УДК 532.546

Е. Е. Красновский[1], *А. П. Черняев*[2]

[1]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (государственный университет)
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Модель нелинейной по Форхгеймеру напорной двумерной стационарной фильтрации жидкости к скважинам

Рассмотрены задачи двумерной напорной стационарной фильтрации несжимаемой жидкости к скважине для нелинейного закона Форхгеймера. Радиальный случай доведен до инженерной формулы типа Дюпюи для выражения дебита. Определены поля давления и скорости. В случае произвольного контура питания получено нелинейное уравнение второго порядка, являющееся обобщением двумерного уравнения Лапласа, удобное для обобщения понятия эффекта горизонтальности.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, дебит скважины, формула типа Дюпюи, контур питания.

E. E. Krasnovskiy[1], *A. P. Chernyaev*[2]

[1]Moscow State Technical University. N. Uh. Bauman (State University)
[2]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Nonlinear model in the Forchheimer stationary two-dimensional pressure filtration of liquid to wells

We consider the problem of stationary two-dimensional pressure filtration of an incompressible fluid to the bore for the Forchheimer nonlinear law. The radial case is reduced to the Dupuis engineering formula for the flow rate expression. We define pressure and velocity fields. In the case of an arbitrary circuit, we obtain the resulting nonlinear second order equation that is a generalization of the two-dimensional Laplace's equation which is convenient to generalize the notion of the horizontality effect.

Key words: nonlinear filtration, well production rate, formula type Dupuis, external boundary.

1. Введение

Известно, что нелинейный закон фильтрации по Форхгеймеру [1] – один из самых трудных для аналитических исследований. Поэтому сначала рассмотрена задача двумерной напорной стационарной радиальной фильтрации к скважине для этого закона и получена формула типа Дюпюи для выражения дебита. После этого полностью определяется поле давлений и поле скоростей.

Затем рассмотрена задача двумерной напорной стационарной фильтрации к скважине в случае контура питания довольно произвольной формы. Для давления получено нелинейное уравнение второго порядка довольно сложного вида, которое, тем не менее, является обобщением двумерного уравнения Лапласа. Однако для этого уравнения можно ставить задачу типа Дирихле для двусвязной плоской области.

Последняя задача имеет значение для определения геометрического эффекта двумерной области задачи напорной фильтрации.

2. Случай радиальной фильтрации

Рассмотрим сначала наиболее простой частный случай радиальной нелинейной фильтрации по закону Форхгеймера к цилиндрической горизонтальной скважине радиуса r_1 бесконечной длины, когда забойное давление так велико, что силой тяжести можно пренебречь, и все характеристики течения будут зависеть лишь от расстояния до оси скважины r (см. рис. 1). Этот случай здесь и в дальнейшем мы будем называть радиальной фильтрацией. Скорости фильтрации во всех точках направлены по радиусу к оси скважины и находятся в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Направив ось x по оси скважины, мы получаем, что достаточно рассмотреть нелинейную радиальную фильтрацию в плоскости YOZ к окружности радиуса r_1, подчиняющуюся закону Форхгеймера.

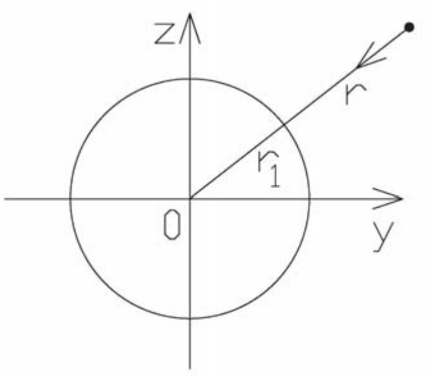

Рис. 1

Для такого выбора координат

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}. \tag{1}$$

Из постоянства расхода на единицу длины мы получим, что

$$Q = 2\pi r V_r,$$

или

$$V_r = \frac{Q}{2\pi r}. \tag{2}$$

Здесь Q – расход на единицу длины, а V_r – компонента скорости, направленная по радиусу к началу координат в плоскости YOZ.

