

УДК 530.145.61

В. С. Булыгин

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Эволюция квантового пакета в стационарном ускоряющем потенциале

Получено решение уравнения Шрёдингера в виде обобщённого ряда Грама–Шарлье для произвольного ускоряющего потенциала, не зависящего от времени. Найдены квантовые поправки к времени движения электронов. Получено выражение для минимальной длительности квантового пакета при движении в данном потенциале. Показано, что в процессе движения длительность пакета может стать короче, чем рассчитанная по соотношению неопределённостей «энергия–время».

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, ряд Грама–Шарлье, функция Ханкеля, функции Эйри, гамма-функция Эйлера.

V. S. Bulygin

Moscow Institute of Physics and Technology

Evolution of a quantum package in the stationary accelerating potential

The solution of a Schrödinger equation in the form of the generalized Gram-Charlier series for the any time independent accelerating potential, not time-dependent is obtained. Quantum amendments for driving time of electrons are found. The expression for a minimum duration of a quantum package when driving in this potential is obtained. It is shown that in the course of driving the duration of a package can become shorter, than the calculated one by the indeterminacy relation «energy–time».

Key words: Schrödinger equation, Gram-Charlier series, Hankel function, Airy functions, Gamma function.

1. Введение

Е. К. Завойский (с 1964 г. — академик АН СССР), открывший в 1944 г. электронный парамагнитный резонанс (открытие № 85 в Государственном реестре научных открытий СССР), с 1947 г. работал в Атомном проекте СССР, и после успешного испытания первой советской атомной бомбы в 1949 г. был награждён орденом Ленина и стал лауреатом Сталинской премии III степени «за разработку электромагнитных методов регистрации быстрых процессов по исследованию центральной части заряда атомной бомбы». Под его руководством был разработан способ регистрации слабых сверхкоротких световых сигналов при помощи многокаскадных электронно-оптических преобразователей (ЭОП), разрабатываемых в нашей стране М. М. Бутсловым. В этом способе оптические сигналы пикосекундной и субпикосекундной длительности измеряются методом электронно-оптической фотохронографии, в котором оптический сигнал превращается фотокатодом ЭОП в практически синхронный электронный сигнал, распространяющийся в вакуумном промежутке ЭОП, и который с помощью скоростной развёртки по люминесцентному экрану ЭОП преобразуется в пространственное изображение. При этом распределение пространственной

плотности световой энергии, высвеченной люминофором, соответствует временному распределению мощности оптического излучения, попадающему на фотокатод ЭОП. В дальнейшем высокоскоростные ЭОП нашли применение, кроме ядерной физики, в исследованиях плазмы, в оптической спектроскопии, в лазерной технике, в астрономии [1–4].

При продвижении метода электронно-оптической фотохронографии в фемтосекундный временной диапазон всё большее значение приобретает учёт квантовых эффектов, одним из которых является квантово-механическое расплывание в ускоряющем поле электронной оптики электронного пакета, эмитированного фотокатодом ЭОП.

Воспользовавшись методом, изложенным в [5], обобщим рассмотрение данной задачи, проведённое в [6], на случай пакета с произвольной начальной энергией, развив и дополнив результаты, изложенные в [7].

2. Квантовая динамика электрона в произвольном ускоряющем потенциале

Применим аппарат, развитый в нашей работе [5], к определению временных параметров квантового электронного пакета, движущегося в ускоряющем монотонно изменяющемся потенциале.

Запишем уравнение Шрёдингера для электрона с массой m и абсолютной величиной заряда e , движущегося в ускоряющей разности потенциалов $U(z)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi(z, t), \quad (1)$$

где

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}}{2m} - eU(z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - eU(z) \quad (2)$$

и $-eU(z)$ есть потенциальная энергия электрона в электростатическом поле с положительным потенциалом $U(z)$, являющаяся монотонно убывающей функцией.

Будем искать решение уравнения (1) в виде пакета по продольным энергиям W :

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dW c(W) f(z, W) e^{-\frac{i}{\hbar} W t}, \quad (3)$$

где продольная энергия фотоэлектрона W связана с его полной энергией W_{tot} соотношением

$$W = W_{\text{tot}} - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m},$$

получающимся из трёхмерного варианта уравнения Шрёдингера (1).

Подставляя выражение (3) в (1), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dW c(W) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right] f(z, W) e^{-\frac{i}{\hbar} W t} = 0,$$

или, с учётом(2):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dW c(W) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + eU(z) \right] f(z, W) e^{-\frac{i}{\hbar} W t} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dW c(W) \left[i\hbar f \frac{\partial e^{-\frac{i}{\hbar} W t}}{\partial t} + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + eU(z) f \right) e^{-\frac{i}{\hbar} W t} \right] = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dW c(W) \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + [W + eU(z)] f(z, W) \right] e^{-\frac{i}{\hbar} W t} = 0, \end{aligned}$$

т. е. $f(z, W)$ удовлетворяет стационарному уравнению Шрёдингера:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot [W + eU(z)] \cdot f(z, W) = 0. \quad (4)$$

Коэффициент $c(W)$ определится из граничного значения волновой функции $\psi(0, t)$ при $z = 0$. Согласно (3)

$$\psi(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dW c(W) f(0, W) e^{-\frac{i}{\hbar} W t},$$

откуда $c(W)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$c(W) = \frac{1}{f(0, W)} \cdot \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \psi(0, \tau) e^{\frac{i}{\hbar} W \tau}.$$

Подставляя это выражение в (3), получаем

$$\psi(z, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dW \frac{f(z, W)}{f(0, W)} e^{-\frac{i}{\hbar} W t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \psi(0, \tau) e^{\frac{i}{\hbar} W \tau},$$

и после перестановки порядка интегрирования приводим это выражение к виду

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \psi(0, \tau) \cdot \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dW \frac{f(z, W)}{f(0, W)} e^{-\frac{i}{\hbar} W \cdot (t-\tau)},$$

что позволяет переписать данное выражение в виде свёртки:

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \psi(0, \tau) G(z, t - \tau), \quad (5)$$

где

$$G(z, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dW \frac{f(z, W)}{f(0, W)} e^{-\frac{i}{\hbar} W t} \quad (6)$$

— временная функция Грина рассматриваемой граничной квантовой задачи и $f(z, W)$ — решение стационарного уравнения Шрёдингера (4).

Можно доопределить волновую функцию $\psi(z, t)$ при $z < 0$ таким образом, чтобы её энергия равнялась нулю, т. е. чтобы согласно (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^*(z, t) \hat{H} \psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^*(z, t) i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

тогда волновая функция $\Psi(z, t) = \psi(z, t) e^{-\frac{i}{\hbar} W t}$ будет иметь энергию W . Действительно, поскольку с учётом (1):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= e^{-\frac{i}{\hbar} W t} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + W \psi(z, t) e^{-\frac{i}{\hbar} W t} = e^{-\frac{i}{\hbar} W t} \hat{H} \psi(z, t) + W \Psi(z, t) = \\ &= (\hat{H} + W) \Psi(z, t), \end{aligned}$$

откуда с учётом (7) получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dz \Psi^*(z, t) i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \Psi^*(z, t) (\hat{H} + W) \Psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^*(z, t) (\hat{H} + W) \psi(z, t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi^*(z, t) \hat{H} \psi(z, t) + W \int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi(z, t)|^2 = W, \end{aligned}$$

так как волновая функция удовлетворяет условию нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi(z, t)|^2 = 1$.

Запишем граничное значение волновой функции фотоэлектрона на поверхности фотокатода при $z = 0$ в виде

$$\psi(0, t) = a(0, t) e^{-\frac{i}{\hbar} W t}, \quad (8)$$

тогда решение уравнения (1) с энергией электрона W может быть записано в форме с комплексной амплитудой $a(z, t)$:

$$\psi(z, t) = a(z, t) e^{-\frac{i}{\hbar} W t}. \quad (9)$$

Так как $\psi(z, t)$ и $\psi(0, t)$ связаны свёрткой (5), то, как показано в [5], решение уравнения (1) с энергией W может быть записано в виде ряда типа Грама–Шарлье по полиномам Эрмита $He_n(\tau)$, коэффициенты которого выражаются через нормированные кумулянты $\gamma_n(z, W)$:

$$\gamma_n(z, W) = \frac{\varkappa_n(z, W)}{\varkappa_2^{n/2}(z, W)} = \frac{\varkappa_n(z, W)}{\sigma^n(z, W)}$$

комплексной амплитуды $a(z, t)$.

