УДК 519.175.4

*М. М. Пядеркин*[1,2], *А. М. Райгородский*[1,2,3]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
[3]Адыгейский государственный университет, Кавказский математический центр

# О хроматическом числе случайного подграфа некоторого дистанционного графа

В работе изучается хроматическое число графа $G(n, 3, 1)$, вершины которого соответствуют 3-элементным подмножествам множества $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, а ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если соответствующие подмножества пересекаются ровно по одному элементу. Этот граф был использован Ларманом и Роджерсом для оценки хроматического числа пространства $\mathbb{R}^n$, и недавно Балог, Косточка и Райгородский установили, что хроматическое число этого графа асимптотически равно $n^2/6$. Мы рассматриваем случайные подграфы графа $G(n, 3, 1)$, где каждое ребро исходного графа удаляется с него с вероятностью 1/2, независимо от остальных ребер. В работе доказывается, что хроматическое число этого графа с высокой вероятностью асимптотически равно $\frac{n^2}{12 \log_2 n}$.

**Ключевые слова:** случайные графы, хроматическое число, дистанционный граф.

*M.M. Pyaderkin*[1,2], *A.M. Raigorodskii*[1,2,3]

[1]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
[2]Moscow State University
[3]Adyghe State University, Caucasus Mathematical Center

# On the chromatic number of random subgraphs of a certain distance graph

We study the chromatic number of the graph $G(n, 3, 1)$, whose verticies are all 3-element subsets $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ and there is an edge between two verticies if the corresponding subsets intersect in exactly one element. This graph is employed by Larman and Rogers to provide an estimate for the chromatic number $\mathbb{R}^n$, and quite recently Balogh, Kostochka and Raigorodskii find that the chromatic number of this graph is asymptotically $n^2/6$. We consider a random setting of this problem, where every edge of the original graph is removed with fixed probability 1/2, independent of the other edges, and prove that the chromatic number of this random graph is asymptotically $\frac{n^2}{12 \log_2 n}$ with high probability.

**Key words:** random graphs, chromatic number, distance graph.

## 1. Введение

### 1.1. Граф $G(n, 3, 1)$

В данной работе рассматривается граф $G(n, 3, 1) = (V(n, 3), E(n, 3, 1))$, где

$$V(n, 3) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3,$$
$$E(n, 3, 1) = \{\{x, y\} : (x, y) = 1\},$$

а $(x, y)$ обозначает обычное скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве. Так как $|x|$ является фиксированным для всех $x \in V(n, 3)$, условие на то, что скалярное произведение $(x, y)$ фиксировано, равносильно тому, что фиксировано расстояние между вершинами $x$ и $y$. В этом смысле граф $G(n, 3, 1)$ является *дистанционным графом*. С другой стороны, каждая вершина графа соответствует 3-элементным подмножестам множества $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, а две вершины соединены ребром, если соответствующие множества пересекаются ровно по одному элементу.

Граф $G(n, 3, 1)$ был впервые упомянут в 1972 г. Надем ([1]): он использовал этот граф для конструктивных оценок чисел Рамсея. Другое применение графа было указано Ларманом и Роджерсом ( [2]), которые использовали этот граф для оценки хроматического числа пространства $\chi(\mathbb{R}^n)$: наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить точки пространства $\mathbb{R}^n$ так, что нет двух точек $x$ и $y$ одного цвета на расстоянии $|x - y| = 1$. Наблюдение Лармана и Роджерса состояло в том, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G(n, 3, 1))$, где $\chi(G)$ — обычное хроматическое число графа $G$, равное наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы вершины одного цвета не были соединены ребром. Таким образом, задача отыскания нижней оценки хроматического числа пространства была сведена к оценке хроматического числа конечного графа.

Из определения хроматического числа явно следует, что множество вершин, раскрашенных в один из цветов, образуют *независимое множество*: никакие две вершины множества не соединены ребром. *Число независимости* графа $G$ обычно обозначается $\alpha(G)$ и равно размеру максимального независимого множества вершин графа $G$:

$$\alpha(G) = \max\{|W| : \forall x, y \in W \{x, y\} \notin E\}.$$

Конечно, $\alpha(G) \geqslant \frac{|V|}{\chi(G)}$, таким образом, один из способов установить оценку на хроматическое число графа — оценить его число независимости. Величина $\alpha(G(n, 3, 1))$ была найдена Надем: он доказал следующую теорему.