В векторной форме двучленный закон Форхгеймера будет иметь вид [2]

$$-grad\ p = \frac{\mu}{k}\overline{W} + \frac{\beta\rho}{\sqrt{k}} W\overline{W}, \tag{3}$$

и тогда, в случае плоского движения, параллельного плоскости YOZ, мы будем иметь уравнения [2]

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -av - bvW,\ \frac{\partial p}{\partial z} = -aw - bwW, \tag{4}$$

где $a = \frac{\mu}{k}$, $b = \frac{\beta\rho}{\sqrt{k}}$, μ – вязкость, k – постоянная проницаемость среды (недеформируемая пористая среда), p – давление, ρ – постоянная плотность (жидкость несжимаема), $\overline{W}$ – скорость фильтрации, v, w – проекции $\overline{W}$ на y и z соответственно, $W = \left|\overline{W}\right| = \sqrt{v^2 + w^2}$.

Вместо проектирования двучленного закона на линию тока (на координатную ось r цилиндрической системы координат [2, с. 435]) преобразуем уравнения (4) к полярным координатам

$$y = r\cos\varphi, z = r\sin\varphi,$$

где φ – полярный угол:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\left(v\cos\varphi + w\sin\varphi\right)\left(a + bW\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = r\left(v\sin\varphi - w\cos\varphi\right)\left(a + bW\right). \tag{5}$$

Остановимся теперь подробнее на случае радиальной фильтрации к цилиндрической горизонтальной скважине. Для этого случая

$$W = |V_r|\,,\ \ v = -V_r\cos\varphi,\ \ \ w = -V_r\sin\varphi,$$

$$v\cos\varphi + w\sin\varphi = -V_r,\ \ v\sin\varphi - w\cos\varphi = 0.$$

Отсюда уравнения (5) будут иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = V_r\left(a + b\,|V_r|\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0. \tag{6}$$

Подставляя (2) в первое равенство (6), с учетом второго получаем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{aQ}{2\pi r} + \frac{bQ\,|Q|}{4\pi^2 r^2}.$$

Интегрируя последнее, получаем уравнение для давления:

$$p = \frac{aQ}{2\pi}\ln r - \frac{bQ\,|Q|}{4\pi^2 r} + C. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь задачу для случая радиальной фильтрации, когда в плоскости YOZ на окружности радиуса r_1 (рис. 1, 2), т.е. на забое, задано забойное давление p_1, а на концентрической окружности радиуса r_2 (рис. 2), т.е. на контуре питания, задано давление p_2. Таким образом,

$$p|_{r=r_1} = p_1,$$

$$p|_{r=r_2} = p_2. \tag{8}$$

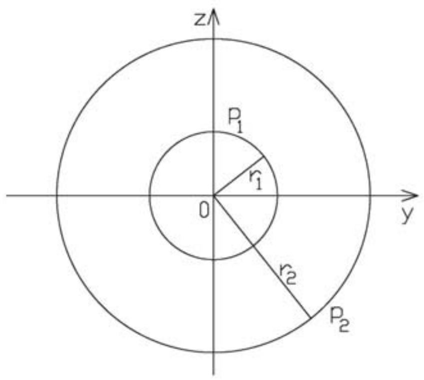

Рис. 2

Подставляя (8) в (7), получим

$$p_1 = \frac{aQ}{2\pi}\ln r_1 - \frac{bQ^2}{4\pi^2 r_1} + C,$$

$$p_2 = \frac{aQ}{2\pi}\ln r_2 - \frac{bQ^2}{4\pi^2 r_2} + C.$$

Вычитая из второго равенства первое, добиваемся сокращения постоянной интегрирования в (7):

$$p_2 - p_1 = \frac{aQ}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{bQ^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение относительно Q:

$$\frac{b(r_2 - r_1)}{4\pi^2 r_1 r_2} Q^2 + \frac{a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} Q - (p_2 - p_1) = 0, \tag{9}$$

получаем, что его дискриминант

$$D = \frac{a^2}{4\pi^2} \ln^2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{b(r_2 - r_1)}{\pi^2 r_1 r_2} (p_2 - p_1) \tag{10}$$

