unbounded coefficients. Proceedings of MIPT. 2014. V. 6, N 4. P. 97–102. (in Russian).

Поступила в редакцию 29.02.2016