Кумулянты $\varkappa_n(z, W)$ являются суммой кумулянтов $\varkappa_n^{(0)}$ граничной комплексной амплитуды $a(0, t)$ [5]:

$$\varkappa_n^{(0)} = (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{a}(0, \omega) \right]_{\omega=W/\hbar},$$

где $\tilde{a}(0, \omega)$ — фурье-преобразование функции $a(0, t)$, и кумулянтов $\varkappa_n^{(G)}(z, W)$ временной функции Грина (6). Так как фурье-преобразование функции Грина, согласно (6), может быть с точностью до постоянного множителя записано в виде, разбитом на два сомножителя:

$$\tilde{G}(z, W) = \frac{f(z, W)}{f(0, W)} = \frac{f(z_0, W)}{f(0, W)} \cdot \frac{f(z, W)}{f(z_0, W)},$$

то кумулянты $\varkappa_n^{(G)}(z, W)$ временной функции Грина (6) для фотоэлектрона с энергией W , с учётом соотношения $\omega = W/\hbar$, запишутся так [5]:

$$\begin{aligned} \varkappa_n^{(G)}(z, W) &= (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \ln \tilde{G} = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial W^n} \ln \tilde{G}(z, W) = \\ &= (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial W^n} \ln \frac{f(z_0, W)}{f(0, W)} + (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial W^n} \ln \frac{f(z, W)}{f(z_0, W)} = \\ &= \varkappa_n^{(G)}(z_0, W) + \varkappa_n^{(G)}(z_0, z, W), \end{aligned} \quad (10)$$

т. е.

$$\varkappa_n(z, W) = \varkappa_n^{(0)} + \varkappa_n^{(G)}(z_0, W) + \varkappa_n^{(G)}(z_0, z, W). \quad (11)$$

Выберем z_0 настолько малым, чтобы в пределах $z \in [0, z_0]$ электрическое ускоряющее поле E можно считать однородным, т. е. положительный потенциал $U(z) = Ez$, тогда стационарное уравнение Шрёдингера (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (W + eEz) \cdot f(z, W) = 0. \quad (12)$$

Приведём это уравнение, как это сделано в нашей работе [6], к безразмерному виду. Введём безразмерную длину $\xi = z/l_0$, где l_0 — характерная длина нашей квантовой задачи, тогда уравнение (12) записывается в виде

$$\frac{1}{l_0^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (W + eEl_0\xi) \cdot f(\xi, W) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{2meEl_0^3}{\hbar^2} \cdot \left(\frac{W}{eEl_0} + \xi \right) \cdot f(\xi, W) = 0, \quad (13)$$

и уравнение (13) примет простейший вид, если в качестве характерной длины l_0 выбрать

$$l_0 = \left(\frac{\hbar^2}{2meE} \right)^{1/3} = \frac{33,7 \text{ \AA}}{(E \text{ кВ/мм})^{1/3}}, \quad (14)$$

а в качестве характерной энергии фотоэлектрона —

$$W_0 = eEl_0 = \left(\frac{\hbar^2 e^2 E^2}{2m} \right)^{1/3} = 3,37 \cdot 10^{-3} \cdot (E \text{ кВ/мм})^{2/3}, \text{ эВ}. \quad (15)$$

Введя безразмерную энергию электрона

$$\varepsilon = \frac{W}{W_0} = \left(\frac{2m}{\hbar^2 e^2 E^2} \right)^{1/3} W = \frac{297}{(E \text{ кВ/мм})^{2/3}} W(\text{эВ}), \quad (16)$$

записываем уравнение Шрёдингера (12) в искомом безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + (\varepsilon + \xi) \cdot f(\xi + \varepsilon) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) является уравнением Эйри, и его ненормированное решение, соответствующее уходящей при $\xi \rightarrow \infty$ волне, имеет вид [8, задача 41]

$$f(\xi + \varepsilon) = \sqrt{\xi + \varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3}(\xi + \varepsilon)^{3/2} \right), \quad (18)$$

здесь $H_{1/3}^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода [9, форм. 9.1.3].

Кумулянты функции Грина $\varkappa_n^{(G)}(z_0, W)$ на расстоянии z_0 будут определяться, с учётом (18), выражением

$$\begin{aligned} \varkappa_n^{(G)}(z_0, W) &= (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial W^n} \ln \frac{f(z_0, W)}{f(0, W)} = \left(-i \frac{\hbar}{W_0} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} \left[\ln \frac{f(z_0, W)}{f(0, W)} \right]_{W=\varepsilon W_0} = \\ &= (-it_0)^n \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} \ln \frac{f(\xi_0 + \varepsilon)}{f(\varepsilon)} = (-it_0)^n \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} \ln \frac{\sqrt{\xi_0 + \varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3}(\xi_0 + \varepsilon)^{3/2} \right)}{\sqrt{\varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2} \right)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\xi_0 = z_0/l_0$, и характерное время задачи движения фотоэлектрона в однородном поле E , с учётом (15) равно

$$t_0 = \frac{\hbar}{W_0} = \left(\frac{2m\hbar}{e^2 E^2} \right)^{1/3} = \frac{1,96 \cdot 10^{-13} \text{ с}}{(E \text{ кВ/мм})^{2/3}}; \quad (20)$$

производные функций Ханкеля (функций Бесселя) находятся последовательным применением соотношения, получаемого из [10, форм. 8.472]

$$\frac{dH_\nu^{(1)}(z)}{dz} = H_{\nu-1}^{(1)}(z) - \frac{\nu}{z} H_\nu^{(1)}(z). \quad (21)$$

Даже при $z_0 = 0,1$ мм и $E = 1$ В/мм получаем: $\xi_0 = z_0/l_0 = 3 \cdot 10^3 \gg 1$, и, как показывается в [8, задача 41], движение электрона в однородном поле при $\xi \gg 1$ становится квазиклассическим и при $z \geq z_0$ может быть описано ВКБ-приближением решения уравнения Шрёдингера [11, § 3.3, форм. 17]:

$$f(z, W) = \frac{C}{[W + eU(z)]^{1/4}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m} \int^z dz \sqrt{W + eU(z)}\right),$$

$$\frac{f(z, W)}{f(z_0, W)} = \left[\frac{W + eU(z_0)}{W + eU(z)}\right]^{1/4} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m} \int_{z_0}^z dz \sqrt{W + eU(z)}\right).$$

Отсюда находим

$$\ln \frac{f(z, W)}{f(z_0, W)} = \frac{1}{4} \ln [W + eU(z_0)] - \frac{1}{4} \ln [W + eU(z)] + \frac{1}{-i\hbar} \sqrt{2m} \int_{z_0}^z dz \sqrt{W + eU(z)},$$

и, следовательно, согласно (10):

$$\begin{aligned} \varkappa_n^{(G)}(z_0, z, W) &= \frac{(-i\hbar)^n}{4} \left(\frac{\partial^n}{\partial W^n} \ln [W + eU(z_0)] - \frac{\partial^n}{\partial W^n} \ln [W + eU(z)] \right) + \\ &+ (-i\hbar)^{n-1} \sqrt{2m} \int_{z_0}^z dz \frac{\partial^n}{\partial W^n} \sqrt{W + eU(z)} = \\ &= \frac{(-i\hbar)^n}{4} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial W^{n-1}} \frac{1}{W + eU(z_0)} - \frac{\partial^{n-1}}{\partial W^{n-1}} \frac{1}{W + eU(z)} \right) + \dots = \\ &= i^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \int_{z_0}^z \left(\frac{\hbar}{W + eU(z)} \right)^{n-1/2} dz - \\ &- i^n \frac{(n-1)!}{4} \left[\left(\frac{\hbar}{W + eU(z_0)} \right)^n - \left(\frac{\hbar}{W + eU(z)} \right)^n \right], \end{aligned} \quad (22)$$

здесь $(2n-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)$, а также использованы соотношения

$$\frac{\partial^n}{\partial W^n} \sqrt{W + eU} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^n (W + eU)^{n-1/2}}; \quad \frac{\partial^{n-1}}{\partial W^{n-1}} \left(\frac{1}{W + eU} \right) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(W + eU)^n},$$

которые легко доказываются по индукции.

В соответствии с (11), (19) и (22) кумулянты волновой функции электрона с энергией W , прошедшего расстояние $z \geq z_0$ в ускоряющем потенциале $U(z)$, будут даваться выражением

$$\begin{aligned} \varkappa_n(z, W) &= \varkappa_n^{(0)} + (-it_0)^n \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} \ln \frac{\sqrt{\xi_0 + \varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{2}{3}(\xi_0 + \varepsilon)^{3/2}\right)}{\sqrt{\varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\right)} + \\ &+ i^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \int_{z_0}^z \left(\frac{\hbar}{W + eU(z)} \right)^{n-1/2} dz - \\ &- i^n \frac{(n-1)!}{4} \left[\left(\frac{\hbar}{W + eU(z_0)} \right)^n - \left(\frac{\hbar}{W + eU(z)} \right)^n \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $\varkappa_n^{(0)}$ — кумулянты волновой функции при $z = 0$; t_0 и ε — характерное время и безразмерная энергия, даваемые выражениями (20) и (16), производные функций Ханкеля также выражаются через функции Ханкеля, см. (21).