**Теорема 1.**

$$\alpha(G(n, 3, 1)) = \begin{cases} n \textit{ при } n = 4k, \\ n - 1 \textit{ при } n = 4k + 1, \\ n - 2 \textit{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\chi(G(n, 3, 1)) \geqslant (1 + o(1))\frac{n^2}{6}$. Недавно в работе [3] Балог, Косточка и Райгородский установили, что эту оценку принципиально улучшить нельзя, а именно верна

**Теорема 2.** $\chi(G(n, 3, 1)) = \frac{n^2}{6} + O(n)$. *Более того, в случае* $n = 2^k$ *верно* $\chi(G(n, 3, 1)) = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

Таким образом, для $G(n, 3, 1)$ графа известны как число независимости, так и хроматическое число. Естественным обобщением графа $G(n, 3, 1)$ является граф $G(n, r, s)$: вершины данного графа суть $r$-элементные подмножества $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, а ребро между вершинами проводится в том случае, если соответствующие подмножества пересекаются ровно по $s$ элементам (см. [11–15]). Данное определение полностью совпадает с определением графа $G(n, 3, 1)$ при $r = 3$ и $s = 1$. Граф $G(n, r, s)$ также является дистанционным.

Число независимости графа $G(n, r, s)$ изучали Франкл и Фюреди ([9]), а некоторые оценки на число независимости и хроматическое число случайных подграфов $G(n, r, s)$ были найдены в работе [6]. Однако точную асимптотику для хроматического числа установить не удалось.

В важном частном случае, когда $s = 0$, граф $G(n, r, s)$ называется *кнезеровским*. Этот граф тесно связан со знаменитой задачей Эрдеша–Ко–Радо [10]. Размер максимального независимого множества в кнезеровском графе может быть оценен с помощью теоремы Эрдеша–Ко–Радо. Однако отыскание хроматического числа оказалось более трудной задачей, и одно из наиболее простых доказательств использует топологический метод [4].

### 1.2. Мотивировка из теории случайных графов

Рассмотрим самый обычный полный граф $G(n)$. Одной из наиболее изученных моделей случайных графов является модель Эрдеша–Реньи: каждое ребро графа удаляется из него с вероятностью $p$, независимо от остальных ребер. Такой случайный граф мы в дальнейшем будем обозначать как $G_p(n)$. Мы будем рассматривать случай $p = 1/2$, несмотря на то, что большинство умомянутых теорем верны и для более широкого класса значений $p$.

Существует множество результатов о числе независимости и хроматическом числе случайного графа $G_{1/2}(n)$. В частности, в работе [5] Боллобаш установил следующий классический результат.

**Теорема 3.**
$\mathbb{P}\left[\alpha\left(G_{1/2}(n)\right) = (1+o(1))2\log_2 n\right] \to 1$ и $\mathbb{P}\left[\chi\left(G_{1/2}(n)\right) = (1+o(1))\frac{n}{2\log_2 n}\right] \to 1$ при $n \to \infty$.

Таким образом, *с асимптотической вероятностью* 1 (вероятность стремится к 1 при $n \to \infty$) случайный подграф полного графа может быть раскрашен в $(1+o(1))\frac{n}{2\log_2 n}$ цветов.

Перейдем теперь к случайным подграфам графа $G(n, r, s)$: удалим из этого графа каждое ребро с вероятностью $1/2$, независимо от остальных ребер. Этот случайный граф мы будем обозначать $G_{1/2}(n, r, s)$. В недавней работе Боллобаша, Нараньяна и Райгородского изучалось число независимости случайного подграфа кнезеровского графа $G(n, r, 0)$ [11]. Впоследствии эта величина также изучалась в работах [11–14], которые также установили пороговую вероятность для существования в случайном подграфе кнезеровского графа нетривиального независимого множества. Однако в работах рассматривался лишь случай $s = 0$.

В случае кнезеровских графов число независимости случайного подграфа с высокой вероятностью не отличается от числа независимости исходного графа при $p = 1/2$. Однако для графа $G(n, 3, 1)$ это не так. Число независимости и хроматическое число графа $G_{1/2}(n, 3, 1)$ изучались ранее в работе [6], где были получены следующие оценки.

**Теорема 4.** $\mathbb{P}\left[(1+o(1))2n\log_2 n \leqslant \alpha\left(G_{1/2}(n,3,1)\right) \leqslant (1+o(1))4n\log_2 n\right] \to 1,$ *и*

$$\mathbb{P}\left[(1+o(1))\frac{n^2}{24\log_2 n} \leqslant \chi\left(G_{1/2}(n,3,1)\right) \leqslant (1+o(1))\frac{n^2}{6\log_2 n}\right] \to 1.$$

Верхняя оценка на число независимости была позднее улучшена в работе [8].

