

УДК 539.3

Н. С. Бондаренко

Донецкий национальный университет

Определение обобщённых перемещений в ортотропной пластине при действии сосредоточенной силы на базе $\{1,0\}$ -аппроксимации

Рассматривается задача статики для ортотропной пластины на базе обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. В рамках данного подхода искомые и заданные функции представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра от толщины координаты. Фундаментальное решение задачи для случая плоского напряжённого состояния получено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье. Проведены численные исследования влияния упругих постоянных ортотропного материала на обобщённые перемещения.

Ключевые слова: ортотропная пластина, сосредоточенная сила, плоское напряжённое состояние, полиномы Лежандра, преобразование Фурье.

N. S. Bondarenko

Donetsk National University

Determination of generalized displacements in an orthotropic plate under the action of concentrated force based on the $\{1,0\}$ -approximation

We consider the problem of statics for an orthotropic plate based on the generalized theory in the version $\{1,0\}$ -approximation. Within the framework of this approach, the sought and specified functions are presented as Fourier series in Legendre polynomials in the thickness coordinate. The fundamental solution of the problem for the case of a plane stress state is obtained using the twodimensional integral Fourier transform. Numerical studies of the effect of elastic constants of an orthotropic material on generalized displacements are carried out.

Key words: orthotropic plate, concentrated force, plane stress state, Legendre polynomials, Fourier transform.

1. Введение

Тонкостенные элементы конструкций, изготовленные из современных композиционных материалов, широко применяются в объектах различного назначения, в том числе повышенного уровня ответственности при сложном нагружении. Об актуальности решения задач статики для пластин и оболочек свидетельствуют публикации последних лет [1, 2]. Использование композиционных материалов, обладающих резкой анизотропией упругих свойств, обуславливает актуальность построения уточнённых теорий пластин и оболочек, учитывающих явления, связанные с поперечными сдвигами и обжатием.

В настоящей работе для сведения трёхмерной задачи статики ортотропной пластины к двумерной используется обобщённая теория в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. Выбранный

подход является наиболее приемлемым для решения поставленной задачи, поскольку он не основан на каких-либо гипотезах, а использует метод И. Н. Векуа разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты [3]. Преимуществом данного подхода является возможность рассматривать не только тонкие пластины, но пластины средней и большой толщины. При этом решение задачи может быть получено с произвольной, наперёд заданной точностью в зависимости от числа удерживаемых слагаемых в разложениях заданных и искомых функций. Из публикаций последних лет, использующих обобщённую теорию пластин и оболочек, в рамках которой искомые и заданные функции раскладываются в ряды Фурье по полиномам Лежандра, следует отметить статьи [4, 5].

В работе построено фундаментальное решение уравнений статики $\{1,0\}$ -аппроксимации для случая безмоментного напряжённого состояния ортотропной пластины. Необходимость решения такой задачи обусловлена важной ролью, которую играют фундаментальные решения при исследовании различных граничных задач механики тонкостенных элементов конструкций, в том числе и находящихся под действием сосредоточенных силовых воздействий.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ортотропную пластину толщиной $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z . В качестве исходной взята система уравнений $\{1,0\}$ -аппроксимации. В рамках данного приближения компоненты напряжённо-деформированного состояния представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра P_k от толщинной координаты z таким образом [3]:

- компоненты вектора перемещений:

$$u_x = uP_0 + h\gamma_x P_1, \quad u_y = vP_0 + h\gamma_y P_1, \quad u_z = w_0 P_0,$$

где $u, v, w_0, \gamma_x, \gamma_y$ — обобщённые перемещения пластины, из которых u, v, w_0 являются аналогами перемещений точек срединной поверхности, а γ_x, γ_y — аналогами углов поворота нормали;

- компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{2h} P_0 + \frac{3M_x}{2h^2} P_1 (x \rightarrow y), \quad \tau_{xy} = \frac{S_{xy}}{2h} P_0 + \frac{3H_{xy}}{2h^2} P_1, \\ \tau_{xz} = \frac{Q_{x0}}{2h} (P_0 - P_2) (x \rightarrow y), \quad \sigma_z = 0,$$

где коэффициенты разложений в ряды по полиномам Лежандра являются обобщёнными усилиями и моментами, из которых N_x, N_y, S_{xy} являются аналогами мембранных усилий; M_x, M_y, H_{xy} — изгибающих и крутящего моментов; Q_{x0}, Q_{y0} — перерезывающих сил;

- компоненты вектора объёмной силы:

$$F_x = \frac{q_x}{2h} P_0 + \frac{3m_x}{2h^2} P_1 (x \rightarrow y), \quad F_z = \frac{q_z}{2h} P_0.$$