Теперь через нормированные кумулянты

$$\gamma_n(z, W) = \frac{\varkappa_n(z, W)}{\varkappa_2^{n/2}(z, W)} = \frac{\varkappa_n(z, W)}{\sigma^n(z, W)}, \quad n \geq 3, \quad (24)$$

где, согласно (23),

$$\begin{aligned} \varkappa_2(z, W) = \sigma^2(z, W) = & \varkappa_2^{(0)} - t_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \ln \frac{\sqrt{\xi_0 + \varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{2}{3}(\xi_0 + \varepsilon)^{3/2}\right)}{\sqrt{\varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\right)} + \\ & + \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \int_{z_0}^z \left(\frac{\hbar}{W + eU(z)}\right)^{3/2} dz + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\hbar}{W + eU(z_0)}\right)^2 - \left(\frac{\hbar}{W + eU(z)}\right)^2 \right], \quad (25) \end{aligned}$$

выражаем, согласно [5], коэффициенты ряда Грама–Шарлье и получаем в замкнутой форме решение уравнения Шрёдингера (1), описывающего движение квантового пакета фотоэлектронов с энергией W в произвольном и изменяющемся монотонно (чтобы избежать рассмотрения возможных связанных состояний) ускоряющем потенциале $U(z)$:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) = m_0 \frac{e^{-\tau^2/2}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left[1 + \frac{\gamma_3}{3!} He_3(\tau) + \frac{\gamma_4}{4!} He_4(\tau) + \frac{\gamma_5}{5!} He_5(\tau) + \frac{\gamma_6 + 10\gamma_3^2}{6!} He_6(\tau) + \right. \\ + \frac{\gamma_7 + 35\gamma_4\gamma_3}{7!} He_7(\tau) + \frac{\gamma_8 + 56\gamma_5\gamma_3 + 35\gamma_4^2}{8!} He_8(\tau) + \\ + \frac{\gamma_9 + 84\gamma_6\gamma_3 + 126\gamma_5\gamma_4 + 280\gamma_3^3}{9!} He_9(\tau) + \\ \left. + \frac{\gamma_{10} + 120\gamma_7\gamma_3 + 210\gamma_6\gamma_4 + 126\gamma_5^2 + 2100\gamma_4\gamma_3^2}{10!} He_{10}(\tau) + \dots \right] \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Wt}, \quad (26) \end{aligned}$$

где нормированное время

$$\tau(t, z, W) = \frac{t - \varkappa_1(z, W)}{\sqrt{\varkappa_2(z, W)}} = \frac{t - \varkappa_1(z, W)}{\sigma(z, W)}, \quad (27)$$

и здесь, согласно (23),

$$\begin{aligned} \varkappa_1(z, W) = \varkappa_1^{(0)} - it_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \frac{\sqrt{\xi_0 + \varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{2}{3}(\xi_0 + \varepsilon)^{3/2}\right)}{\sqrt{\varepsilon} \cdot H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\right)} + \\ + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{W + eU(z)}} - \frac{i}{4} \left(\frac{\hbar}{W + eU(z_0)} - \frac{\hbar}{W + eU(z)} \right). \quad (28) \end{aligned}$$

3. Квантовые поправки к времени движения электрона

Упростим общее решение (26) применительно к задаче о движении электронов в системе электронной оптики ЭОП с реальными параметрами.

Примем, что анодное напряжение $U(l) = U_a = 15$ кВ, линейный участок изменения потенциала $U(z)$ вблизи фотокатода определяется ускоряющей сеткой, расположенной на расстоянии $z_0 = l_c = 1$ мм от фотокатода, и к которой приложен ускоряющий потенциал $U(z_0) = U_c = 3$ кВ, обеспечивающий возле катода ускоряющее электрическое поле $E = U_c/l_c = 3$ кВ/мм. При этом, согласно (14) $\xi_c = l_c/l_0 \simeq 6 \cdot 10^5 \gg 1$ и согласно (20), $t_0 \simeq 10^{-13}$ с.

Введём функцию $\varphi(\xi)$ — логарифмическую производную решения (18), и с помощью (21) получаем

$$\varphi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \left[\sqrt{\xi} H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \right] = \sqrt{\xi} \frac{H_{-2/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right)}{H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right)}. \quad (29)$$

Из выражения (28) для первого кумулянта функции Грина при $z \geq l_c$ находим

$$\begin{aligned} \varkappa_1^{(G)}(z, W) = & -it_0 \varphi(\xi_c + \varepsilon) + it_0 \varphi(\varepsilon) + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{l_c}^z \frac{dz}{\sqrt{W + eU(z)}} - \\ & - \frac{i}{4} \left(\frac{\hbar}{W + eU_c} - \frac{\hbar}{W + eU(z)} \right). \end{aligned}$$

Энергия электрона W порядка нескольких эВ и пренебрежимо мала по сравнению с $eU(z)$. Поскольку $\hbar = 0,658$ эВ·фс, то $\hbar/eU(z) \leq \hbar/eU_c \simeq 2 \cdot 10^{-19} \ll t_0 = 10^{-13}$ с, т. е. последние члены также пренебрежимо малы. Воспользовавшись асимптотикой (61):

$$\varphi(\xi_c + \varepsilon) = i\sqrt{\xi_c + \varepsilon} + O(\xi_c^{-1}),$$

т. е. $\varphi(\xi_c + \varepsilon) \simeq i\sqrt{\xi_c + \varepsilon}$, имеем

$$\begin{aligned} \varkappa_1^{(G)}(z, W) = & t_0 \left(\sqrt{\xi_c + \varepsilon} - \sqrt{\varepsilon} \right) + t_0 [i\varphi(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}] + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{l_c}^z \frac{dz}{\sqrt{W + eU(z)}} = \\ = & t_{\text{кл}}(W, z) - t_0 (\mathbf{Im} \varphi(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}) + it_0 \mathbf{Re} \varphi(\varepsilon), \end{aligned} \quad (30)$$

здесь использовано, что с учётом выражений (16) и (20) для ε и t_0

$$t_0 \left(\sqrt{\xi_c + \varepsilon} - \sqrt{\varepsilon} \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{l_c} \frac{dz}{\sqrt{W + eU(z)}},$$

где $U(z) = Ez$ — ускоряющий потенциал в промежутке $z \in [0, l_c]$, а также введено обозначение для времени движения электрона с энергией W в потенциале $U(z)$ в классическом приближении:

$$t_{\text{кл}}(z, W) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{W + eU(z)}}. \quad (31)$$

При тех же приближениях, используя асимптотику (62): $\varphi'(\xi_c + \varepsilon) \simeq \frac{i}{2} \xi_c^{-1/2}$, пренебрегаем слагаемым с φ' и из (25) получаем

$$\begin{aligned} \varkappa_2^{(G)}(z, W) = \sigma_G^2(z, W) = & -t_0^2 [\varphi'(\xi_c + \varepsilon) - \varphi'(\varepsilon)] + \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \int_{l_c}^z \left(\frac{\hbar}{eU(z)} \right)^{3/2} dz = \\ = & t_0^2 \varphi'(\varepsilon) + \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \int_{l_c}^z \left(\frac{\hbar}{eU(z)} \right)^{3/2} dz \leq t_0^2 \varphi'(\varepsilon) + i \frac{l}{4} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \left(\frac{\hbar}{eU_{\text{ср}}} \right)^{3/2}, \end{aligned}$$

и поскольку $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \simeq 33 \text{ м}^{-1} \text{с}^{1/2}$, т. е. при $l = 10$ см = 0,1 м и $U_{\text{ср}} \simeq 5$ кВ последнее слагаемое $\simeq 10^{-28} \text{ с}^2 \ll t_0^2 \simeq 10^{-26} \text{ с}^2$, следовательно:

$$\sigma_G^2(W) = \varkappa_2^{(G)}(W) = t_0^2 \cdot \varphi'(\varepsilon) = t_0^2 \cdot [\mathbf{Re} \varphi'(\varepsilon) + i \mathbf{Im} \varphi'(\varepsilon)], \quad (32)$$

при этом производная $\varphi'(\varepsilon)$ может с помощью уравнения Эйри (17) быть выражена через $\varphi(\varepsilon)$:

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{d}{d\varepsilon} \ln f(\varepsilon) \right] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} \right] = \frac{f''(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} - \left[\frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} \right]^2 = -\varepsilon - \varphi^2(\varepsilon), \quad (33)$$

так как, согласно (17), $f''(\varepsilon) + \varepsilon \cdot f(\varepsilon) = 0$, т. е. $f''(\varepsilon)/f(\varepsilon) = -\varepsilon$.