**Теорема 5.** $\mathbb{P}\left[\alpha\left(G_{1/2}(n,3,1)\right) = (1+o(1))2n\log_2 n\right] \to 1.$

Этот результат позволяет уточнить нижнюю оценку на хроматическое число до $(1+o(1))\frac{n^2}{12\log_2 n}$, так как из неравенства $\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$ следует, что $\chi\left(G_{1/2}(n,3,1)\right) \geqslant (1+o(1))\frac{n^3/6}{2n\log_2 n} = (1+o(1))\frac{n^2}{12\log_2 n}$. Верхняя оценка была улучшена в работе [7] Гусевым. В работе была доказана

**Теорема 6.** $\mathbb{P}\left[\chi\left(G_{1/2}(n,3,1)\right) \leqslant (1+o(1))\frac{n^2}{8\log_2 n}\right] \to 1.$

В данной работе доказано, что оценка, полученная из теоремы 5, является оптимальной, а именно верна

**Теорема 7.** $\mathbb{P}\left[\chi\left(G_{1/2}(n,3,1)\right) = (1+o(1))\frac{n^2}{12\log_2 n}\right] \to 1.$

## 2. Блоки и независимые множества в $G_{1/2}(n, 3, 1)$

Теорема 5 гарантирует, что максимальное независимое множество $G_{1/2}(n, 3, 1)$ с высокой вероятностью имеет размер не больше $(1+o(1))2n\log_2 n$, и из неравенства $\alpha(G) \geqslant \frac{|V|}{\chi(G)}$ следует, что $\chi\left(G_{1/2}(n,3,1)\right) \geqslant (1+o(1))\frac{n^3/6}{2n\log_2 n} = (1+o(1))\frac{n^2}{12\log_2 n}$. Таким образом, для доказательства теоремы 7 нам достаточно установить, что существует раскраска графа $G_{1/2}(n,3,1)$ в нужное число цветов.

Для раскраски нам сначала необходимо рассмотреть конструкцию независимого множества в графе $G_{1/2}(n,3,1)$. Пусть имеется разбиение множества $\{1,2,\ldots,n\}$ на два непересекающихся подмножества $I$ и $J$, причем в $I$ зафиксировано совершенное паросочетание $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$, то есть все множество $I$ может быть представлено как набор пар $p_1=(1,2)$, $p_2=(3,4)$, $\ldots$, $p_k=(2k-1,2k)$, где $|I|=2k$, и множество $J$ состоит из элементов $2k+1$, $2k+2$, $\ldots$, $n$. Тогда мы можем рассмотреть семейство вершин графа $G(n,3,1)$ — троек элементов, каждая из которых получается объединением одной пары из $P$ и одного из элементов множества $J$:

$$B(I,J,P)=\{t=p_i\cup\{j\},p_i\in P,j\in J\}.$$

Множество $B(I,J,P)$ мы будем называть *блоком*, образованным паросочетанием $P$ для множеств $I$ и $J$. Блок имеет удобную визуальную интерпретацию в виде таблицы, где столбцы соответствует элементам множества $J$, строки соответствуют парам из паросочетания $P$, а ячейка таблицы $(i,j)$ соответствует тройке, полученной объединением пары $p_i$ и элемента $j$:

| | $2k+1$ | $2k+2$ | $\ldots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $(1,2)$ | $(1,2,2k+1)$ | $(1,2,2k+2)$ | $\ldots$ | $(1,2,n)$ |
| $(3,4)$ | $(3,4,2k+1)$ | $(3,4,2k+2)$ | $\ldots$ | $(3,4,n)$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $(2k-1,2k)$ | $(2k-1,2k,2k+1)$ | $(2k-1,2k,2k+2)$ | $\ldots$ | $(2k-1,2k,4,n)$ |

Ясно, что для каждого $j\in J$ тройки из одного столбца образуют клику $C_j$ в графе $G(n,3,1)$, так как любые две тройки из одного столбца пересекаются по ровно одному элементу, а значит, соответствующие вершины графа $G(n,3,1)$ соединены ребром. Более того, никакие две тройки из двух различных столбцов ребром не соединены: действительно, если они находятся в одной строке, то тогда они имеют хотя два общих элемента, а если обе тройки находятся в разных строках, то они не имеют никаких общих элементов. Таким образом, между кликами $C_j$ нет ни одного ребра.

Каждая клика является копией обычного полного графа $G(k)$, поэтому к ней применимы классические результаты из теории случайных графов: например, теорема 3. Из этой теоремы следует, что с асимптотической вероятностью 1 каждая клика содержит независимое множество размера $2\log_2 k$ в графе $G_{1/2}(n,3,1)$. Более того, имеет место следующая оценка: вероятность того, что в клике найдется независимое множество нужного размера, не меньше $1-e^{-k}$ для достаточно больших $k$ (см. [5]). Поэтому вероятность того, что *каждая* из клик $C_j$ содержит независимое множество такого размера, не меьше $1-|J|e^{-k}=1-(n-k)e^{-k}$. Рассмотрев объединение клик $C_j$, мы получим независимое множество в графе $G_{1/2}(n,3,1)$ размера $2(n-2k)\log_2 k$. Выбирая $k=n/\log_2 n$, мы получим независимое множество размера $(1+o(1))2n\log_2 n$ с вероятностью хотя бы $1-(1+o(1))e^{-n}$. Как мы знаем из теоремы 5, независимых множеств большего размера с высокой вероятностью в графе не найдется. Таким образом, в любом достаточно «вытянутом» блоке можно найти независимое множество большого размера. Вскоре мы покажем, что можно не просто найти одно независимое множество большого размера, а можно покрыть весь блок этими независимыми множествами, которые и послужат основой для раскраски.

