

УДК 533.6.011.8

*С. Л. Горелов<sup>1,2</sup>, В. Л. Нгуен<sup>2</sup>*<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

## Затупленное осесимметричное тело минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа

Для тела вращения со степенной образующей и плоским затуплением вычисляется сила сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей. Решением вариационной задачи определяется степень в образующей тела минимального сопротивления и радиус затупления в зависимости от удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

**Ключевые слова:** гиперзвуковой поток, локальные модели, аэродинамическое сопротивление тела вращения, вариационная задача.

*S. L. Gorelov<sup>1,2</sup>, V. L. Nguyen<sup>2</sup>*<sup>1,2</sup>Central Aerohydrodynamic Institute named after professors N. E. Zhukovsky<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology

## Blunted axisymmetric body with a minimal resistance in the hypersonic rarefied gas flow

We calculate for a rotational body with the degree of the generatrix, the resistive force in the hypersonic rarefied gas flow using several local models. The order of the generatrix of a body with a minimal resistance and the blunted radius depending on the elongation in a wide range of Reynolds numbers are determined by solving the variational problem.

**Key words:** hypersonic flow, local models, aerodynamic resistance of a rotational body, variational problem.

### 1. Введение

Построение тела, оптимального по одной из интегральных характеристик движения (сопротивлению или теплоотдаче), является актуальной проблемой механики. Интерес к этой области науки обусловлен нуждами авиационно-космической промышленности и связан с необходимостью совершенствования ракетной и авиационной техники.

Решения задач оптимизации формы тела по интегральным характеристикам движения возможны лишь при наличии соотношений, явно связывающих силы, действующие на поверхности контакта среды и тела, с формой его поверхности. Параметры среды при обтекании тела находятся из решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Задача оптимизации формы тела в такой постановке, базирующейся на точных уравнениях такого рода, для большинства сред практически не разрешима. В этих случаях естественно искать упрощения, позволяющие найти приближенное решение. В первую очередь они делаются для сил, действующих на поверхности тела, для которых используются формулы, полученные из приближенных моделей.

Для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе, широкое распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности

тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Эта зависимость может включать в себя скорость движения и характеристики среды, которые считаются постоянными. Примером такой зависимости является формула Ньютона, используемая в гиперзвуковой аэродинамике для оценочных расчетов распределения давления на поверхности тела или зависимости, полученные из модели свободномолекулярного движения для сильно разреженных газов. Использование таких формул позволяет записать силы, действующие на тело, в виде интегралов по поверхности, и методами вариационного исчисления они могут быть исследованы на экстремум.

Классическая задача построения тела вращения минимального сопротивления с использованием формулы Ньютона решалась во многих работах [1–6]. Были разработаны эффективные численные методы решения таких задач [7]. В связи с развитием космической техники появился интерес к оптимальным задачам высокоскоростной аэродинамики на больших высотах в разреженном газе [8–10].

Дальнейшее упрощение таких задач связано с использованием целевых функций разного вида зависящих от некоторого количества параметров, по которым и производится оптимизация [11–13]. В частности, широкое распространение получила степенная целевая функция [14, 15]. В данной работе использование целевой степенной функции вместе с локальными методами [15–18] (формулы свободномолекулярной аэродинамики, формула Ньютона, формулы локального метода гиперзвуковой аэродинамики) позволило свести вариационную задачу минимизации функционала (сопротивление тела вращения) к задаче поиска экстремума функции от одной или двух переменных. Решаются задачи об определении формы затупленных тел вращения в гиперзвуковом потоке разреженного газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

## 2. Форма тела вращения минимального сопротивления большого удлинения

Задано тело вращения длиной  $L$  и радиусом основания  $R$ . Требуется определить форму образующей  $x(r)$ , такую, при которой это тело имеет минимальное сопротивления в гиперзвуковом потоке газа. Скорость газа  $V_\infty$  направлена вдоль оси вращения  $Ox$ .  $\theta$  – угол между внутренней нормалью  $n$  и вектором скорости.

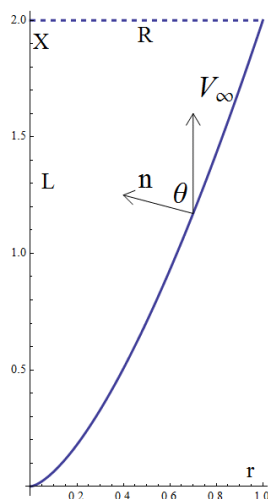


Рис. 1. Схема обтекания тела вращения

$C_p$  и  $C_\tau$  – нормальная и касательная аэродинамические силы, действующие на элемент поверхности  $ds$ , отнесенные к скоростному напору  $\rho V_\infty^2/2$  ( $\rho$  – плотность газа) и площади этого элемента. Тогда коэффициент сопротивления  $C_x$  (аэродинамическая сила, действующая на тело вдоль вектора скорости, отнесенная к скоростному напору и характерной площади, в данном случае – это площадь основания, то есть  $\pi R^2$ ) будет равен

$$C_x = \frac{2}{R^2} \int_0^R (C_p \cdot \cos \theta + C_\tau \cdot \sin \theta) r \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2} dr. \quad (1)$$