положителен. Корни уравнения (9) будут выражаться формулой

$$Q_{1,2} = \frac{2\pi^2 r_1 r_2}{b(r_2 - r_1)} \left[-\frac{a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \pm \sqrt{D} \right], b \neq 0.$$

Поскольку нам нужен лишь положительный корень уравнения (9), то в правой части последней формулы нужно брать знак плюс, т.е.

$$Q = \frac{2\pi^2 r_1 r_2}{b(r_2 - r_1)} \left[\sqrt{D} - \frac{a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right], b \neq 0. \tag{11}$$

Преобразовывая (11), будем иметь

$$Q = \frac{2\pi^2 r_1 r_2 \left(D - \frac{a^2}{4\pi^2} \ln^2 \frac{r_2}{r_1} \right)}{b(r_2 - r_1) \left(\sqrt{D} + \frac{a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)}, b \neq 0. \tag{12}$$

Обращаясь к (10), получим

$$D - \frac{a^2}{4\pi^2} \ln^2 \frac{r_2}{r_1} = \frac{b(r_2 - r_1)}{\pi^2 r_1 r_2} (p_2 - p_1).$$

С учетом последнего равенства (12) примет вид

$$Q = \frac{2(p_2 - p_1)}{\left(\sqrt{D} + \frac{a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)}. \tag{13}$$

Далее, обращаясь к (10), имеем

$$\sqrt{D} + \frac{a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{a^2}{4\pi^2} \ln^2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{b(r_2 - r_1)}{\pi^2 r_1 r_2} (p_2 - p_1)} + \frac{a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} =$$

$$= \frac{a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \left[\sqrt{1 + \frac{4b(r_2 - r_1)(p_2 - p_1)}{a^2 r_1 r_2 \ln^2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}} + 1 \right].$$

Подставляя последнее в (13), получаем выражение для дебита скважины:

$$Q = \frac{4\pi(p_2 - p_1)}{a \ln \frac{r_2}{r_1} \left[\sqrt{1 + \frac{4b(r_2 - r_1)(p_2 - p_1)}{a^2 r_1 r_2 \ln^2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}} + 1 \right]}. \tag{14}$$

Покажем, что формула (14) для дебита скважины в случае нелинейной фильтрации является обобщением классической формулы Дюпюи. Действительно, положив в формуле (14) $b = 0$, будем иметь формулу Дюпюи для дебита скважины в случае линейной фильтрации:

$$Q = \frac{2\pi\left(p_2 - p_1\right)}{a \ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{15}$$

Поскольку формула (14) получена из (11), то, вообще говоря, (14) справедлива при $b \neq 0$. Однако поскольку (15) может быть получена из (14) при $b = 0$, то (14) можно считать обобщением (15), чего мы и хотели.

После того как найден дебит скважины Q при помощи формулы (14), мы находим C при помощи формулы (7), а именно:

$$C = p_1 - \frac{aQ}{2\pi} \ln r_1 + \frac{bQ^2}{4\pi^2 r_1} = p_2 - \frac{aQ}{2\pi} \ln r_2 + \frac{bQ^2}{4\pi^2 r_2}. \tag{16}$$

Таким образом, при помощи формул (7) и (16) полностью определяется поле давлений. Поле скоростей находится по формуле (2).

В итоге отметим интересную особенность течения, задаваемого полем скоростей (2) и полем давлений (7). Это фильтрационное течение мы строили для моделирования самого простого фильтрационного процесса напорной фильтрации к скважине. Поэтому мы считали, что безусловно $Q > 0$. Однако если рассмотреть случай $Q < 0$, то течение (2), (7) моделирует фильтрационный процесс растекания жидкости от скважины. Так как $a > 0$ и $b > 0$, то при $Q > 0$, $\frac{dp}{dr} > 0$ и p растет с ростом r. Если же $Q < 0$, то

$$\frac{dp}{dr} = \frac{Q}{4\pi^2 r^2}\left(2\pi a r - bQ\right) < 0.$$

3. Случай контура питания произвольного характера

Остановимся теперь на постановке задачи в более общем случае, а именно, когда в плоскости YOZ забой по-прежнему является окружностью радиуса r_1 (рис. 1, 2, 3), а контур питания – непрерывной кривой довольно произвольной формы (рис. 3).