Наш план состоит в том, чтобы представить граф $G(n,3,1)$ в виде объединения блоков, а затем раскрасить каждый блок. Для претворения этого плана в жизнь мы начнем с нахождения оптимальной раскраски блока $B(I,J,P)$, где $I$ — любое подмножество элементов $\{1,2,\ldots,n\}$, имеющее четный размер, $|I|=2k$, а $J$ — любое другое подмножество, не пересекающееся с $I$: $I\cap J=\emptyset$, и также имеющее четный размер $|J|=2l$. $P$, как и раньше, обозначает совершенное паросочетание элементов из $I$. Для каждого $j\in J$ мы можем рассмотреть клику $C_j$, образованную элементом $j\in J$ и всеми парами $p_i\in P$. Объединение этих $2l$ клик $C_j$, каждая из которых содержит $k$ вершин, и составляет блок $B(I,J,P)$. Согласно теоерме 3, каждая из клик $C_j$ размера $k$, может быть с асимптотической вероятностью 1 раскрашена в не более чем $(1+o(1))\,k/\,(2\log_2 k)$ цветов. Так как вероятность этого события не меньше $1-e^{-k}$, то с большой вероятностью (а именно с вероятностью, не меньшей $1-|J|e^{-k}$) *каждая* из клик $C_j$ может быть раскрашена в такое количество цветов. Так как между кликами $C_j$ нет ребер, то мы можем получить раскраску всего блока, взяв объединение множеств одного цвета для разных клик. Отсюда следует, что блок $B(I,J,P)$, где $|I|=2k$, $|J|=2l$, может быть раскрашен в $(1+o(1))k/\,(2\log_2 k)$ цветов с вероятностью, не меньшей $1-2le^{-k}$.

### Раскраска двух блоков одновременно

Предположим теперь, что мнжества $I$ и $J$ имеют одинаковый размер, то есть $|I|=|J|=2k$, и зафиксировано *два* совершенных паросочетания, $P$ для элементов из $I$ и $Q$ для элементов из $J$. Рассмотрим объединение двух блоков:

$$B(I,J,P,Q)=B(I,J,P)\cup B(J,I,Q).$$

Данное множество троек мы будем называть *симметричным блоком*, такой блок состоит из троек, содержащих пару $p_i\in P$ и элемент $j\in J$ или пару $q_j\in Q$ и элемент $i\in I$. Наша цель состоит в том, чтобы раскрасить такой блок в $(1+o(1))k/\,(2\log_2 k)$ цветов с асимптотической вероятностью 1, где $k=\Omega\,(n/\log_2 n)$ (иначе мы не сможем получить оценку вероятности).

Разобьем паросочетание $P$, состоящее из $k$ пар, на $h=\lfloor\log_2 k\rfloor$ частей, каждая из которых содержит $w=\lfloor k/\log_2 k\rfloor$ или $w+1$ пар, если $k$ не делится на $h$. Такое разбиение паросочетания $P$ порождает соответствующее разбиение множества $I=I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_h$, таким образом $P_i$ образуют совершенное паросочетание в множестве $I_i=\cup_{p\in P_i}p$. Аналогичным образом мы можем разбить паросочетание $Q=Q_1\cup Q_2\cup\ldots\cup Q_h$ и множество $J=J_1\cup J_2\cup\ldots\cup J_h$. Каждая тройка из $B(I,J,P,Q)$ является либо объединением пары $p\in P_i$ и элемента $x\in J_j$, или пары $q\in Q_i$ и элемента $y\in I_j$. Мы рассмотрим два класса таких троек: те, у которых $i=j$, и те, у которых $i\neq j$.

**(1)** $i=j$

Зафиксируем $i\in\{1,2,\ldots,h\}$ и рассмотрим все тройки, состоящие из пары $p\in P_i$ и элемента $x\in J_i$ или же пары $q\in Q_i$ и элемента $y\in I_i$. Набор этих троек, по определению, составляет симметричный блок $B(I_i,J_i,P_i,Q_i)$, который является объединением двух блоков: $B(I_i,J_i,P_i)$ и $B(J_i,I_i,Q_i)$. Так как $|I_i|=|J_i|=2w$ or $2(w+1)$, каждый из блоков может быть покрашен в $(1+o(1))\frac{w+1}{2\log_2 w}$ цветов с вероятностью хотя бы $1-2(w+1)e^{-w}$. Таким образом, оба блока могут быть покрашены в не более чем $(1+o(1))\frac{w+1}{\log_2 w}$ цветов с вероятностью не меньше $1-4(w+1)e^{-w}$.

