УДК 533.6.011
DOI: 10.53815/20726759_2021_13_3_144

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения

Рассматривается стационарное течение идеального совершенного газа, сформированное в сверхзвуковом однородном набегающем потоке за отошедшим скачком уплотнения перед телом с выпуклой носовой частью в общем пространственном случае (несимметричное обтекаемое тело или симметричное тело под углом атаки). Предполагается, что в области между скачком и выпуклой головной частью обтекаемого тела скорость равна нулю только в передней точке торможения. С использованием известных закономерностей, вытекающих из уравнений Эйлера, показывается, что векторное произведение завихренности и скорости отлично от нуля всюду, кроме линии тока, пересекающей скачок по нормали (где завихренность равна нулю), и точки торможения (где скорость равна нулю).

Ключевые слова: критерий Гельмгольца–Зоравского, изоэнтальпийные течения, завихренность, отошедший скачок уплотнения.

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology

On the collinearity of vortex and the velocity behind a detached bow shock

We consider a steady flow of an ideal perfect gas formed in a supersonic homogeneous incoming flow behind a detached shock wave in front of a convex body in the general spatial case (asymmetrical streamlined body or symmetrical body at an angle of attack). It is assumed that in the region between the shock and the convex head part of the streamlined body, the velocity is zero only at the forward stagnation point. Using the regularities following from the Euler equations, it is shown that the vector product of vorticity and velocity is nonzero everywhere, except for the streamline intersecting the shock along the normal (on this streamline, the vorticity is zero) and except for stagnation point (where the velocity is zero).

Key words: Helmholtz–Zoravsky criterion, isenthalpic flows, vorticity, detached shock wave.

1. Введение

При обтекании однородным сверхзвуковым потоком отошедший головной скачок уплотнения образуется около тела с затупленной носовой частью или с большим углом наклона в передней угловой точке, превышающим предельный угол, до которого возможен присоединенный скачок. Поверхность этого скачка искривленная и выпуклая в сторону набегающего потока, поэтому течение за ним вихревое. Для общего пространственного случая показано [1], что в течении за отошедшим скачком уплотнения вихревые линии замкнуты и один раз охватывают линию тока, которая пересекает скачок по нормали (лидирующая линия тока).

В [1] показано, что всюду, кроме лидирующей линии тока и передней точки торможения, завихренность отлична от нуля. При этом на самой лидирующей линии тока завихренность равна нулю. В общем несимметричном случае вопрос о завихренности в передней точке торможения в настоящее время остается открытым. Однако в [2] при дополнительном предположении о *гладкости* несимметричной выпуклой носовой части показано, что завихренность в передней точке торможения равна нулю, а лидирующая линия тока совпадает с линией торможения. В любом случае векторное произведение скорости газа $\mathbf{V}$ и завихренности $\mathbf{\Omega} = \mathbf{rot}\mathbf{V}$ на всей лидирующей линии тока и в передней точке торможения равно нулю. При этом в остальных точках течения (в такой области между скачком и носовой частью, в которой нет других скачков и иных разрывов) как завихренность, так и скорость отличны от нуля. В осесимметричном случае угол между завихренностью и скоростью равен 90 градусам. В несимметричном случае этот угол может отличаться от 90 градусов. Основной результат статьи [3] состоит в обосновании того, что векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии замкнуты и один раз охватывают лидирующую линию тока. При этом в [3] без доказательства было принято (и использовано для получения основного результата), что ненулевые скорость и завихренность не могут быть коллинеарными (то есть всюду $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} \neq 0$, если только $|\mathbf{\Omega}| \cdot |\mathbf{V}| \neq 0$). В настоящей статье приводится доказательство этого утверждения. При этом рассматривается такая область течения между скачком и носовой частью, в которой нет других скачков и иных разрывом. В такой области параметры течения будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми.