Здесь

$$\cos \theta = \left(1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2\right)^{-1/2}. \quad (2)$$

Рассмотрим два случая применения локальных методов: формула Ньютона и свободномолекулярное приближение. В случае формулы Ньютона

$$C_p = 2 \cos^2 \theta, \quad C_\tau = 0.$$

Уравнение (1) запишется следующим образом (линейные размеры отнесены к  $R$ ):

$$C_x = 4 \int_0^1 \frac{r}{1 + (dx/dr)^2} dr. \quad (3)$$

Будем рассматривать случай большого удлинения, то есть  $dx/dr \sim L/R = \lambda \gg 1$ . В интеграле (3) пренебрегаем единицей по сравнению с квадратом производной. Если подынтегральную функцию обозначить  $F(r, dx/dr)$ , то уравнение Эйлера [4] будет иметь вид  $\frac{\partial}{\partial u} F(r, u) = C$ ,  $u = dx/dr$ , и при  $x(0) = 0$ ,  $x(R) = L$  решение будет иметь вид

$$x = L \left(\frac{r}{R}\right)^{4/3}. \quad (4)$$

Или в безразмерном виде  $x = \lambda \cdot r^{4/3}$ . Коэффициент сопротивления равен

$$C_x = \frac{27}{16\lambda^2}. \quad (5)$$

В свободномолекулярном высокоскоростном приближении [16, 17]

$$\begin{aligned} C_p &= 2 \cos^2 \theta + z \cos \theta, \quad z = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma}, \\ C_\tau &= 2 \cos \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $t_w = T_w/T_0$  – температурный фактор,  $T_w$  – температура поверхности тела,  $T_0$  – температура торможения,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Уравнение (1) запишется в виде

$$C_x = 2 + 2z \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 + (dx/dr)^2}} dr. \quad (7)$$

При больших удлинениях, используя уравнение Эйлера, получаем

$$x = \lambda \cdot r^{3/2}. \quad (8)$$

Коэффициент сопротивления равен

$$C_x = 2 + \frac{8z}{9\lambda}. \quad (9)$$

Свободномолекулярное приближение и приближение Ньютона в некотором смысле можно считать предельными случаями разреженности газа: свободномолекулярное приближение – это сильно разреженный газ, а приближение Ньютона – это сплошная среда. Отметим, что форма тела вращения минимального сопротивления при большом удлинении представляет собой степенную функцию, причем величина степени зависит от разреженности газа.

### 3. Тела вращения произвольного удлинения

Как уже отмечалось, форма тела вращения минимального сопротивления при большом удлинении представляет собой степенную функцию, причем величина степени зависит от разреженности газа. Естественно для произвольных удлинений в качестве целевой выбрать степенную функцию

$$x = L (r/R)^\beta. \quad (10)$$

В этом случае задачу можно сформулировать так: найти величину  $\beta$ , такую, чтобы коэффициент сопротивления был минимален при заданной величины  $\lambda$ . В случае модели Ньютона уравнение для величины коэффициента сопротивления запишется в виде гипер-

геометрической функции  $F[a, b, c, d]$ :

$$Cx = 4 \int_0^1 \frac{r}{1 + (\lambda\beta r^{\beta-1})^2} dr = 2F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\beta^2\lambda^2\right). \tag{11}$$

Таким образом, задача вариационного исчисления свелась к поиску минимума функции одной переменной. В табл. 1 представлены величины  $\beta$  и  $Cx$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ . Заметим, что во многих работах ось вращения – это ось  $Ox$ . В этом случае величина показателя степени в степенной функции  $\alpha = \beta^{-1}$ . В табл. 1 также представлена величина  $\alpha$ .

Т а б л и ц а 1

$\lambda$	1	3	5	7	9	10	15	20
$\beta$	2.16	1.42	1.362	1.35	1.344	1.342	1.337	1.336
$\alpha$	0.463	0.704	0.734	0.741	0.744	0.745	0.749	0.749
$Cx$	0.803	0.17	0.064	0.034	0.018	0.017	0.0075	0.0042

На рис. 2. изображена зависимость  $\alpha = \beta^{-1}$  от удлинения  $\lambda$ . При больших удлинениях эта зависимость стремится к  $\alpha = 3/4 = 0.75$ , как получено в п. 1 для случая больших удлинений.