Основное наблюдение состоит в том, что между двумя такими симметричными блоками $B(I_i,J_i,P_i,Q_i)$ и $B(I_j,J_j,P_j,Q_j)$ нет ни одного ребра при $i\neq j$, так как $(I_i\cup J_i)\cap(I_j\cup J_j)=\emptyset$. Таким образом, все объединение $\cup_{i=1}^{h}B(I_i,J_i,P_i,Q_i)$ может быть раскрашено в не более чем $(1+o(1))\frac{w+1}{\log_2 w}$ цветов с вероятностью не меньше $1-4h(w+1)e^{-w}$. Так как $w\sim\frac{k}{\log_2 k}$, указанное выше число цветов есть $O\left(k/\log_2^2 k\right)$, и оно асимптотически меньше общего числа цветов $\frac{k}{2\log_2 k}$, в которое мы хотим раскрасить $B(I,J,P,Q)$.

**(2)** $i\neq j$

В предыдущем параграфе для всех $i\in\{1,2,\ldots,h\}$ мы смогли раскрасить все тройки, содержащие пару $p\in P_i$ и элемент $x\in J_i$ или пару $q\in Q_i$ и элемент $y\in I_i$. Нам осталось лишь раскрасить те тройки, которые содержат пару $p\in P_i$ и элемент $x\in J_j$ или пару $q\in Q_i$ и $y\in J_j$, где $i\neq j$.

Данное множество представляет собой объединение двух блоков: $B(I_i,\cup_{j\neq i}J_j,P_i)$ и $B(J_i,\cup_{j\neq i}I_j,Q_i)$. Так как $|I_i|=|J_i|=2w$ or $2(w+1)$, оба блока могут быть раскрашены в как максимум $(1+o(1))\frac{w+1}{2\log_2 w}$ цветов с вероятностью хотя бы $1-4(k-w)e^{-w}$, так как $|\cup_{j\neq i} I_j| \leqslant 2k-2w$.

Как и в предыдущем параграфе, основная идея состоит в том, что два этих блока не имеют ребер между собой, так как множества $\cup_{j\neq i}J_j \cup I_i$ и $\cup_{j\neq i}I_j \cup J_i$ не пересекаются между собой, а значит, тройки, состоящие из элементов этих множеств, не могут иметь общих элементов. Таким образом, мы можем раскрасить объединение двух этих блоков в то же самое число цветов $(1+o(1))\frac{w+1}{2\log_2 w}$, взяв объединение соответствующих цветов для каждого из блоков.

Воспользуемся вышеописанной раскраской для всех $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, при этом, не объединяя никакие цвета, таким образом, общее число цветов составит $(1+o(1))h\frac{w+1}{2\log_2 w}$l. Так как $\log_2 w = (1+o(1))\log_2 k$ и $hw \leqslant k$, мы получили требуемую раскраску в $(1+o(1))\frac{k}{2\log_2 k}$ цветов с вероятностью не меньше $1-8ke^{-k}$.

## 2.1. Раскраска троек, пересекающих множества $I$ и $J$

Введем новое обозначение: пусть $R(I,J)$ — множество тех троек, которые *пересекают* множества $I$ и $J$, то есть те тройки, которые состоят из одного элемента из $I$ и двух элементов из $J$ или наоборот:

$$R(I,J) = \{t = \{a,b,c\}, |t\cap I| = 2, |t\cap J| = 1\} \cup \{t = \{a,b,c\}, |t\cap I| = 1, |t\cap J| = 2\}.$$

Пусть снова $|I| = |J| = 2k$, где $k = \Omega\,(n/\log_2 n)$. Основная цель этого параграфа — раскрасить множество $R(I,J)$ оптимально в $(1+o(1))\frac{k^2}{\log_2 k}$ цветов. Для этого мы сведем раскраску этого множества к раскраске блоков. А именно, пусть $L(I,J)$ состоит из тех троек, которые содержат ровно два элемента из множества $I$ и один элемент из множества $J$:

$$L(I,J) = \{t = \{a,b,c\}, |t\cap I| = 2, |t\cap J| = 1\}.$$

Известно, что полный неориентированный граф из $2k$ вершин может быть представлен в виде объединения $2k-1$ непересекающихся паросочетаний $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_{2k-1}$, то есть каждая неупорядоченная пара $(a,b)$ появляется ровно в одном из паросочетаний. Таким образом, все двуэлементные подмножества $I$ могут быть покрыты $2k-1$ паросочетаниями $P_i$, а значит, множество $L(I,J)$ является объединением блоков:

$$L(I,J) = B(I,J,P_1) \cup B(I,J,P_2) \cup \ldots B(I,J,P_{2k-1}).$$

Если мы раскрасим каждый блок из $L(I,J)$ независимо, то получим раскраску множества $L(I,J)$ в $(1+o(1))(2k-1)\frac{k}{2\log_2 k}$ цветов. Так как $R(I,J) = L(I,J)\cup L(J,I)$, то снова раскрасив обе части независимо, получим раскраску множества $R(I,J)$ в $(1+o(1))2(2k-1)\frac{k}{2\log_2 k} = (1+o(1))(2k-1)\frac{k}{\log_2 k}$ цветов. К сожалению, это в два раза больше цветов, чем требуется.