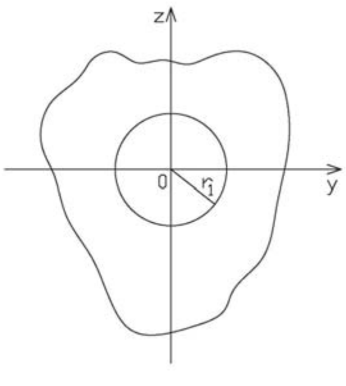

Рис. 3

Для двучленного закона фильтрации в векторном виде (3), т.е. для

$$-grad\ p = a\overline{W} + bW\overline{W},$$

запишем равенство модулей обеих частей этого уравнения:

$$|grad\ p| = \left|a\overline{W} + bW\overline{W}\right| = aW + bW^2.$$

Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение для W:

$$bW^2 + aW - |grad\ p| = 0,$$

получим

$$W = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b\,|grad\ p|}}{2b}.$$

Поскольку $W \geqslant 0$, то выбираем знак плюс, и, таким образом:

$$W = \frac{\sqrt{a^2 + 4b\,|grad\ p|} - a}{2b}. \tag{17}$$

Исходя из уравнений (4), находим

$$v = -\frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{a + bW}, \;\; w = -\frac{\frac{\partial p}{\partial z}}{a + bW}. \tag{18}$$

Подставляя (17) и (18) в уравнение сохранения массы, которое в нашем случае течения в плоскости YOZ будет иметь вид [3]

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

с учетом равенства

$$a + bW = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4b\,|grad\ p|} + a\right),$$

которое сразу следует из (17), получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\frac{\partial p}{\partial y}}{a + \sqrt{a^2 + 4b\,|grad\ p|}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\frac{\partial p}{\partial z}}{a + \sqrt{a^2 + 4b\,|grad\ p|}}\right) = 0. \tag{19}$$

Интересно отметить, что при $b = 0$ уравнение (19) становится обычным уравнением Лапласа.

Задачу для уравнения (19) предполагается ставить, задавая давления на забое и на контуре питания (рис. 3) соответственно.

Остановимся теперь на понятии функции источника для уравнения (19). Для линейных уравнений функция источника определяется при помощи фундаментального решения [4, 5, 6, 7, 8], которое, в свою очередь, часто определяется через обобщенные функции. Для нелинейных уравнений обобщенные функции в традиционном понимании [9, 10] введены быть не могут. Однако функция источника для уравнения (18) может быть определена самостоятельно.

Обозначим через p_* функцию, задаваемую формулой (7), где r определяется формулой (1). Очевидно, что p_* удовлетворяет уравнению (19). Рассмотрим теперь решение уравнения (19), определяемое формулой

$$p = p_* + q, \tag{20}$$

или

$$p = \frac{aQ}{2\pi}\ln\sqrt{y^2 + z^2} - \frac{bQ^2}{4\pi^2\sqrt{y^2 + z^2}} + C + q. \tag{21}$$

Пусть теперь мы имеем задачу для уравнения с заданием давления на забое и на контуре питания (рис. 3). Подставляя (20) или, что то же самое, (21) в уравнение (19), получаем уравнение для неизвестной функции q. Подставляя (20) или, что то же самое, (21) в граничные условия на забое и на контуре питания, получаем граничные условия на них для неизвестной функции q.

Последняя задача имеет значение для определения эффекта геометрии двумерной области задачи напорной фильтрации. В частности, если контур питания – сильно вытянутый овал, то эффект геометрии двумерной области будет эффектом горизонтальности [11].

4. Заключение

В задаче двумерной напорной нелинейной по Форхгеймеру стационарной радиальной фильтрации к скважине для этого закона получена формула типа Дюпюи (14) для выражения дебита. Далее, при помощи (7) и (16) полностью определяется поле давлений, а поле скоростей находится по формуле (2).