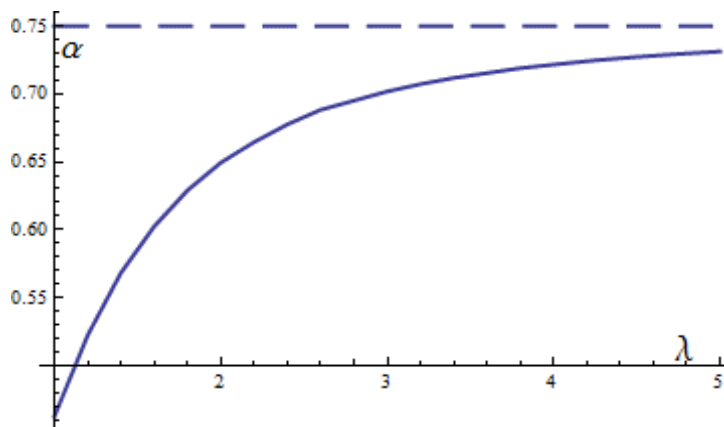


Рис. 2. Зависимость  $\alpha = \beta^{-1}$  от величины удлинения  $\lambda$

В случае свободномолекулярной модели, используя (7) и (10), коэффициент сопротивления выражается уравнением

$$Cx = 2 + 2z \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 + (\lambda\beta r^{\beta-1})^2}} dr = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\beta^2\lambda^2\right). \tag{12}$$

В табл. 2 представлены величины  $\beta, \alpha$  и  $Cx$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ .

Т а б л и ц а 2

$\lambda$	1	3	5	7	9	10	15	20
$\beta$	2.868	1.681	1.571	1.539	1.525	1.52	1.51	1.506
$\alpha$	0.349	0.595	0.636	0.65	0.656	0.658	0.662	0.664
$Cx$	2.182	2.083	2.052	2.038	2.029	2.084	2.018	2.013

На рис. 3. изображена зависимость  $\alpha = \beta^{-1}$  от удлинения  $\lambda$ . При больших удлинениях эта зависимость стремится к  $\alpha = 2/3 = 0.667$ , как получено в п. 1 для больших удлинений в свободномолекулярном случае.

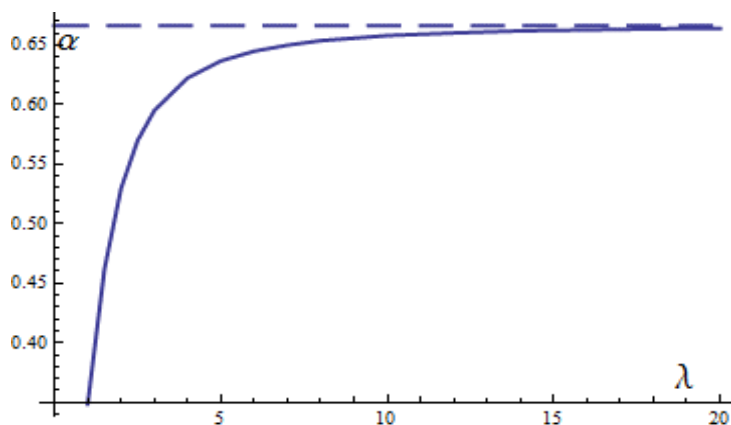


Рис. 3. Зависимость  $\alpha = \beta^{-1}$  от величины удлинения  $\lambda$ ,  $t_w = 0.1$ ,  $\gamma = 1.4$

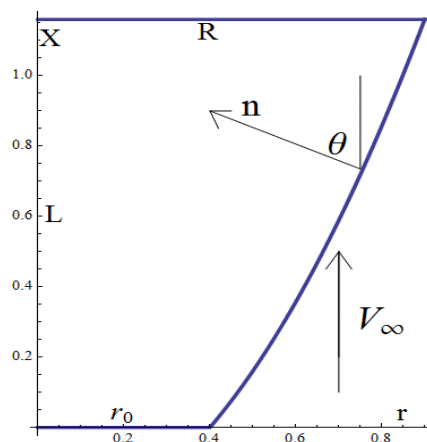


Рис. 4. Схема обтекания тела с плоским торцом

#### 4. Затупленные тела вращения большого удлинения

Известно [1], что тела вращения с плоским торцом имеют меньшее сопротивление, чем тела без затупления. Задано тело вращения длиной  $L$ , радиусом основания  $R$  и плоским торцом с радиусом  $r_0$ . Требуется определить форму образующей  $x(r)$  и величину  $r_0$ , такие, при которых это тело имеет минимальное сопротивление в гиперзвуковом потоке газа. В случае формулы Ньютона для торца  $Cp = 2$ , а для образующей  $Cp = 2 \cos^2 \theta$ . Уравнение для величины коэффициента сопротивления запишется в виде

$$Cx = 2 \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 + \frac{4}{R^2} \int_{r_0}^R \frac{r}{1 + (dx/dr)^2} dr. \quad (13)$$