Однако мы уже знаем, что вместо блоков можно рассматривать симметричные блоки. Таким образом, мы уменьшим общее число, скобинировав раскраски для $L(I,J)$ и $L(J,I)$. А именно, пусть множество $I$ разбито на паросочетания $P_i$, а $J$ with a — разбито на паросочетания $Q_i$, где $i = \{1, 2, \ldots, 2k-1\}$. Тогда множество $R(I,J)$ представляет собой объединение симметричных блоков:

$$R(I,J) = B(I,J,P_1,Q_1) \cup B(I,J,P_2,Q_2) \cup \ldots \cup B(I,J,P_{2k-1},Q_{2k-1}).$$

Так как мы знаем, что любой симметричный блок $B(I,J,P_i,Q_i)$ может быть раскрашен в $(1+o(1))\frac{k}{2\log_2 k}$ цветов с вероятностью не меньше $1-8ke^{-k}$, мы получаем раскраску множества $R(I,J)$ в $(1+o(1))(2k-1)\frac{k}{2\log_2 k}$ цветов с вероятностью не меньше $1-16k^2e^{-k}$.

### 2.2. Разделяй и властвуй

Теперь мы можем приступить к раскраске всего графа $G_{1/2}(n,3,1)$. Пусть $k = \lfloor n/4 \rfloor$ и $n = 4k + r$. Можно разбить множество $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ на две части и «остаток»: $I_1^1 = \{1, 2, \ldots, 2k\}$, $I_2^1 = \{2k+1, 2k+2, \ldots, 4k\}$, $T_1^1 = \{4k+1, 4k+2, \ldots, 4k+r\}$. Обратите внимание, что $T_1^1$ может, в принципе, быть пустым.

Начем с того, что рассмотрим все тройки, содержащие хотя бы один элемент из множества $T_1^1$. Для того чтобы раскрасить все эти тройки, мы рассмотрим множество всех пар $(x, y)$ таких, что $x \in [n]$ и $y \in T_1^1$. Для каждой такой пары множество троек, содержащих оба элемента $x$ и $y$, образуют независимое множество в графе $G(n,3,1)$, так как все такие тройки пересекаются по двум элементам. Таким образом, мы получаем раскраску в $n \times |T_1^1| \leqslant 4n$ цветов для множества всех троек, содержащих хотя бы один элемент из $T_1^1$.

Теперь раскрасим тройки из множества $R(I_1^1, I_2^1)$: напомним, что это множество содержит все тройки, которые содержат ровно один элемент из $I_1^1$ и два элемента из $I_2^1$, или наоборот. Из предыдущего параграфа ясно, что такое множество троек может быть раскрашено в $(1+o(1))(2k-1)\frac{k}{2\log_2 k} = (1+o(1))\frac{k^2}{\log_2 k} = (1+o(1))\frac{n^2}{16\log_2 n}$ цветов с вероятностью не меньше $1 - 16k^2e^{-k} > 1 - 16n^2e^{-n/\log_2 n}$.

Цвета, полученные в двух предыдущих абзацах, образуют *первый слой* оптимальной раскраски: этот слой состоит из всех троек, не содержащихся целиком ни в $I_1^1$, ни в $I_2^1$. Таким образом, осталось лишь раскрасить тройки, которые состоят из трех элементов множества $I_1^1$ или из трех элементов множества $I_2^1$.

Для этого мы применим тот же самый алгоритм рекурсивно: разобьем множество $I_1^1$ на две половины $I_1^2$, $I_2^2$ и остаток $T_1^2$, затем раскрасим все тройки множества $R(I_1^2, I_2^2)$ в $(1+o(1))\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{16\log_2 n}$ цветов, так как общее число элементов уменьшилось вдвое. Таким же образом мы можем разбить множество $I_2^1$ на две половины $I_3^2$, $I_4^2$ и остаток $T_2^2$ и раскрасить множество троек $R(I_3^2, I_4^2)$ в $(1+o(1))\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{16\log_2 n}$ цветов. Так как множества $I_1^1$ и $I_2^1$ не пересекаются, мы можем раскрасить объединение этих множеств $R(I_1^2, I_2^2) \cup R(I_3^2, I_4^2)$ в то же самое количество цветов: для этого мы можем взять объединение цветов с одинаковыми номерами в раскрасках каждого из множеств. Мы также раскрасим все тройки, содержащие хотя бы один элемент из $T_1^2$ или $T_2^2$, это добавит лишь $2n$ дополнительных цветов. Вместе все описанные в этом абзаце цвета образуют *второй слой* оптимальной раскраски: этот слой состоит из троек, которые не содержатся в первом слое и которые не содержатся целиком ни в одном из множеств $I_1^2$, $I_2^2$, $I_3^2$ или $I_4^2$. Вероятность того, что мы сможем предъявить раскраску $R(I_1^2, I_2^2)$ в нужное число цветов, не меньше $1 - 16k^2e^{-k}$, где $k = \lfloor n/8 \rfloor$. Так как нужно раскрасить и второе множество $R(I_3^2, I_4^2)$, вероятность того, что мы сможем раскрасить оба множества в нужное число цветов, не меньше $1 - 32k^2e^{-k} > 1 - 16n^2e^{-n/\log_2 n}$. Таким образом, мы сможем раскрасить второй слой в нужное число цветов с вероятностью не меньше $1 - 16n^2e^{-n/\log_2 n}$.