Для давления задачи двумерной напорной нелинейной по Форхгеймеру стационарной фильтрации к скважине в случае контура питания довольно произвольной формы получено нелинейное уравнение второго порядка (18), которое является обобщением двумерного уравнения Лапласа. Задачу для уравнения (19) можно ставить, задавая давление на забое и на контуре питания соответственно.

Последняя задача имеет значение для определения эффекта геометрии двумерной области задачи напорной фильтрации.

Литература

1. *Форхгеймер Ф.* Гидравлика. М.: ОНТИ, 1935.

2. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д.* Нефтегазовая гидромеханика. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

3. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // Прикладная математика и механика. 1940. Т. 4, вып. 1. С. 33–52.

4. *Андреев В.Б., Крявкина С.А.* О функции источника сеточного оператора Лапласа. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 364–373.

5. *Черняев А.П.* Использование фундаментальных решений обобщенных осесимметричных уравнений при моделировании задач гидромеханики // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 9. С. 105–120.

6. *Черняев А.П.* Линейная установившаяся фильтрация в неоднородном по глубине пласте, занимающем нижнее полупространство // Доклады Академии наук. 1990. Т. 312, № 2. С. 306–310.

7. *Cherniaev A.P.* The integral representation of fundamental solutions of generalised axially symmetric equations and their application to stationary problems of hydromechanics // Integral methods in science and engineering. 1994. P. 16–22.

8. *Черняев А.П.* Достаточные условия существования интегрального представления в полосе для функции источника уравнения неоднородной установившейся фильтрации. Интегральные преобразования и специальные функции. 1997. Т. 1, № 2–3. С. 22–25.

9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 1–2. М.: Физматгиз, 1958.

10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.

11. *Черняев А. П.* Эффект горизонтальности течения и приближенная оценка напора при стационарном притоке жидкости к горизонтальной скважине в случае закона нелинейной фильтрации специального вида // Вестник ТулГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 15, вып. 2. С. 114–124.

References

1. *Forchheimer Ph.* Hydraulics. Leipzig–Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1914. (in German).
2. *Basniev K.S., Dmitriev N.M., Rosenberg G.D.* Oil and gas hydromechanics. Moscow–Izhevsk: Institute of computer science, 2005. (in Russian).
3. *Khristianovich S.A.* Groundwater movement, not following Darcy's law. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1940. V. 4, I. 1. P. 33–52. (in Russian).
4. *Andreev V.B., Kriavkina S.A.* About the function of the source grid of the Laplace operator. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1972. V. 12, N 2. P. 364–373. (in Russian).
5. *Cherniaev A.P.* The use of fundamental solutions of generalized axially symmetric equations in the modeling of problems in fluid mechanics. Mathematical Models and Computer Simulations. 1989. V. 1, N 9. P. 105–120. (in Russian).
6. *Cherniaev A.P.* Linear steady-state filtering in a non-uniform depth layer, which occupies the lower half-space. Doklady Akademii Nauk. 1990. V. 312, N 2. P. 306–310. (in Russian).
7. *Cherniaev A.P.* The integral representation of fundamental solutions of generalised axially symmetric equations and their application to stationary problems of hydromechanics. Integral methods in science and engineering. 1994. P. 16–22.
8. *Cherniaev A.P.* Sufficient conditions for the existence of integral representations in the band for a function of source equations of an inhomogeneous steady-state filtration. Integral transforms and special functions. 1997. V. 1, N 2–3. P. 22–25. (in Russian).
9. *Gelfand I.M., Shilov G.Ye.* Generalized functions. I. 1–2. Moscow: Fizmatlit, 1958. (in Russian).
10. *Vladimirov V.S.* Equations of mathematical physics. Moscow.: Science, 1967. (in Russian).
11. *Cherniaev A.P.* The effect of horizontal currents and approximate estimation of pressure at stationary flow of liquid to the horizontal well in the case of the law nonlinear filtering of a special kind. TSU Tidings. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2009. V. 15, I. 2. P. 114–124. (in Russian).

Поступила в редакцию 29.05.2017