Пренебрегая в (13) единицей по сравнению с квадратом производной из уравнения Эйлера, получаем так же, как в п. 1

$$x(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < r_0, \\ L \frac{r^{4/3} - r_0^{4/3}}{R^{4/3} - r_0^{4/3}}, & r_0 < r < R. \end{cases} \quad (14)$$

Уравнение для коэффициента сопротивления имеет вид (величина  $r_0$  отнесена к  $R$ ,  $\lambda = L/R$ ):

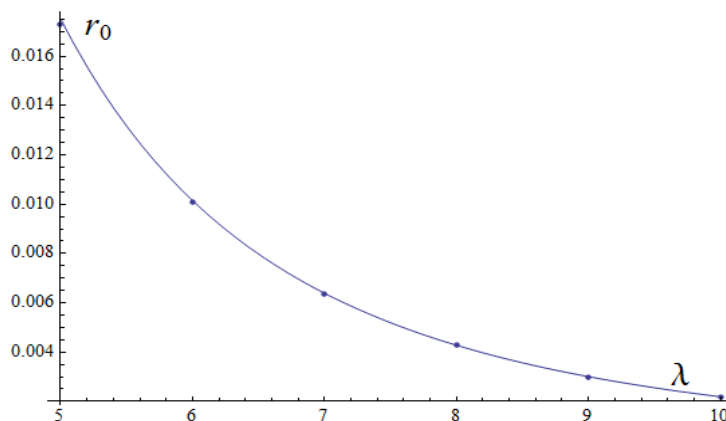
$$Cx = 2r_0^2 + \frac{27}{16\lambda^2} (1 - r_0^{4/3})^3. \quad (15)$$

При больших  $\lambda$  величины  $r_0$ , при которых достигается минимум  $Cx$ , представлены в табл. 3. Там же дано сравнение значений  $Cx$  для тел с затуплением и значений  $Cx_0$  без затупления.

Величины  $r_0$  зависят от значений удлинения  $\lambda$ . Для больших удлинений можно приближенно записать эту зависимость в виде  $r_0 = 2.19/\lambda^3$ . На рис. 5 показана эта зависимость.

Т а б л и ц а 3

$\lambda$	5	6	7	8	9	10
$r_0$	0.0173	0.0101	0.00637	0.00427	0.003	0.00219
$Cx$	0.0672	0.04677	0.0344	0.02635	0.02082	0.01687
$Cx_0$	0.0675	0.04687	0.03444	0.02637	0.02083	0.016875

Рис. 5. Зависимость  $r_0$  от удлинения  $\lambda$  в случае модели Ньютона. Точки — точные значения, линия — приближенная зависимость

Несмотря на то, что величина радиуса затупления мала, значение коэффициента сопротивления затупленного тела вращения меньше, чем в случае отсутствия затупления (хотя разница очень небольшая).

Аналогично рассмотрим свободномолекулярную модель газа. Используя уравнения (1), (6), (7), получим

$$Cx = 2 + z \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 + \frac{2z}{R^2} \int_{r_0}^R \frac{r}{\sqrt{1+x^2}} dr. \quad (16)$$

Вычисляя минимум интеграла в уравнении (16), так же, как в п. 1 получаем

$$x(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < r_0, \\ L \frac{r^{3/2} - r_0^{3/2}}{R^{3/2} - r_0^{3/2}}, & r_0 < r < R. \end{cases} \quad (17)$$

Уравнение для коэффициента сопротивления имеет вид (величина  $r_0$  отнесена к  $R$ ,  $\lambda = L/R$ ):

$$Cx = 2 + zr_0^2 + \frac{8z}{9\lambda} (1 - r_0^{3/2})^2. \quad (18)$$

При больших  $\lambda$  величины  $r_0$ , при которых достигается минимум  $Cx$  в свободномолекулярном случае, представлены в табл. 4,  $t_w = 0.1$ ,  $\gamma = 1.4$ . Там же дано сравнение значений  $Cx$  для тел с затуплением и значений  $Cx_0$  без затупления.

Т а б л и ц а 4

$\lambda$	5	6	7	8	9	10
$r_0$	0.069	0.048	0.0358	0.0275	0.021	0.017
$Cx$	2.052	2.044	2.037	2.032	2.0295	2.026
$Cx_0$	2.053	2.0443	2.038	2.033	2.0296	2.0267

Так же, как и в случае модели Ньютона, наличие затупления уменьшает величину коэффициента сопротивления. Величины  $r_0$  зависят от значений удлинения  $\lambda$ . Для больших удлинений можно приближенно записать эту зависимость в виде  $r_0 = 0.0011 + 1.687/\lambda^2$ . На рис. 6 показана эта зависимость.