Будем продолжать рекурсивный процесс: пусть мы уже получили $t$ слоев раскраски. На данном этапе у нас имеются $2^t$ множеств $I_r^t$, где $r \in \{1, 2, \ldots, 2^t\}$. Каждое из $I_r^t$ мы разобьем на две половины $I_{2r-1}^{t+1}$, $I_{2r}^{t+1}$ и остаток $T_r^{t+1}$. Мы раскрасим все вершины, содержащие хотя бы один элемент из какого-либо из остаточных множеств $T_{t+1}^r$, и для этого нам потребуется не более $2^t n$ цветов. Затем, мы раскрасим каждое из множеств $R(I_{2r-1}^{t+1}, I_{2r}^{t+1})$ для $r \in \{1, 2, \ldots, 2^t\}$ в $(1+o(1))\frac{\left(\frac{n}{2^t}\right)^2}{16\log_2 n}$ цветов, и так как множества $I_r^t$ не пересекаются при разных значениях $r$, мы можем объединить цвета с одинаковыми номерами. Полученные цвета образуют слой $t+1$ оптимальной раскраски, и вероятность получения данной раскраски не меньше $1 - 16 \cdot 2^{t-1}\left(n/2^t\right)^2 e^{-n/2^t} > 1 - 16n^2e^{-n/\log_2 n}$, если $t \leqslant \log_2\log_2 n$.

К сожалению, мы можем продолжать рекурсивный процесс, лишь пока $|I_r^t| = \Omega\left(n/\log_2 n\right)$ — в противном случае мы не можем гарантировать оценку вероятности на существование нужной раскраски. Однако мы можем ракрасить первые $\lfloor \log_2\log_2 n \rfloor$ слоев этим способом, этого нам уже будет достаточно. Так как для раскраски слоя с номером $t$ мы используем $(1+o(1))\frac{\left(\frac{n}{2^{t-1}}\right)^2}{16\log_2 n}$ цветов, то общее число цветов, использованных для расраски всех первых $\lfloor \log_2\log_2 n\rfloor$ слоев, не превосходит

$$\sum_{t=1}^{\lfloor \log_2\log_2 n\rfloor}(1+o(1))\frac{\left(\frac{n}{2^{t-1}}\right)^2}{16\log_2 n}=(1+o(1))\frac{n^2}{16\log_2 n}\sum_{t=1}^{\lfloor \log_2\log_2 n\rfloor}\left(\frac{1}{2^{t-1}}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant(1+o(1))\frac{n^2}{16\log_2 n}\sum_{t=0}^{\lfloor \log_2\log_2 n\rfloor-1}\left(\frac{1}{4}\right)^t.$$

Последняя сумма может быть оценена сверху как

$$(1+o(1))\frac{n^2}{16\log_2 n}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^t=(1+o(1))\frac{n^2}{16\log_2 n}\frac{1}{1-1/4}=(1+o(1))\frac{n^2}{12\log_2 n}.$$

Вероятность существования нужной раскраски для каждого отдельного слоя не меньше $1-16n^2e^{-n/\log_2 n}$, поэтому вероятность существования раскраски для всех слоев $t\leqslant\log_2\log_2 n$ не меньше $1-16\log_2\log_2 n\cdot n^2e^{-n/\log_2 n}\geqslant 1-16n^3e^{-n/\log_2 n}$.

Так как мы остановили рекурсивный процесс на слое $t=\lfloor \log_2\log_2 n\rfloor$, у нас осталось не более $2^t\sim\log_2 n$ множеств $I_1^t, I_2^l, \ldots, I_{2^t}^t$, и нам необходимо раскрасить тройки, состоящие целиком из элементов одного из множеств $I_r^t$, для всех $r\in\{1,2,\ldots,2^t\}$. Так как каждое из множеств $I_r^t$ имеет размер не $O(n/\log_2 n)$, мы можем проигнорировать случайность и просто раскрасить граф в $O((n/\log_2 n)^2)$ цветов по теореме 2. Так как множества $I_r^t$ не пересекаются при разных $r$, мы можем раскрасить объединение множеств $I_r^t$ в то же число цветов. Полученное число цветов на раскраску всех этих множеств асимптотическии меньше числа цветов $O(n^2/\log_2 n)$, которое нам требуется. Таким образом, искомая раскраска всего случайного графа получена.

---

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского Научного Фонда (проект N 16-11-10014).