В безразмерной системе координат $x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$, определённой с точностью до полутолщины пластины h , система уравнений статики на базе обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации для ортотропных пластин имеет вид [3]:

- соотношения упругости в перемещениях

$$N_1 = B_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_{xy} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), \quad N_2 = B_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu_{yx} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \quad S_{12} = B_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \quad (1)$$

где

$$N_1 = \frac{N_x}{Eh}, \quad N_2 = \frac{N_y}{Eh}, \quad S_{12} = \frac{S_{xy}}{Eh}, \quad E = \sqrt{E_x E_y}, \\ B_1 = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \frac{2}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad B_2 = \sqrt{\frac{E_y}{E_x}} \frac{2}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad B_{12} = \frac{2G_{xy}}{E},$$

E_x , E_y — модули Юнга для направлений x , y соответственно; G_{xy} — модуль сдвига, характеризующий изменение угла между главными направлениями x и y ; ν_{xy} , ν_{yx} — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечные изменения (первый индекс указывает направление изменения, второй — направление действия силы, вызывающей это изменение);

- уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} = -q_1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} = -q_2, \quad (2)$$

где $q_1 = q_x/E$, $q_2 = q_y/E$.

Пусть на пластину действует сосредоточенная сила. Математической моделью сосредоточенных воздействий в механике является дельта-функция Дирака. Она стоит на месте функций нагрузки в правых частях разрешающих уравнений. Фундаментальные решения системы (1), (2) имеют определённый механический смысл — это решения задач о действии сосредоточенных сил на пластину [6]. Поэтому компоненты вектора объёмной силы берём в виде

$$q_j(x_1, x_2) = q_j^* \delta(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \quad (3)$$

где $\delta(x_1, x_2)$ — двумерная дельта-функция Дирака, $q_j^* = \text{const}$.

3. Определение обобщённых перемещений

Подставляя соотношения упругости в перемещениях (1) в уравнения равновесия (2), получим уравнения равновесия в перемещениях, которые с учётом правых частей (3) имеют вид

$$\begin{aligned} \left(B_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u + (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} &= -q_1^* \delta(x_1, x_2), \\ (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} B_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) v &= -q_2^* \delta(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Применим к системе (4) двумерное интегральное преобразование Фурье [7]:

$$\begin{aligned} (B_1 \xi_1^2 + B_{12} \xi_2^2) \tilde{u} + (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) \xi_1 \xi_2 \tilde{v} &= \frac{q_1^*}{2\pi}, \\ (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) \xi_1 \xi_2 \tilde{u} + \left(\frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} B_1 \xi_2^2 + B_{12} \xi_1^2 \right) \tilde{v} &= \frac{q_2^*}{2\pi}. \end{aligned}$$

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, найдём трансформанты обобщённых перемещений:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi B_1 B_{12}} \left\{ \frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} B_1 q_1^* \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) + B_{12} q_1^* \tilde{\Phi}_0(\xi_1, \xi_2) - (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) q_2^* \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) \right\}, \\ \tilde{v} &= \frac{1}{2\pi B_1 B_{12}} \left\{ B_1 q_1^* \tilde{\Phi}_0(\xi_1, \xi_2) + B_{12} q_1^* \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) - (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) q_2^* \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1^2}{(\xi_1^2 + \sigma_1^2 \xi_2^2)(\xi_1^2 + \sigma_2^2 \xi_2^2)}, \quad \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_2^2}{(\xi_1^2 + \sigma_1^2 \xi_2^2)(\xi_1^2 + \sigma_2^2 \xi_2^2)}, \\ \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 + \sigma_1^2 \xi_2^2)(\xi_1^2 + \sigma_2^2 \xi_2^2)}, \\ \sigma_{1,2}^2 &= \frac{1}{2\nu_{yx}} \left\{ \nu_{xy} (E_x/G_{xy} - 2\nu_{yx}) \mp \sqrt{\nu_{xy}^2 (E_x/G_{xy} - 2\nu_{yx})^2 - 4\nu_{xy}\nu_{yx}} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Методику обращения покажем на примере первой из функций (6). Заметим, что

$$\tilde{\Phi}_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left\{ \sigma_2^2 \tilde{\Psi}_1(\xi_1, \xi_2; \sigma_2) - \sigma_1^2 \tilde{\Psi}_1(\xi_1, \xi_2; \sigma_1) \right\},$$

где

$$\tilde{\Psi}_1(\xi_1, \xi_2; \sigma_k) = \frac{1}{\xi_1^2 + \sigma_k^2 \xi_2^2} \quad (k = 1, 2).$$

Для нахождения оригинала функции $\tilde{\Psi}_1$ применим к ней формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье [7]:

$$\Psi_1(x_1, x_2; \sigma_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\}}{\xi_1^2 + \sigma_k^2 \xi_2^2} d\xi_1 d\xi_2. \quad (7)$$