Оценим теперь вклад старших коэффициентов ряда Грамма–Шарлье (26), определяемых функцией Грина электронной оптики и зависящих от нормированных кумулянтов γ_n при $n \geq 3$. Согласно (24):

$$\frac{\gamma_n^{(G)}}{n!} \approx \frac{\varkappa_n^{(G)}}{[\varkappa_2^{(G)}]^{n/2} n!} = \frac{\varkappa_n^{(G)}}{t_0^n [\varphi'(\varepsilon)]^{n/2} \Gamma(n+1)}, \quad (34)$$

где, согласно (23) и (29) и с учётом сделанных приближений:

$$\begin{aligned} \varkappa_n^{(G)}(z, W) = & (-it_0)^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \varepsilon^{n-1}} [\varphi(\xi_c + \varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] + i^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \int_{z_0}^z \left(\frac{\hbar}{eU(z)} \right)^{n-1/2} dz - \\ & - i^n \frac{(n-1)!}{4} \left[\left(\frac{\hbar}{eU_c} \right)^n - \left(\frac{\hbar}{eU(z)} \right)^n \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Используя при $\xi_c \rightarrow \infty$ асимптотику (61): $\varphi(\xi_c + \varepsilon) \simeq i\sqrt{\xi_c + \varepsilon}$, откуда

$$\frac{\partial^{n-1} \varphi(\xi_c + \varepsilon)}{\partial \varepsilon^{n-1}} \simeq i \frac{\partial^{n-1}}{\partial \varepsilon^{n-1}} \sqrt{\xi_c + \varepsilon} = i(-1)^n \frac{(2n-5)!!}{2^{n-1}(\xi_c + \varepsilon)^{n-3/2}} \simeq i(-1)^n \frac{(2n-5)!!}{2^{n-1} \xi_c^{n-3/2}}, \quad (36)$$

(соотношение доказывается по индукции), а также формулу [10, форм.8.339.2] $(2n-1)!! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n - \frac{1}{2})$ и выражение для асимптотики гамма-функции [9, форм.6.1.39]: $\Gamma(n+b) \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+b-1/2}$ при $n \rightarrow \infty$, с помощью (34) находим

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_n^{(G)}(z)}{n!} \approx & \frac{\varkappa_n^{(G)}}{t_0^n [\varphi'(\varepsilon)]^{n/2} \Gamma(n+1)} \sim -(-i)^n \frac{\varphi^{(n-1)}(\varepsilon)}{[\varphi'(\varepsilon)]^{n/2} n!} + \frac{i^{n+1}}{2\sqrt{\pi}} \frac{n^{-3/2}}{[\varphi'(\varepsilon)]^{n/2} \xi_c^{n-3/2}} + \\ & + \frac{i^{n-1}}{2\sqrt{\pi}} \frac{n^{-1/2}}{[\varphi'(\varepsilon)]^{n/2}} z \sqrt{\frac{2m}{\hbar t_0}} \left(\frac{t_{U_{cp}}}{t_0} \right)^{n-\frac{1}{2}} + \frac{i^n}{4n} \frac{1}{[\varphi'(\varepsilon)]^{n/2}} \left[\left(\frac{t_{U_c}}{t_0} \right)^n - \left(\frac{t_{U_z}}{t_0} \right)^n \right] \sim \quad (37) \\ \sim & \frac{-i^{n/2} 2^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon^{-3(n-2)/4}}{n^{3/2}} + \frac{i^{\frac{n}{2}-1} 2^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon^{n/4}}{n^{3/2} \xi_c^{n-3/2}} + \\ & + \frac{i^{\frac{n}{2}-1} 2^{\frac{n}{2}-1} \varepsilon^{n/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} z \sqrt{\frac{2m}{\hbar t_0}} \left(\frac{t_{U_{cp}}}{t_0} \right)^{n-\frac{1}{2}} + i^{n/2} \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \varepsilon^{n/4}}{n} \left[\left(\frac{t_{U_c}}{t_0} \right)^n - \left(\frac{t_{U_z}}{t_0} \right)^n \right], \end{aligned} \quad (38)$$

в (38) использованы обозначения: $t_{U_{cp}} = \hbar/eU_{cp} \simeq 10^{-19}$ с, $t_{U_c} = \hbar/eU_c \simeq 2 \cdot 10^{-19}$ с, $t_{U_z} = \hbar/eU(z) \leq t_{U_c}$, $z \leq l = 10$ см = 0,1 м, $t_0 = 10^{-13}$ с, а также использованы асимптотики при $\varepsilon \rightarrow \infty$, асимптотика (62) $\varphi'(\varepsilon) \sim \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}}$, а также учтено, что (см. (36))

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} \varphi(\xi_c + \varepsilon)}{\partial \varepsilon^{n-1}} \sim i(-1)^n \frac{(2n-5)!!}{2^{n-1} n!} \varepsilon^{-(n-3/2)} \sim \frac{n^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} \varepsilon^{-(n-3/2)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Можно показать, что первое слагаемое в (38) убывает с ростом n при $\varepsilon \geq 2^{2/3} = 1,587$ ($W \geq 10^{-2}$ эВ), и сначала убывает, а потом возрастает при $\varepsilon < 2^{2/3}$, остальные слагаемые всегда убывают с ростом n .

Оценим величину третьего кумулянта, от которой убывают все остальные кумулянты. Из (35), с учётом (36), имеем

$$\varkappa_3^{(G)} = -it_0^3 \left[\varphi''(\varepsilon) - \frac{i}{4\xi_c^{3/2}} \right] - \frac{3z}{8} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} t_{U_{cp}}^{5/2} + \frac{i}{2} (t_{U_c}^3 - t_{eU_z}^3).$$

При $\xi_c \simeq 6 \cdot 10^5$ второе слагаемое $\simeq 5 \cdot 10^{-8} c^3$ пренебрежимо мало, двумя последними слагаемыми также можно пренебречь, т.к. $t_{U_z}^3 \leq t_{U_c}^3 \simeq 8 \cdot 10^{-57} c^3 \ll t_0^3 \simeq 10^{-39} c^3$, и, наконец, поскольку $\sqrt{2m/\hbar} = 131 \text{ м}^{-1} c^{1/2}$:

$$\frac{3z}{8} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} t_{U_{cp}}^{5/2} \leq \frac{3l}{8} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} t_{U_{cp}}^{5/2} \simeq 10^{-47} c^3 \ll t_0^3 \simeq 10^{-39} c^3,$$

таким образом, $\varkappa_3^{(G)} = -it_0^3 \varphi''(\varepsilon)$, и, согласно (34), поскольку при $\varepsilon = 0$

$$\frac{\gamma_3^{(G)}}{3!} = -\frac{i\varphi''(\varepsilon)}{6[\varphi'(\varepsilon)]^{3/2}} \leq -\frac{i\varphi''(0)}{6[\varphi'(0)]^{3/2}} = \frac{1-2\alpha^3}{\alpha^3} = 9,69 \cdot 10^{-2},$$

так как, согласно (59), (60), (57), (58):

$$\varphi''(0) = -(1-2\alpha^3), \quad \varphi'(0) = \frac{\alpha^2}{2}(1+i\sqrt{3}) = \alpha^2 \cdot e^{i\pi/3}, \quad \text{т. е. } [\varphi'(0)]^{3/2} = \alpha^3 \cdot e^{i\pi/2} = i\alpha^3.$$

Отсюда, удерживая два члена разложения в ряде Грамма–Шарлье (26) до слагаемого с $He_3(\tau) = \tau(\tau^2 - 3)$, с точностью до постоянного множителя получаем

$$|\psi|^2 = e^{-\tau^2} [1 + 9,69 \cdot 10^{-2} \tau(\tau^2 - 3)]^2,$$

и, как показывает рис. 1 (кривые приведены к общему уровню), вкладом члена ряда Грамма–Шарлье с коэффициентом $\gamma_3^{(G)}$ в нашем случае можно пренебречь, он сохраняет ширину волновой функции и незначительно искажает её форму.