## Литература

**1.** *Nagy Z.* A certain constructive estimate of the Ramsey number // Mat. Lapok. 1972. I. 23. P. 301–302.

**2.** *Larman D.G. and Rogers C.A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. I. 19:1. P. 1–24.

**3.** *Balogh J., Kostochka A.V., Raigorodskii A.M.* Coloring some finite sets in $\mathbb{R}^n$ // Discussiones Mathematicae Graph Theory. 2013. I. 33, N 1. P. 25–31.

**4.** *Lovász L.* Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1978. I. 25(3). P. 319–324.

**5.** *Bollobás B.* The chromatic number of random graphs // Combinatorica. 1988. I. 8. P. 49–55.

**6.** *Боголюбский Л.И., Гусев А.С., Пядеркин М.М., Райгородский А.М.* Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов // Матем. сборник. 2015. Т. 206. № 10. P. 3–36.

**7.** *Гусев А.С.* Новая верхняя оценка хроматического числа случайного подграфа дистанционного графа // Матем. заметки. 2015. Вып. 97, № 3. С. 342–349.

**8.** *Пядеркин М.М.* Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2016. Вып. 99, N 2. С. 288–297.

**9.** *Frankl P., Füredi Z.* Forbidding just one intersection // Journal Combin. Theory A. 1985. I. 39. P. 160–176.

**10.** *Erdős P., Ko C., Rado R.*, Intersection theorems for systems of finite sets // Quart. J. Math. Oxford. 1961. I. 12. P. 313–320.

**11.** *Bollobás B., Narayanan B.P., Raigorodskii A.M.* On the stability of the Erdős–Ko–Rado theorem // J. Comb. Th. Ser. A. 2016. I. 137. P. 64–78.

**12.** *Balogh J., Bollobás B., Narayanan B.P* Transference for the Erdős–Ko–Rado theorem // Forum of Mathematics, Sigma. 2015. V. 3.

**13.** *Das S., Tran T.* A simple removal lemma for large nearly-intersecting families // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2015. I. 49. P. 93–99.

**14.** *Devlin P., Kahn J.* On «stability» in the the Erdős–Ko–Rado theorem // SIAM J. Discrete Math. 2016. I. 30(2). P. 1283–1289.

**15.** *Черкашин Д.Д., Райгородский А.М.* О хроматических числах пространств малой размерности // Доклады РАН. 2017. Т. 472, № 1. С. 11–12.


## References


**1.** *Nagy Z.* A certain constructive estimate of the Ramsey number. Mat. Lapok. 1972. I. 23. P. 301–302.

**2.** *Larman D.G. and Rogers C.A.* The realization of distances within sets in Euclidean space. Mathematika. 1972. I. 19:1. P. 1–24.

**3.** *Balogh J., Kostochka A.V., Raigorodskii A.M.* Coloring some finite sets in $\mathbb{R}^n$. Discussiones Mathematicae Graph Theory. 2013. I. 33, N 1. P. 25–31.

**4.** *Lovász L.* Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy. Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1978. I. 25(3). P. 319–324.

**5.** *Bollobás B.* The chromatic number of random graphs. Combinatorica. 1988. I. 8. P. 49–55.

**6.** *Bogolyubskiy L.I., Gusev A.S., Pyaderkin M.M., Raigorodskii A.M.* The independence numbers and the chromatic numbers of random subgraphs of some distance graphs. Sb. Math. 2015. T. 206, N 10. P. 3–36.

**7.** *Gusev A.S.* New upper bound for a chromatic number of a random subgraph of a distance graph. Math. notes. 2015. I. 97, N 3. P. 342–349.

**8.** *Pyaderkin M.M.* The independence number of a random subgraph of a certain distance graph. Math. notes. 2016. I. 99, N 2. P. 288–297.

**9.** *Frankl P., Füredi Z.* Forbidding just one intersection. Journal Combin. Theory A. 1985. I. 39. P. 160–176.

**10.** *Erdős P., Ko C., Rado R.* Intersection theorems for systems of finite sets. Quart. J. Math. Oxford. 1961. I. 12. P. 313–320.

**11.** *Bollobás B., Narayanan B.P., Raigorodskii A.M.* On the stability of the Erdős–Ko–Rado theorem. J. Comb. Th. Ser. A. 2016. I. 137. P. 64–78.

**12.** *Balogh J., Bollobás B., Narayanan B.P* Transference for the Erdős–Ko–Rado theorem. Forum of Mathematics, Sigma. 2015. Vol. 3.

**13.** *Das S., Tran T.* A simple removal lemma for large nearly-intersecting families. Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2015. I. 49. P. 93–99.

**14.** *Devlin P., Kahn J.* On «stability» in the the Erdős–Ko–Rado theorem. SIAM J. Discrete Math. 2016. I. 30(2). P. 1283–1289.

**15.** *Cherkashin D.D., Raigorodskii A.M.* On the chromatic numbers of small-dimensional spaces. Doklady of the Russian Acad. Sci. 2017. V. 472, N 1. P. 11–12.


*Поступила в редакцию 09.11.2018*