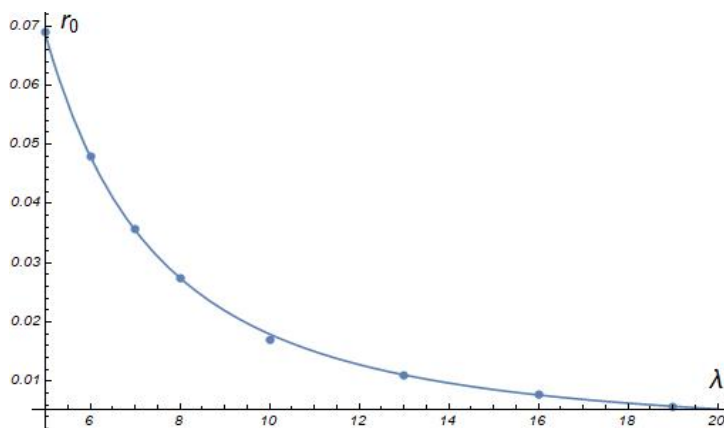


Рис. 6. Зависимость  $r_0$  от удлинения  $\lambda$  в свободномолекулярном случае,  $t_w = 0.1$ ,  $\gamma = 1.4$ . Точки – точные значения, линия – приближенная зависимость

## 5. Затупленные тела вращения произвольного удлинения

Для модели Ньютона запишем уравнение (13) в виде

$$Cx = 2r_0^2 + 4 \int_0^1 \frac{r}{1 + \left(\frac{\lambda \beta}{1-r_0^\beta} r^{\beta-1}\right)^2} dr - 4r_0^2 \int_0^1 \frac{r}{1 + \left(\frac{\lambda \beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} r^{\beta-1}\right)^2} dr =$$

$$= 2r_0^2 + 2F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda \beta}{1-r_0^\beta}\right)^2\right) - 2r_0^2 F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda \beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta}\right)^2\right). \quad (19)$$

Здесь  $F(a, b, c, d)$  – гипергеометрическая функция. Таким образом, вариационная задача свелась к поиску минимума функции (19) по двум переменным  $\beta$  и  $r_0$  при заданном удлинении  $\lambda$ .

В табл. 5 представлены результаты расчетов величин  $\beta$ ,  $\alpha = \beta^{-1}$  и  $r_0$  в зависимости от удлинения  $\lambda$ , при которых достигается минимум  $Cx$  и, для сравнения, величины  $Cx_0$  при тех же удлинениях, но без затупления ( $r_0 = 0$ ).

Т а б л и ц а 5

$\lambda$	$\beta$	$\alpha$	$r_0$	$Cx$	$Cx_0$
1	1.571	0.636	0.352	0.75	0.803
2	1.448	0.691	0.123	0.321	0.33
3	1.399	0.715	0.0498	0.165	0.167
4	1.375	0.727	0.0293	0.0982	0.0986
5	1.362	0.734	0.0131	0.0645	0.0646
6	1.355	0.738	0.00786	0.0454	0.0455
7	1.349	0.741	0.00507	0.0336	0.0337
8	1.346	0.743	0.00346	0.0259	0.0259
9	1.344	0.744	0.00246	0.0205	0.0205
10	1.342	0.745	0.00181	0.0167	0.0167
15	1.337	0.748	0.00055	0.00746	0.00746
20	1.335	0.749	0.00023	0.00421	0.00421

При малых удлинениях величина радиуса затупления велика, а коэффициент сопротивления существенно меньше, чем без затупления. Начиная с  $\lambda = 8$ , несмотря на затупление, коэффициент сопротивления становится практически одинаковым в обоих случаях.

## 6. Затупленные тела вращения – локальный метод для гиперзвуковых течений

Для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе, распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Эта зависимость включает в себя скорость движения и характеристики среды. Наибольшего распространения получила локальная модель из [17–18], в которой коэффициенты давления и трения равны

$$Cp = p_0 \cos^2 \theta + p_1 \cos \theta, \quad C\tau = \tau_0 \cos \theta \sin \theta. \quad (20)$$

Функции  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $\tau_0$  зависят от числа  $Re_0$ , температурного фактора  $t_w$  и показателя степени адиабаты  $\gamma$ :

$$p_0 = 2, \quad p_1 = z \exp[-(0.125 + 0.078t_w) Re_0], \quad z = \sqrt{\pi t_w \frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (21)$$

$$\tau_0 = \frac{5.23}{[s + 6.88 \exp(0.0072s - 0.000016s^2)]^{1/2}}, \quad s = Re_0 \left(\frac{3}{4}t_w + \frac{1}{4}\right)^{-2/3}.$$