2. Движение воображаемой среды

Сформулируем следствие из критерия Гельмгольца–Зоравского [4] для частного случая стационарного и соленоидального векторного поля $\mathbf{c}$.

Если в области G выполнено равенство

$$\mathbf{c} \times \mathbf{rot}(\mathbf{c} \times \mathbf{q}) = 0, \tag{1}$$

где $\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$, $\partial \mathbf{q}/\partial t = 0$ *и* $\partial \mathbf{c}/\partial t = 0$, *то воображаемые частицы, составляющие в некоторый момент времени сегмент векторной линии* $\mathbf{c}$, *лежащий в области* G, *двигаясь со скоростью* $\mathbf{q}$, *будут составлять сегмент одной из векторных линий* $\mathbf{c}$ *в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти частицы находятся в области* G*).* Такие воображаемые частицы будем называть q-частицами. Ниже в качестве вектора $\mathbf{c}$ будет рассмотрен вектор завихренности $\mathbf{\Omega} = \mathbf{rot}\mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ – скорость газа.

Исходя из анализа полных (без каких-либо упрощающих допущений) уравнений Эйлера, в [1] доказано следующее.

Утверждение 1. *Вихревые линии стационарных изоэнергетических (изоэнтальпийных) течений газа переносятся воображаемыми частицами, движущимися со скоростью* $\mathbf{q}_0 = (\rho/\rho_0)^{1-k}\mathbf{V}$, *где* ρ_0 *– произвольная положительная константа, имеющая размерность плотности.*

Поскольку рассматриваемый в настоящей статье набегающий сверхзвуковой поток однороден, течение за скачком будет изоэнергетическим, и для него справедливо утверждение 1. При доказательстве этого утверждения в [1] было показано, что $\mathbf{q}_0$ удовлетворяет (1), если под вектором $\mathbf{c}$ понимать завихренность $\mathbf{\Omega}$. В силу свойств векторного произведения, поле скорости $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \lambda\mathbf{\Omega}$, где λ – произвольное гладкое скалярное поле, также будет удовлетворять уравнению (1). Отсюда, с учетом замкнутости вихревых линий (см. введение), вытекает следующее.

Утверждение 2. *q–частицы, составляющие замкнутую вихревую линию в некоторый момент времени, двигаясь со скоростью* $\mathbf{q}_1 = (\rho/\rho_0)^{1-k}\mathbf{V} - \lambda\mathbf{\Omega}$, *где* λ *– произвольное гладкое скалярное поле, будут составлять одну из замкнутых вихревых линий в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти частицы находятся в рассматриваемой области течения).*

Как сказано во введении, основной результат [3] опирается на предположение о том, что при ненулевых скорости и завихренности векторное произведение $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}$ отлично от нуля. Ниже будет использовано следующее утверждение, полученное в [3], при выводе которого предположение $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} \neq 0$ не использовалось (и поэтому следующее утверждение можно использовать при доказательстве того факта, что $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} \neq 0$).

Утверждение 3. *Пусть в течении за отошедшим головным скачком замкнутая кривая лежит на изоэнтропийной поверхности и один раз охватывает лидирующую линию тока (линию нулевой завихренности). Тогда циркуляция скорости газа по такой кривой равна нулю.*

3. Угол между скоростью и завихренностью

Покажем, что всюду за скачком перед головной частью обтекаемого тела, кроме лидирующей линии и передней точки торможения, угол φ между скоростью $\mathbf{V}$ и завихренностью $\mathbf{\Omega}$ отличен от нуля и от 180 градусов. Как было замечено во введении, в остальных точках течения (в такой области между скачком и носовой частью, в которой нет других скачков и иных разрывов), как завихренность, так и скорость отличны от нуля.

Допустим, что в некоторой точке A, не лежащей на лидирующей линии и не совпадающей с передней точкой торможения, угол φ равен нулю или 180 градусам. Тогда существует такая константа $b_0 \neq 0$, что

$$\mathbf{V}(A) = b_0 \mathbf{\Omega}(A). \tag{2}$$

Обозначим через γ – (замкнутую) вихревую линию, проходящую через точку A.