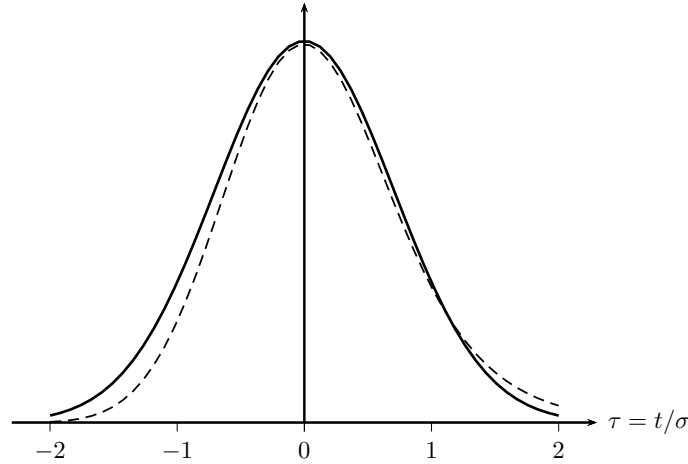


Рис. 1. Основной член ряда Грама–Шарлье $e^{-\tau^2}$ (сплошная линия) и ряд с поправкой на $He_3(\tau)$ (пунктирная линия)

Таким образом, если волновая функция $\psi(0, t)$ определяется только двумя кумулянтами: $\varkappa_1^{(0)}$ и $\varkappa_2^{(0)}$, то в этом случае в ряде Грамма–Шарлье (26) можно положить $\gamma_n = 0$ при $n \geq 3$, и, таким образом, решение уравнения Шрёдингера (1) с гамильтонианом (2) в виде ряда Грамма–Шарлье (26), описывающего распространение в системе электронной оптики ЭОП нерелятивистского квантового пакета с энергией W , с учётом сделанных оценок может быть записано в виде

$$\psi(z, t) = \frac{m_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{[t - \varkappa_1(z, W)]^2}{2\varkappa_2(\varepsilon)}\right)}{\sqrt{\varkappa_2(\varepsilon)}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} Wt}, \quad (39)$$

где $\varkappa_1(z, W) = \varkappa_1^{(0)}(z, W) + \varkappa_1^{(G)}(\varepsilon)$, $\varkappa_2(W) = \varkappa_2^{(0)}(W) + \varkappa_2^{(G)}(\varepsilon)$.

Квадрат модуля нерелятивистской временной квантовомеханической функции Грина системы электронной оптики для волнового пакета с энергией W (или $\varepsilon = W/W_0$, см. (16)) будет определяться из выражения (39) при $\varkappa_1^{(0)} = 0$ и $\varkappa_2^{(0)} = 0$:

$$\begin{aligned} |\psi_G(z, W)|^2 &= \frac{|m_0|^2}{2\pi |\varkappa_2^{(G)}(\varepsilon)|} \cdot \left| \exp \left(- \frac{[t - \varkappa_1^{(G)}(z, W)]^2}{2\varkappa_2^{(G)}(\varepsilon)} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{|m_0|^2}{2\pi |\varkappa_2^{(G)}(\varepsilon)|} \cdot \exp \left(- \mathbf{Re} \frac{[t - \varkappa_1^{(G)}(z, W)]^2}{\varkappa_2^{(G)}(\varepsilon)} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

т. е. временная зависимость $|\psi_G|^2$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{Re} \frac{[t - \varkappa_1^{(G)}(z, W)]^2}{\varkappa_2^{(G)}(\varepsilon)} &= \mathbf{Re} \frac{(t - \mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)} - i \mathbf{Im} \varkappa_1^{(G)})^2}{\mathbf{Re} \varkappa_2^{(G)} + i \mathbf{Im} \varkappa_2^{(G)}} \sim \\ &\sim \mathbf{Re} \left[(t - \mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)} - i \mathbf{Im} \varkappa_1^{(G)})^2 (\mathbf{Re} \varkappa_2^{(G)} - i \mathbf{Im} \varkappa_2^{(G)}) \right], \end{aligned}$$

и время движения фотоэлектронного пакета будет временем движения максимума этого выражения, т. е. находится из уравнения:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Re} \left[(t - \mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)} - i \mathbf{Im} \varkappa_1^{(G)})^2 (\mathbf{Re} \varkappa_2^{(G)} - i \mathbf{Im} \varkappa_2^{(G)}) \right] = 0$$

или

$$2 \mathbf{Re} \left[(t_{\text{пр}} - \mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)} - i \mathbf{Im} \varkappa_1^{(G)}) (\mathbf{Re} \varkappa_2^{(G)} - i \mathbf{Im} \varkappa_2^{(G)}) \right] = 0,$$

то есть

$$(t_{\text{пр}} - \mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)}) \mathbf{Re} \varkappa_2^{(G)} - \mathbf{Im} \varkappa_1^{(G)} \cdot \mathbf{Im} \varkappa_2^{(G)} = 0,$$

откуда, с учётом (30) и (32):

$$t_{\text{пр}} = \mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)} \left(1 + \frac{\mathbf{Im} \varkappa_1^{(G)} \mathbf{Im} \varkappa_2^{(G)}}{\mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)} \mathbf{Re} \varkappa_2^{(G)}} \right) = \mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)} \left(1 + \frac{t_0 \mathbf{Re} \varphi \mathbf{Im} \varphi'}{t_{\text{кл}} \mathbf{Re} \varphi'} \right) = (1 - \delta) \simeq \mathbf{Re} \varkappa_1^{(G)}, \quad (41)$$

поскольку (см. Приложение)

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \frac{t_0}{t_{\text{кл}}} \left(1 + \frac{5\alpha^3 - 2}{\alpha^2} \varepsilon \right) \sim 6 \cdot 10^{-5}, & \varepsilon \rightarrow 0 (W \ll W_0), \\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \frac{t_0}{t_{\text{кл}}} \left(1 + \frac{65}{32} \varepsilon^{-3} \right) \sim 3 \cdot 10^{-3}, & \varepsilon = 3 \cdot 10^3 \gg 1 (W = 10 \text{ эВ} \gg W_0) \end{cases}$$

при $t_0/t_{\text{кл}} \sim 10^{-4}$. Таким образом, для времени пролёта расстояния z электроном с энергией W из (41) следует

$$t_{\text{пр}}(z, W) = t_{\text{кл}}(z, W) - t_{\text{кв}}(\varepsilon), \quad (42)$$

здесь $t_{\text{кл}}$ — время движения электрона в классическом приближении, даваемое (31), а

$$t_{\text{кв}}(\varepsilon) = t_0 (\mathbf{Im} \varphi(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}) = t_0 \begin{cases} \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon), & \varepsilon \ll 1 (W \ll W_0), \\ \frac{5}{32} \varepsilon^{-5/2} [1 + O(\varepsilon^{-3})], & \varepsilon \gg 1 (W \gg W_0) \end{cases} \quad (43)$$

— квантовая поправка к этому времени движения, накапливающаяся на начальном участке движения пакета (когда его скорость ещё мала) и зависящая, в силу (16), как от его энергии W , так и от напряжённости ускоряющего поля E . Поправка $t_{\text{кв}}$ убывает с ростом

безразмерной энергии ε , поскольку пакет с большей энергией быстрее «проскакивает» начальный (чисто квантовый) участок движения.

Зависимость $t_{\text{кв}}$ от ε приведена на рис. 2.

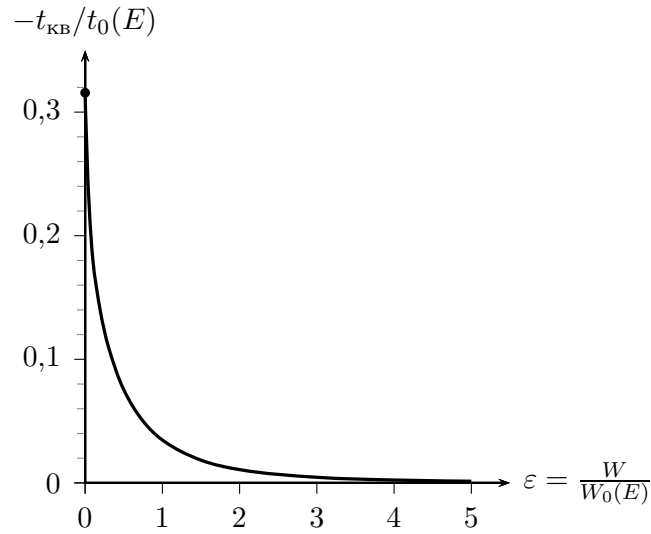


Рис. 2. Зависимость отрицательной квантовой поправки $t_{\text{кв}}$ к времени движения электрона от энергии электрона W (см. (16) и (20))

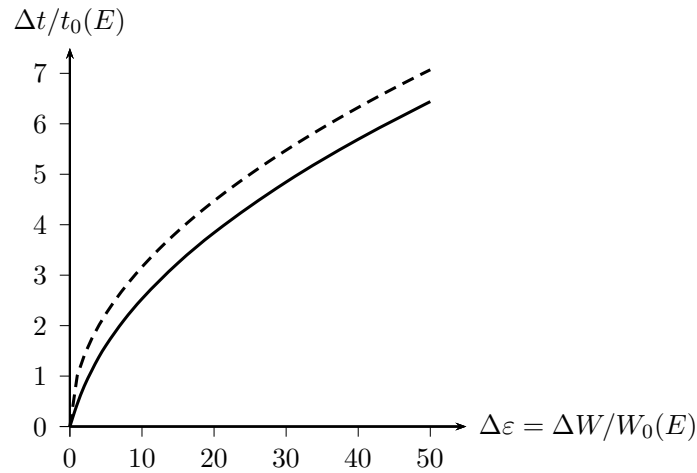


Рис. 3. Разброс времени движения электронного пакета от разброса его энергии ΔW с квантовой поправкой (см. (16) и (20)). Пунктирная кривая — разброс времени движения в классическом приближении