Здесь  $t_w = T_w/T_0$  – температурный фактор,  $T_w$  – температура поверхности тела,  $T_0$  – температура торможения  $T_0 = T_\infty (1 + S^2 (\gamma - 1) / \gamma)$ ,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $Re_0 = \rho_\infty V_\infty R / \mu(T_0)$ ,  $\rho_\infty$ ,  $V_\infty$ ,  $T_\infty$  – плотность, скорость и температура невозмущенного потока газа,  $\mu(T_0)$  – коэффициент вязкости в зависимости от температуры торможения. Задано тело вращения длиной  $L$  и радиусом основания  $R$ . Требуется определить форму образующей  $x(r)$ , такую, при которой это тело имеет минимальное сопротивление в гиперзвуковом потоке газа. Скорость газа  $V_\infty$  направлена вдоль оси вращения  $Ox$ .  $\theta$  – угол между внутренней нормалью  $n$  и вектором скорости (рис. 4). Для затупленного степенного тела образующая имеет вид

$$x(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < r_0, \\ L \frac{r^\beta - r_0^\beta}{R^\beta - r_0^\beta}, & r_0 < r < R. \end{cases} \quad (22)$$

Сопротивление тела складывается из сопротивления плоского торца  $Cx_1$  с радиусом затупления  $r_0$  и поверхности вращения  $Cx_2$ :

$$Cx_1 = (p_0 + p_1) \frac{r_0^2}{R^2},$$

$$Cx_2 = \tau_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) + \frac{2}{R^2} (p_0 - \tau_0) \int_{r_0}^R \frac{r}{1+x^2} dr + \frac{2}{R^2} p_1 \int_{r_0}^R \frac{r}{\sqrt{1+x^2}} dr.$$

Используя гипергеометрическую функцию  $F[a, b, c, d]$ , можно записать (величина  $r_0$  отнесена к  $R$  и удлинение  $\lambda = L/R$ ):

$$Cx = Cx_1 + Cx_2 = \tau_0 + (p_0 + p_1 - \tau_0) r_0^2 +$$

$$+ (p_0 - \tau_0) \left\{ F \left[ 1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left( \frac{\beta\lambda}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] - r_0^2 F \left[ 1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left( \frac{\beta\lambda r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] \right\} + \quad (23)$$

$$+ p_1 \left\{ F \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left( \frac{\beta\lambda}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] - r_0^2 F \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left( \frac{\beta\lambda r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] \right\}$$

Задача свелась к нахождению минимума функции  $Cx$  по двум переменным  $\beta$  и  $r_0$  при фиксированных параметрах  $\lambda$ ,  $Re_0$ ,  $t_w$ ,  $\gamma$ . В табл. 6 даны значения  $\beta$ ,  $r_0$ ,  $Cx$  – коэффициент сопротивления с затуплением  $r_0$  и  $Cx_0$  – коэффициент сопротивления без затупления в зависимости от удлинения  $\lambda$  для разных чисел  $Re_0$ . Расчеты проводились для температурного фактора  $t_w = 0.1$  и  $\gamma = 1.4$ .



Т а б л и ц а 6

Re = 1.0					Re = 10.0				Re = 100.0			
$\lambda$	$\beta$	$r_0$	$Cx$	$Cx_0$	$\beta$	$r_0$	$Cx$	$Cx_0$	$\beta$	$r_0$	$Cx$	$Cx_0$
1	1.66	0.396	1.99	2.0	1.588	0.357	1.4	1.43	1.577	0.352	0.967	1.01
2	1.54	0.166	1.88	1.88	1.46	0.128	1.16	1.17	1.46	0.123	0.612	0.62
3	1.5	0.082	1.83	1.83	1.41	0.053	1.08	1.08	1.4	0.05	0.483	0.485
4	1.48	0.046	1.8	1.8	1.39	0.026	1.04	1.04	1.37	0.024	0.428	0.428
5	1.47	0.029	1.79	1.79	1.38	0.015	1.02	1.02	1.36	0.013	0.4	0.41
6	1.47	0.02	1.78	1.78	1.38	0.009	1.005	1.005	1.35	0.008	0.384	0.385
7	1.47	0.014	1.77	1.77	1.37	0.006	0.997	0.997	1.35	0.005	0.375	0.375
8	1.47	0.011	1.77	1.77	1.37	0.004	0.992	0.992	1.35	0.003	0.368	0.368
9	1.47	0.008	1.76	1.76	1.37	0.003	0.988	0.988	1.34	0.002	0.364	0.364
10	1.47	0.007	1.76	1.76	1.37	0.002	0.986	0.986	1.34	0.002	0.361	0.361
15	1.47	0.003	1.75	1.75	1.37	0.001	0.978	0.978	1.34	0.0005	0.353	0.353
20	1.48	0.001	1.75	1.75	1.37	0.0004	0.976	0.976	1.34	0.0002	0.35	0.35