Рассмотрим воображаемую жидкость, частицы которой движутся со скоростью

$$\mathbf{q}_2 = (\rho/\rho_0)^{1-k}\mathbf{V} - b_0(\rho/\rho_0)^{1-k}\mathbf{\Omega}. \tag{3}$$

Согласно утверждению 2, q_2-частицы, составляющие вихревую линию γ в некоторый момент времени, двигаясь со скоростью $\mathbf{q}_2$, продолжают составлять одну из вихревых линий. Из равенства (2) следует, что $\mathbf{q}_2(A) = 0$, т.е. q_2-частица, находящаяся в точке A, неподвижна. Поэтому остальные q_2-частицы, составляющие в начальный момент вихревую линию γ, двигаясь со скоростью $\mathbf{q}_2$, продолжают составлять эту же линию. Это возможно только, если они покоятся или движутся вдоль γ. В любом случае на всей линии γ выполнено равенство $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{q}_2 = 0$. Отсюда, с использованием (3), получаем, что на всей линии γ выполнено равенство $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$. Поскольку завихренность и скорость отличны от нуля, последнее равенство означает, что скалярное произведение скорости V на единичный касательный к вихревой линии γ вектор $\mathbf{e}_\Omega = \mathbf{\Omega}/\Omega$ либо строго больше нуля, либо строго меньше нуля. Следовательно, циркуляция скорости по (замкнутой) вихревой линии γ отлична от нуля (и при этом, как следует из уравнений Эйлера, записанных в форме Крокко [5], все вихревые линии лежат на изоэнтропийных поверхностях). Но это противоречит утверждению 3. Из полученного противоречия вытекает, что всюду за скачком перед головной частью обтекаемого тела, кроме лидирующей линии тока и передней точки торможения, угол φ между скоростью $\mathbf{V}$ и завихренностью $\mathbf{\Omega}$ отличен от нуля и от 180 градусов, и

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} \neq 0.$$

4. Заключение

С использованием критерия Гельмгольца–Зоравского уточнена картина течения идеального газа за отошедшим скачком уплотнения. Показано, что в такой области между скачком и носовой частью, в которой нет других скачков и иных разрывов всюду, кроме лидирующей линии и передней точки торможения, завихренность неколлинеарна скорости. Тем самым устранен пробел в доказательстве основного результата статьи [3].

Литература

1. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* On the Vorticity Behind 3-D Detached Bow Shock Wave // Advances in Aerodynamics. 2019. V. 1, N 15.
2. *Сизых Г.Б.* Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // ПММ. 2019. Т. 83, вып. 3. С. 377–383.
3. *Sizykh G.B.* System of Orthogonal Curvilinear Coordinates on the Isentropic Surface behind a Detached Bow Shock Wave // Fluid Dyn. 2020. V. 55, N 7. P. 899–903.
4. *Truesdell C.* The Kinematics of Vorticity. Bloomington : Indiana University Press, 1954.
5. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Москва : ИЛ, 1961.

References

1. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* On the Vorticity Behind 3-D Detached Bow Shock Wave. Advances in Aerodynamics. 2019. V. 1, N 15.
2. *Sizykh G. B.* Entropy Value on the Surface of a Non-Symmetric Convex Bow Part of a Body in the Supersonic Flow. Fluid Dyn. 2019. V. 54, N 7. P. 907–911.
3. *Sizykh G. B.* System of Orthogonal Curvilinear Coordinates on the Isentropic Surface behind a Detached Bow Shock Wave. Fluid Dyn. 2020. V. 55, N 7. P. 899–903.
4. *Truesdell C.* The Kinematics of Vorticity. Bloomington : Indiana University Press, 1954.
5. *Von Mises R.* Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. Moscow : IL, 1961.

Поступила в редакцию 14.07.2021