В двойных интегралах (7) выполним такие замены переменных в пространствах оригиналов и трансформант:

$$\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \frac{\eta_2}{\sigma_k}, x_1 = y_1, x_2 = \sigma_k y_2. \quad (8)$$

Выделим в интегралах (7) чётные и нечётные части и перейдём в полярные системы координат по формулам

$$y_1 = r \cos \varphi, y_2 = r \sin \varphi, \eta_1 = \rho \cos \theta, \eta_2 = \rho \sin \theta, \quad (9)$$

тогда

$$\Psi_1 = \frac{2}{\pi \sigma_k} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \cos(r\rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r\rho \sin \varphi \sin \theta) d\rho. \quad (10)$$

Применяя разложение Якоби–Ангера [8]:

$$\cos(x \cos \varphi \cos \theta) \cos(x \sin \varphi \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\varphi \cos 2n\theta$$

и учитывая значения интегралов от тригонометрических функций

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta d\theta = \begin{cases} \pi/2, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

преобразуем функцию (10) к виду

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)}{\rho} d\rho.$$

Чтобы вычислить данный интеграл, используем понятие конечной части (f.p.) от расходящегося интеграла [9]:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sigma_k} f.p. \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)}{\rho} d\rho = \frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\infty} \ln \rho J_1(r\rho) d\rho = -\frac{1}{\sigma_k} \ln \frac{\gamma r}{2}, \quad (11)$$

где $C = \ln \gamma = 0,5772\dots$ — константа Эйлера.

Вернёмся в (11) к переменным x_1, x_2 согласно формулам (9) и (8), тогда окончательное выражение для функции Ψ_1 примет такой вид:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sigma_k} \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_k^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_k} \quad (k = 1, 2),$$

а оригиналом первой из функций (6) является

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left(\sigma_2 \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_2^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_2} - \sigma_1 \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_1} \right). \quad (12)$$

Аналогично определяются оригиналы других функций (6):

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left(\frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_2^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_2} \right), \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left(\arctan \frac{\sigma_2 x_1}{x_2} - \arctan \frac{\sigma_1 x_1}{x_2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, оригиналы обобщённых перемещений на основании (5) имеют вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi B_1 B_{12}} \left\{ \frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} B_1 q_1^* \Phi_1(x_1, x_2) + B_{12} q_1^* \Phi_0(x_1, x_2) - (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) q_2^* \Phi_2(x_1, x_2) \right\}, \\ v &= \frac{1}{2\pi B_1 B_{12}} \left\{ B_1 q_1^* \Phi_0(x_1, x_2) + B_{12} q_1^* \Phi_1(x_1, x_2) - (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) q_2^* \Phi_2(x_1, x_2) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где функции $\Phi_0 - \Phi_2$ определяются по формулам (12), (13).

4. Анализ результатов численных исследований

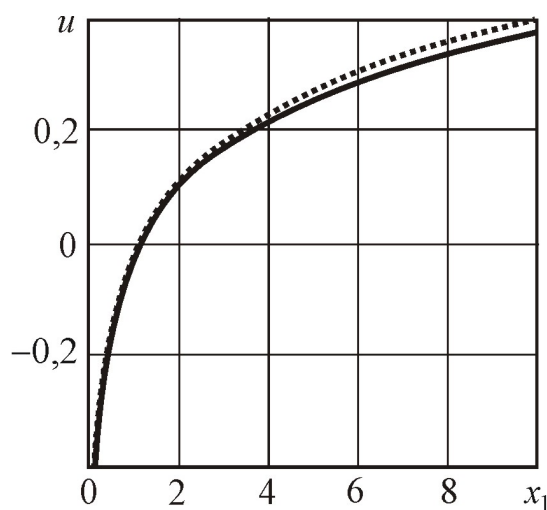
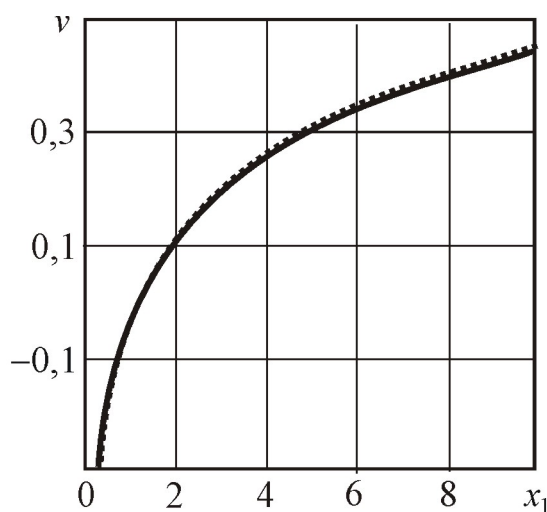
Численные исследования проведены для реальных ортотропных материалов: стеклопластиков типа С1-19-55 и С1-10-65 [10]. Данные для указанных материалов приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Данные для ортотропных материалов