Т а б л и ц а 7

Свободномолекулярный случай					Локальная модель $Re_0 = 0.1$			
$\lambda$	$\beta_{см}$	$r_{0см}$	$Cx_{см}$	$Cx_{0см}$	$\beta_{лок}$	$r_{0лок}$	$Cx_{лок}$	$Cx_{0лок}$
1	1.77	0.468	2.174	2.182	1.74	0.449	2.149	2.157
2	1.64	0.235	2.114	2.117	1.62	0.217	2.082	2.085
3	1.59	0.132	2.082	2.083	1.57	0.119	2.047	2.048
4	1.56	0.082	2.064	2.064	1.55	0.073	2.028	2.028
5	1.54	0.056	2.052	2.052	1.53	0.049	2.015	2.016
6	1.53	0.04	2.044	2.044	1.52	0.034	2.007	2.007
7	1.53	0.03	2.037	2.038	1.52	0.026	2.	2.
8	1.52	0.023	2.033	2.033	1.51	0.02	1.996	1.996
9	1.52	0.018	2.029	2.029	1.51	0.016	1.992	1.992
10	1.52	0.015	2.026	2.026	1.5	0.013	1.989	1.989
15	1.51	0.007	2.018	2.018	1.5	0.006	1.981	1.981
20	1.5	0.004	2.013	2.013	1.5	0.003	1.976	1.976

Т а б л и ц а 8

Локальная модель $Re_0 = 10\,000$					Модель Ньютона			
$\lambda$	$\beta_{лок}$	$r_{0лок}$	$Cx_{лок}$	$Cx_{0лок}$	$\beta_{н}$	$r_{0н}$	$Cx_{н}$	$Cx_{0н}$
1	1.57	0.352	0.772	0.824	1.57	0.352	0.75	0.803
2	1.45	0.123	0.351	0.36	1.45	0.123	0.321	0.33
3	1.4	0.05	0.198	0.2	1.4	0.05	0.165	0.167
4	1.37	0.024	0.132	0.133	1.37	0.024	0.098	0.099
5	1.36	0.013	0.099	0.099	1.36	0.013	0.064	0.065
6	1.35	0.008	0.081	0.081	1.35	0.008	0.045	0.045
7	1.35	0.005	0.069	0.069	1.35	0.005	0.037	0.037
8	1.35	0.003	0.061	0.061	1.35	0.003	0.026	0.026
9	1.34	0.002	0.056	0.056	1.34	0.002	0.02	0.02
10	1.34	0.002	0.052	0.052	1.34	0.002	0.017	0.017
15	1.34	0.0	0.043	0.043	1.34	0.0	0.007	0.007
20	1.34	0.0	0.04	0.04	1.34	0.0	0.004	0.004

В табл. 7 представлены данные сравнения расчетов величин  $\beta$  и  $r_0$ , при которых коэффициент сопротивления минимален в свободномолекулярном случае и в случае расчетов локальным методом для малых чисел  $Re_0$ .

В табл. 8 представлены аналогичные данные сравнения расчетов для больших чисел  $Re_0$  и расчетов с помощью формулы Ньютона.

## 7. Заключение

Сравнение показывает, что результаты расчетов по свободномолекулярной модели газа и локальной модели при малых числах  $Re_0$  близки. Отличие в  $Cx$  составляет не более 2%. И в том и другом случае при больших удлинениях величины  $\beta \rightarrow 1.5$ . Результаты расчетов величин  $\beta$  и  $r_0$  по модели Ньютона и локальной модели при больших числах  $Re_0$  совпадают. Отличие в величинах  $Cx$  получается в результате того, что в локальной модели учитывается трение, а в модели Ньютона нет. Особенно влияние трения сказывается при больших удлинениях.

Во всех локальных моделях течения для тел вращения со степенной образующей наличие затупления уменьшает величину аэродинамического сопротивления. Особенно этот эффект проявляется при малых удлинениях. При удлинениях  $\lambda > 6$  радиус затупления стремится к нулю и затупление практически не влияет на сопротивление.

## Литература

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Москва : Наука, 1989, 688 с.
2. *Черный Г.Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. Москва : Физматгиз, 1959. 220 с.
3. *Крайко А.Н., Пудовкин Д.Е., Якунина Г.Е.* Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. Москва : Янус-К, 2001. 132 с.
4. *Миеле А.* Теория оптимальных аэродинамических форм. Москва : Мир, 1969. 508 с.
5. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика. Москва : Машиностроение, 1975. 328 с.
6. *Остапенко Н.А., Якунина Г.Е.* О телах наименьшего сопротивления, движущихся в средах при наличии закона локальности // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 95–106.
7. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. Москва : Наука, 1973. 240 с.
8. *Перминов В.Д., Солоджин Е.Е.* Осесимметричные тела с минимальным сопротивлением при заданном тепловом потоке к поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т II, № 6. С. 32–40.
9. *Гусев В.Н., Ерофеев А.И., Климова Т.В., Перепухов В.А., Рябов В.В., Толстых А.И.* Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1855. С. 43.
10. *Бунимович А.И., Якунина Г.Е.* Исследование форм поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 112–117.
11. *Якунина Г.Е.* К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. № 64, вып. 2. С. 199–310.
12. *Аргучинцева М.А., Пилюгин Н.Н.* Оптимизация формы пространственного тела по радиационному тепловому потоку // ТВТ. 2002. Т. 40, вып. 4. С. 603–616.