Квантовая поправка к классическому времени движения имеет порядок $t_0 \simeq 10^{-13}$ с и мала по сравнению с $t_{\text{кл}} \simeq 10^{-9}$ с. Поэтому большее значение имеет вклад квантовой поправки в разброс времён движения электронов с разбросом энергии ΔW , определяемый выражением

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{пр}}(z, W) &= t_{\text{пр}}(z, 0) - t_{\text{пр}}(z, \Delta W) = \Delta t_{\text{кл}}(z, \Delta W) - t_0 \left[\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - \text{Im} \varphi(\Delta\varepsilon) \right] - t_0\sqrt{\Delta\varepsilon} = \\ &= \frac{\sqrt{2m\Delta W}}{eE} \left[1 + O(\sqrt{\Delta W/eU_c}) \right] - t_0 \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - \text{Im} \varphi(\Delta\varepsilon) \right) - t_0\sqrt{\Delta\varepsilon} = \end{aligned}$$

$$= t_0 \left(\operatorname{Im} \varphi(\Delta\varepsilon) - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \right) = \begin{cases} t_0 \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} \Delta\varepsilon + O(\Delta\varepsilon^3), & \Delta\varepsilon \ll 1 (\Delta W \ll W_0), \\ t_0 \sqrt{\Delta\varepsilon} [1 + O(\Delta\varepsilon^{-3})], & \Delta\varepsilon \gg 1 (\Delta W \gg W_0), \end{cases} \quad (44)$$

здесь учтено, что $\Delta t_{\text{кл}}(\Delta W) \simeq \frac{\sqrt{2m\Delta W}}{eE} [1 + O(\sqrt{\Delta W/eU_c})] = t_0 \sqrt{\Delta\varepsilon}$.

Выражение (44) изображено на рис. 3, где пунктирной кривой изображён разброс времён пролёта в классическом приближении: $\Delta t_{\text{кл}} = t_0 \sqrt{\Delta\varepsilon}$.

Как видно из (44), квантовая поправка к разбросу времён пролёта существенна при малых энергиях $\varepsilon \leq 1$ (т.е. при $W \leq W_0$); при больших же энергиях $\varepsilon \gg 1$ ($W \gg W_0$) разброс времён пролёта определяется классическим выражением $\Delta t_{\text{кл}} = t_0 \sqrt{\Delta\varepsilon}$. На рис. 4 изображены зависимости разброса времён пролёта от энергии при различных значениях ускоряющего поля E .

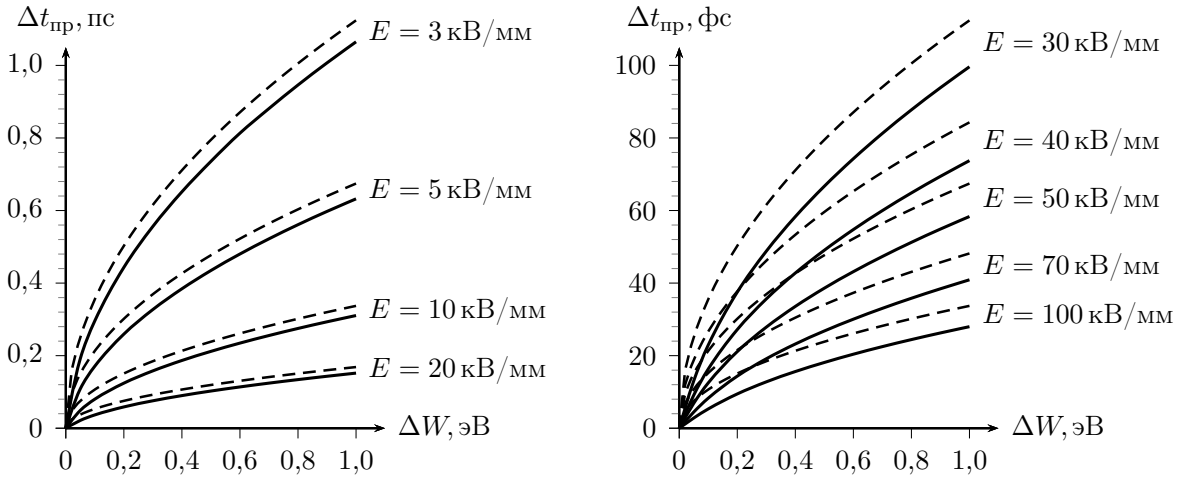


Рис. 4. Зависимость разброса времени движения электронного пакета от разброса его энергии ΔW при различных напряжённостях ускоряющего поля E . Пунктирные кривые — разброс времени движения в классическом приближении

4. Изменение длительности квантового электронного пакета при движении в электрическом поле ЭОП

В рассматриваемом случае, когда существенны только два первых кумулянта волновой функции, длительность $|\psi(z, t)|^2$ на уровне $1/e$, согласно [5], следующим образом связана с комплексной дисперсией σ :

$$T = \frac{2|\sigma^2|}{\sqrt{\operatorname{Re} \sigma^2}}, \quad (45)$$

где, с учётом (32),

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_G^2 = \sigma_0^2 + t_0^2 \varphi'(\varepsilon) = \frac{T_0}{4(1+k_0^2)}(1+ik_0) + \frac{T_{\text{inf}}}{4}(1+ik_G), \quad (46)$$

здесь $\sigma_0^2(0)$ — комплексная дисперсия граничного значения волновой функции $\psi(0, t)$, T_0 — длительность $|\psi(0, t)|^2$ в смысле определения (45), $k_0 = \frac{\operatorname{Im} \sigma_0^2}{\operatorname{Re} \sigma_0^2} = \operatorname{tg}(\arg \sigma_0^2)$ отвечает за возможную фазовую модуляцию $\psi(0, t)$: $\frac{d\omega}{dt} = -2k_0 \frac{t}{T_0}$, $k_G = \operatorname{tg}(\arg \sigma_G^2) = \frac{\operatorname{Im} \sigma_G^2}{\operatorname{Re} \sigma_G^2} = \frac{\operatorname{Im} \varphi'(\varepsilon)}{\operatorname{Re} \varphi'(\varepsilon)}$, T_{inf} — нижний предел длительности $|\psi(z, t)|^2$ для пакета, прошедшего ускоряющее электрическое поле. Для этого предела, согласно [5] и с учетом (32) и (33) имеем:

$$T_{\text{inf}}(\varepsilon) = 2\sqrt{\operatorname{Re} \sigma_G^2} = 2t_0 \sqrt{\operatorname{Re} \varphi'(\varepsilon)} = 2t_0 \sqrt{-\varepsilon - \operatorname{Re} \varphi^2(\varepsilon)}, \quad (47)$$

зависимость $T_{\text{inf}}(\varepsilon)$ изображена на рис. 5.

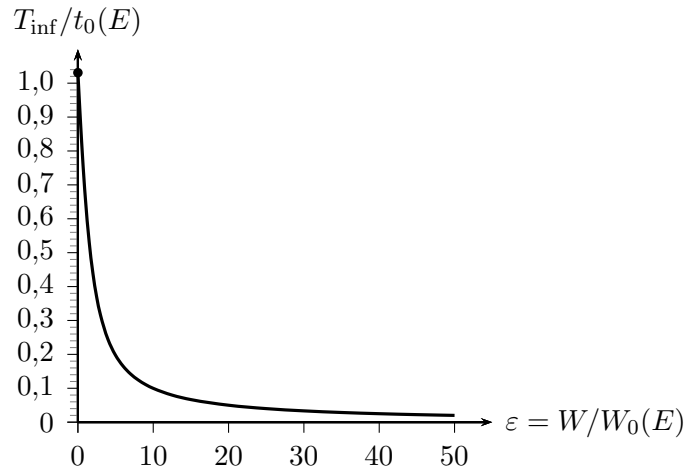


Рис. 5. Зависимость нижнего предела длительности квантового пакета T_{inf} от его безразмерной энергии $\varepsilon = W/W_0$ (см. (16) и (20))