Стеклопластик	ν_{xy}	ν_{yx}	E_x , МН/м ²	G_{xy} , МН/м ²
С1-19-55	0,128	0,161	$2,5 \cdot 10^4$	$4,3 \cdot 10^3$
С1-10-65	0,122	0,17	$3,25 \cdot 10^4$	$6,1 \cdot 10^3$

Для исследования влияния упругих констант на обобщённые перемещения в ортотропной пластине (14) при сосредоточенных силовых воздействиях положим $q_1^* = q_2^* = 1$. Результаты расчётов представлены на рис. 1, 2 в виде графиков изменения обобщённых перемещений u , v вдоль оси абсцисс ($x_2 = 0$). Сплошные линии соответствуют стеклопластику С1-10-65, а пунктирные — С1-19-55.

Рис. 1. Обобщённое перемещение u Рис. 2. Обобщённое перемещение v

Из данных графиков (рис. 1, 2) можно заметить, что с увеличением модуля сдвига G_{xy} обобщённые перемещения u и v возрастают.

5. Выводы

На основании проведённых исследований можно сделать такие выводы:

1. Впервые построено фундаментальное решение уравнений статики для случая безмоментного напряжённого состояния ортотропных пластин на базе обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации при действии сосредоточенной силы.
2. Проведены численные исследования, демонстрирующие влияние упругих постоянных ортотропного материала на обобщённые перемещения, возникающие при безмоментном напряжённом состоянии ортотропных пластин.

Литература

1. Коренева Е.Б. Метод компенсирующих нагрузок для решения задач об анизотропных средах // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14 (1). P. 71–77.
2. Савин С.Ю., Ивлев И.А. Анализ устойчивости ортотропных прямоугольных пластин с использованием коэффициента формы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, вып. 12 (111). С. 1333–1341.
3. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентрациями напряжений. Киев : Наукова думка, 1982.
4. Зеленський А.Г. Фундаментальні розв'язки визначальної системи диференціальних рівнянь математичної теорії пластин // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2018. № 1. С. 13–29.
5. Tusharpskyy R.I. Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the $\{m,n\}$ -approximation method // Journal of Mathematical Sciences. 2017. 226, N 1. P. 52–68.
6. Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений / под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В.П. Шевченко. Киев : А.С.К., 1998.
7. Снеддон И. Преобразования Фурье. Москва : Издательство иностранной литературы, 1955.
8. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. Донецк : ДонГУ, 1980.
9. Лукаевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. Москва : Мир, 1982.
10. Максимук О.В., Мазніцький Р.М., Щербина Н.М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. Львів : Національна академія наук України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2005.

References

1. Koreneva E.B. Method of compensating loads for solving of anisotropic medium problems. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14 (1). P. 71–77. (in Russian).
2. Savin S.Y., Ivlev I.A. Stability analysis of orthotropic rectangular plates using the form factor. Vestnik MGSU. 2017. V. 12, N 12 (111). P. 1333–1341. (in Russian).
3. Pelekh B.L., Lazko V.A. Laminated anisotropic plates and shells with stress concentrators. Kiev : Scientific thought, 1982. (in Russian).

4. *Zelenskiy A.G.* Fundamental solutions of the defining system of differential equations of the mathematical theory of plates. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences. 2018. N 1. P. 13–29. (in Ukrainian).
5. *Tuchapskiy R.I.* Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the $\{m,n\}$ -approximation method. Journal of Mathematical Sciences. 2017. 226, N 1. P. 52–68.
6. Mechanics of composites. V. 7. Stress Concentration. Ed. by A.N. Guz, A.S. Kosmodamiansky, V.P. Shevchenko. Kiev : A.S.K., 1998. (in Russian).
7. *Sneddon I.* Fourier transform. Moscow : Foreign literature publishing house, 1955. (in Russian).
8. *Khizhnyak V.K., Shevchenko V.P.* Mixed problem in the theory of plates and shells: a tutorial. Donetsk : DonGU, 1980. (in Russian).
9. *Lukasevich S.* Local loads in plates and shells. Moscow : Mir, 1982. (in Russian).
10. *Maksimuk O.V., Makhnitsky R.M., Shcherbina N.M.* Mathematical modeling and methods of construction of thin composite structures. Lviv : National Academy of Sciences of Ukraine. Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics them. Ya.S. Pidstrigacha of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2005. (in Ukrainian).

Поступила в редакцию 24.12.2020