13. *Таковичский С.А.* Аналитическое решение задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части в рамках локальной линеаризации // ПММ. 2018. Т. 82, вып. 6. С. 775–782.
14. *Благосклонов В.И., Гродзовский Г.Л.* Осесимметричное обтекание тел вращения степенной формы при сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т. V, № 6. С. 6–22.
15. *Горелов С.Л., Нгуен Ван Лам.* Тело вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ. 2020. № 113.
16. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. Москва : Наука, 1967. 440 с.
17. *Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И.* Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.
18. *Николаев В.С.* Аппроксимационные формулы для локальных аэродинамических характеристик тел типа крыла в вязком гиперзвуковом потоке в широком диапазоне параметров подобия // Ученые записки ЦАГИ. 1981. Т. XII, № 4. С. 143–150.

## References

1. *Newton. I.* Mathematical principles of natural philosophy. Moscow : Nauka, 1989. 688 p. (in Russian).
2. *Chyernyi G.G.* Gas flow at high supersonic speed. Moscow : Fizmatgiz, 1959. 220 p. (in Russian).
3. *Kraiko A.N., Pudovkin D.E., Yakunin G.E.* The theory of aerodynamic forms close to optimal. Moscow : Janus-K, 2001. 132 p. (in Russian).
4. *Miele A.* Theory of optimal aerodynamic forms. Moscow : Mir, 1969. 508 p. (in Russian).
5. *Lunev V.V.* Hypersonic aerodynamics. Moscow : Mechanical Engineering, 1975. 328 p. (in Russian).
6. *Ostapenko N.A., Yakunina G.E.* On bodies of least resistance moving in environment in the presence of the law of locality. Izv. RAS. MZHG. 1992. N 1. P. 95–106. (in Russian).
7. *Chernusko F.L., Banichuk N.V.* Variational Problems of Mechanics and Control. Moscow : Nauka, 1973. 240 p.
8. *Perminov V.D., Solodkin E.E.* Axisymmetric bodies with minimum resistance at specified heat flow to the surface. Scholarly Notes. 1971. V. II, N 6, P. 32–40. (in Russian).
9. *Gusev V.N., Erofeev A.I., Klimova T.V., Perepukhov V.A., Ryabov V.V., Tolstykh A.I.* Theoretical and experimental studies of a hypersonic rarefied gas flow around bodies of a simple shape. Trudy TsAGI. 1977. I. 1855. P. 43. (in Russian).
10. *Bunimovich A.I., Yakunina G.E.* Study of the shapes of the transverse contour of a conical spatial body of minimal resistance moving in a rarefied gas. Izv. USSR Academy of Sciences. MZHG. 1986. N 5. P. 112–117. (in Russian).
11. *Yakunina G.E.* To the construction of optimal spatial forms in the framework of the local interaction model. PMM. 2000. N 64, I. 2. P. 199–310. (in Russian).
12. *Arguchintseva M.A., Pilyugin N.N.* Optimization of the shape of a spatial body in terms of radiation heat flux. TVT. 2002. V. 40, I. 4. P. 603–616. (in Russian).
13. *Takovitsky S.A.* Analytical solution of the problem of minimizing the wave drag of an axisymmetric bow in the framework of local linearization. Prikl. 2018. V. 82, N 6. P. 775–782. (in Russian).

14. *Blagosklonov V.I., Grodzovsky G.L.* Axisymmetric flow around bodies of rotation of a power-law shape at supersonic free-stream velocities. *Uchenye zapiski TsAGI*. 1974. N 6. P. 6–22. (in Russian).
15. *Gorelov S.L., Nguyen Van Lam.* Rotational body of the minimal aerodynamic resistance in a hypersonic rarefied gas flow, *Trudy MAI*. 2020. N 113. (in Russian).
16. *Kogan M.N.* The dynamics of rarefied gas. Moscow : Nauka, 1967. P. 440. (in Russian).
17. *Galkin V.S., Erofeev A.I., Tolstykh A.I.* An approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of bodies in a hypersonic flow of rarefied gas. *Trudy TsAGI*. 1977. V. 1833. P. 6–10. (in Russian).
18. *Nikolaev V.S.* Approximate formulas for the local aerodynamic characteristics of wing-type bodies in a viscous hypersonic flow in a wide range of similarity parameters. *TsAGI Scientific Papers*. 1981. V. XII. N 4. P. 143–150. (in Russian).

*Поступила в редакцию 30.09.2020*