При $\varepsilon \rightarrow 0$, согласно (57), имеем

$$\begin{aligned} T_{\text{inf}} &= 2t_0 \sqrt{\text{Re } \varphi'(\varepsilon)} = \sqrt{2} \alpha t_0 \sqrt{1 - \frac{2(1-2\alpha^3)}{\alpha^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2)} = \sqrt{2} \alpha t_0 \left(1 - \frac{1-2\alpha^3}{\alpha^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right) \simeq \\ &\simeq \frac{2\sqrt{2}\pi}{3^{1/3}\Gamma^2(1/3)} \left(\frac{2m\hbar}{e^2 E^2} \right)^{1/3} = \frac{2,0 \cdot 10^{-13}}{E^{2/3}} \text{ с}, \quad (E - \text{кВ/мм}). \end{aligned}$$

Воспользовавшись асимптотикой (62) для $\varphi'(\varepsilon)$, с помощью (16) и (20) находим

$$\begin{aligned} T_{\text{inf}} &= 2t_0 \sqrt{\text{Re } \varphi'(\varepsilon)} = 2t_0 \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{15}{16} \varepsilon^{-5} + O(\varepsilon^{-8})} \simeq \\ &\simeq \frac{t_0}{\varepsilon} \left(1 - \frac{15}{8} \varepsilon^{-3} \right) = \frac{\hbar}{W} \left(1 - \frac{15}{16} \frac{\hbar^2 e^2 E^2}{m W^3} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, при фиксированной энергии W и малой напряжённости электрического поля E нижний предел длительности $T_{\text{inf}} = \hbar/W$, т. е. удовлетворяет соотношению неопределённостей «энергия–время», а с увеличением E становится $\tau_{\text{inf}} < \hbar/W$. Это также иллюстрирует рис. 6, на котором изображена зависимость (см. (16) и (20)):

$$\begin{aligned} T_{\text{inf}}(W, E) &= 2t_0 \sqrt{\text{Re } \varphi'(\varepsilon)} \Big|_{\varepsilon=W} \left(\frac{2m}{\hbar^2 e^2 E^2} \right)^{1/3} = \\ &= 2 \left(\frac{2m\hbar}{e^2 E^2} \right)^{1/3} \sqrt{-\varepsilon - \text{Re } \varphi^2(\varepsilon)} \Big|_{\varepsilon=W} \left(\frac{2m}{\hbar^2 e^2 E^2} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Этот пример показывает, что перенос соотношения неопределённостей «энергия–время» с динамических задач (типа: ширина уровня–время жизни) на кинематические может приводить к неправильным заключениям.

Подставляя (46) в (45), находим связь между длительностью T_0 волновой функции $|\psi(0, t)|^2$ и длительностью T волновой функции $|\psi(z, t)|^2$, распространяющейся в ускоряющемся электрическом поле:

$$\frac{T(T_0)}{T_{\text{inf}}} = \sqrt{\frac{\tau_0^4 + 2(1 + k_G k_0) \tau_0^2 + (1 + k_G^2)(1 + k_0^2)}{\tau_0^2 + (1 + k_0^2)}}, \quad (48)$$

где $\tau_0 = T_0/T_{\text{inf}}$. Зависимости $T(T_0)$ при значении $k_G = \frac{\text{Im } \varphi'(0)}{\text{Re } \varphi'(0)} = \sqrt{3}$ изображены на рис. 7, на котором верхней и нижней пунктирными линиями изображены огибающие семейства $T(T_0)$ при различных $k_0 \in (-\infty, \infty)$ ([5]).

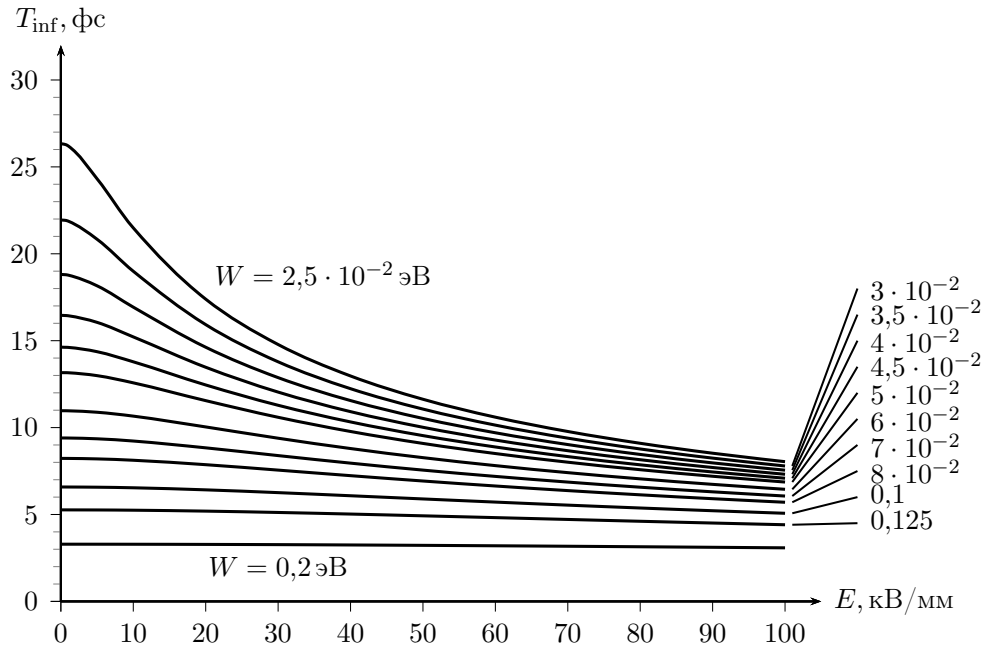


Рис. 6. Зависимость нижнего предела длительности квантового пакета T_{inf} от напряжённости ускоряющего электрического поля E при фиксированной энергии пакета W (в эВ). При $E = 0$ $T_{\text{inf}} = h/W$

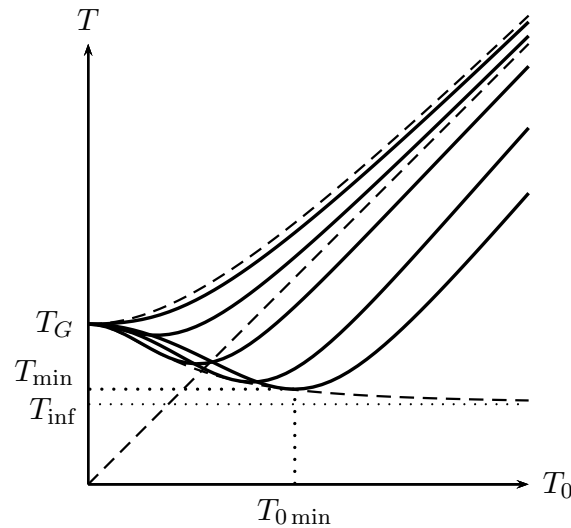


Рис. 7. Связь длительности T волновой функции $|\psi(z, t)|^2$ с длительностью T_0 волновой функции $|\psi(0, t)|^2$

Все кривые семейства (48) остаются конечными при $T_0 \rightarrow 0$ и выходят из общей точки:

$$T(0) = T_{\text{inf}} \sqrt{1 + k_G^2} = \frac{2 |\sigma_G^2|}{\sqrt{\text{Re } \sigma_G^2}} = T_G, \tag{49}$$

где T_G — длительность $|G(t)|^2$ в смысле определения (45). При $T_0 \rightarrow \infty$ (т.е. $T_0 \gg T_{\text{inf}}$) длительность $T(T_0)$ асимптотически стремится к T_0 , при этом, как показано в [5], при выполнении условия

$$|k_0 + k_G| \leq \sqrt{1 + k_G^2} \quad (50)$$

длительность T в пределе остаётся большей T_0 , если же условие (50) не выполнено, то длительность T асимптотически стремится к длительности T_0 снизу.

Через каждую точку (T, T_0) проходят по две кривые семейства (48), соответствующие двум значениям параметра k_0 волновой функции $\psi(0, t)$ (за исключением точек, лежащих на огибающих).

Минимум выражения $T(T_0)$ достигается при

$$T_{0\text{min}} = T_{\text{inf}} \sqrt{\sqrt{1 + k_0^2} \left(|k_0 - k_G| - \sqrt{1 + k_0^2} \right)} \quad (51)$$

и равен

$$T_{\text{min}} = T_{\text{inf}} \sqrt{2|k_0 - k_G| \left(\sqrt{1 + k_0^2} - k_0 \cdot \text{sign}(k_0 - k_G) \right)}. \quad (52)$$

Отметим, что при отсутствии фазовой модуляции ($k_0 = 0$) и в пределе $W \gg W_0$ ($\varepsilon \rightarrow \infty$), из (52) получается, как частный случай, выражение, приведённое в [12] без указания границ его применимости.

Как следует из (51), если выполняется соотношение (50), то зависимость (48) будет монотонной (минимум (51) отсутствует), а если неравенство (50) не выполняется и минимум существует, то зависимость $T(T_0)$ будет частично двузначной — двум различным значениям длительности T_0 из интервала $T_0 \in \left[0, T_{\text{inf}} \sqrt{(k_G - k_0)^2 - (1 + k_0^2)} \right]$ (при этом $T(T_0) \leq T_G$) будет соответствовать два одинаковых значения T , и лишь при $T_0 \geq T_{\text{inf}} \sqrt{(k_G - k_0)^2 - (1 + k_0^2)}$ зависимость $T(T_0)$ снова станет однозначной.

В любом случае, если длительность T волновой функции $|\psi(z, t)|^2$ больше длительности T_G функции Грина при всех длительностях T_0 волновой функции $|\psi(0, t)|^2$, то связь T и T_0 будет при выполнении (50) всегда однозначной.

5. Приложение. Разложение в ряд и асимптотика функции $\varphi(\varepsilon)$

Логарифмическая производная решения (18) уравнения Шрёдингера (17) в однородном электрическом поле выражается через функции Эйри [9, форм. 10.4.23]:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \ln f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \right)} \frac{d}{d\varepsilon} \left[\sqrt{\varepsilon} H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \right) \right] = \frac{\text{Ai}'(-\varepsilon) - i \text{Bi}'(-\varepsilon)}{\text{Ai}(-\varepsilon) - i \text{Bi}(-\varepsilon)}, \quad (53)$$

здесь $\text{Ai}(\varepsilon)$ и $\text{Bi}(\varepsilon)$ — функции Эйри 1-го и 2-го рода, штрих ' — дифференцирование по ε . Функции Эйри и их производные раскладываются в степенные ряды [9, форм. 10.4.2 и 10.4.3], их отношение также представляет степенной ряд, и с помощью [10, форм. 0.313] находим

$$\text{Re } \varphi(\varepsilon) = -\frac{\alpha}{2} \left[1 - \alpha\varepsilon + \frac{1 - 2\alpha^3}{\alpha} \varepsilon^2 - \frac{3\alpha^3 - 1}{3} \varepsilon^3 - \frac{\alpha(5 - 12\alpha^3)}{12} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) \right], \quad (54)$$

$$\text{Im } \varphi(\varepsilon) = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \left[1 + \alpha\varepsilon - \frac{3\alpha^3 - 1}{3} \varepsilon^3 + \frac{\alpha(5 - 12\alpha^3)}{12} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) \right], \quad (55)$$

где α определяется выражением

$$\alpha = \frac{\text{Bi}'(0)}{\sqrt{3}\text{Ai}(0)} = \frac{3^{1/3}\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} = \frac{2\pi}{3^{1/6}\Gamma^2(1/3)} = 0,7290; \quad (56)$$

в предпоследнем выражении использована формула инверсии для гамма-функции Эйлера [9, форм. 6.1.17], с помощью которой получается

$$\Gamma(2/3) = \frac{\pi}{\Gamma(1/3) \cdot \sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3^{1/2} \Gamma(1/3)},$$

а также значение [9, форм. 6.1.11]: $\Gamma(1/3) = 2,679$.

Почленно дифференцируя (54) и (54) по ε , находим

$$\operatorname{Re} \varphi'(\varepsilon) = \frac{\alpha^2}{2} \left[1 - \frac{2(1-2\alpha^3)}{\alpha^2} \varepsilon + \frac{3\alpha^3-1}{\alpha} \varepsilon^2 + \frac{5-12\alpha^2}{3} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \right], \quad (57)$$

$$\operatorname{Im} \varphi'(\varepsilon) = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{2} \left[1 - \frac{3\alpha^3-1}{\alpha} \varepsilon^2 + \frac{5-12\alpha^3}{3} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^5) \right], \quad (58)$$

$$\operatorname{Re} \varphi''(\varepsilon) = -(1-2\alpha^3) \left[1 - \frac{\alpha(3\alpha^3-1)}{1-2\alpha^3} \varepsilon - \frac{\alpha^2(5-12\alpha^2)}{2(1-2\alpha^3)} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \right], \quad (59)$$

$$\operatorname{Im} \varphi''(\varepsilon) = -\alpha \sqrt{3} (3\alpha^3-1) \varepsilon \cdot \left[1 - \frac{\alpha(5-12\alpha^3)}{2(3\alpha^3-1)} \varepsilon + O(\varepsilon^4) \right]. \quad (60)$$

При больших значениях аргумента $\varepsilon \rightarrow \infty$, согласно [9, форм. 10.4.60 и 10.4.64] (с точностью до несущественного постоянного множителя):

$$f(\varepsilon) = \operatorname{Ai}(-\varepsilon) - i \operatorname{Bi}(-\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1/4} \cdot e^{i \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2}} \left[1 - i \frac{5}{48} \varepsilon^{-3/2} + O(\varepsilon^{-3}) \right],$$

откуда

$$\ln f(\varepsilon) \sim i \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{4} \ln \varepsilon + \ln \left[1 - i \frac{5}{48} \varepsilon^{-3/2} + O(\varepsilon^{-3}) \right],$$

или, раскладывая правый логарифм в ряд Тейлора,

$$\ln f(\varepsilon) \sim i \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{4} \ln \varepsilon - i \frac{5}{48} \varepsilon^{-3/2} + O(\varepsilon^{-3}),$$

и, следовательно, при $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \ln f(\varepsilon) \sim i \sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{4\varepsilon} + i \frac{5}{32} \varepsilon^{-5/2} + O(\varepsilon^{-4}), \quad (61)$$

а также, почленно дифференцируя по ε , получаем

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \sim \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{4\varepsilon^2} - i \frac{25}{64} \varepsilon^{-7/2} + O(\varepsilon^{-5}). \quad (62)$$

Использование пакета аналитических вычислений *Maple* позволяет получить больше членов асимптотического разложения $\varphi(\varepsilon)$ и $\varphi'(\varepsilon)$:

$$\varphi(\varepsilon) \sim i \sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{4\varepsilon} + i \frac{5}{32} \varepsilon^{-5/2} + \frac{15}{64} \varepsilon^{-4} - i \frac{1105}{2048} \varepsilon^{-11/2} - \frac{1695}{1024} \varepsilon^{-7} + O(\varepsilon^{-17/2}), \quad (63)$$

$$\varphi'(\varepsilon) \sim \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{4\varepsilon^2} - i \frac{25}{64} \varepsilon^{-7/2} - \frac{15}{16} \varepsilon^{-5} + i \frac{12155}{4096} \varepsilon^{-13/2} + \frac{11865}{1024} \varepsilon^{-8} + O(\varepsilon^{-19/2}). \quad (64)$$

Литература

1. Бутслов М.М., Степанов Б.М., Фанченко С.Д. Электроннооптические преобразователи и их применение в научных исследованиях / под ред. акад. Е.К. Завойского. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 432 с.
2. Пикосекундная электронно-оптическая диагностика в лазерных исследованиях / под ред. акад. Н.Г. Басова, отв. ред. акад. А.М. Прохоров // Труды ФИАН. Т. 155. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 344 с.

3. *Иванов В.С., Золотаревский Ю.М., Лебедев В.Б., Фельдман Г.Г.* Электронно-оптическое приборостроение ВНИИОФИ за 40 лет / Оптико-электронные измерения: Сб. статей. Москва : Университетская книга, 2005. С. 430–453.
4. Высокоскоростная фотоэлектронная регистрация изображений. Сб. статей в 3 т. / под ред. М.Я. Щелева. Москва : Физматлит, 2017.
5. *Бульгин В.С.* Кумулянтный анализ преобразования сигнала линейной физической системой // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 4. С. 52–67.
6. *Бульгин В.С.* О квантовом ограничении электронно-оптического метода исследования быстропротекающих процессов // ЖТФ. 1984. Т. 54, № 1. С. 51–55.
7. *Бульгин В.С.* О квантовом пределе временного разрешения электронно-оптического метода // Тез. докл. XI Всесоюзной научно-техн. конф. «Высокоскоростная фотография и метрология быстропротекающих процессов». 1983. С. 11.
8. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. Москва : Мир, 1974. 341 с.
9. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. Москва : Наука, 1979. 832 с.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 1100 с.
11. *Мотт Н., Снеддон И.* Волновая механика и её применения. Москва : Наука, 1966. 428 с.
12. *Дынин Е.А., Пономарёв В.Д.* О квантовом пределе временного разрешения электронно-оптических фокусирующих систем // ЖТФ. 1984. Т. 54, № 2. С. 361–367.

References

1. *Butslov M.M., Stepanov B.M., Fanchenko S.D.* Electron-optical converters and their application in scientific research. Ed. by acad. E.K. Zavoisky. Moscow : Nauka, 1978. 432 p. (in Russian).
2. Picosecond electron-optical diagnostics in laser researches. Ed. by acad. A.M. Prokhorov). Proceedings of FIAN. V. 155. Moscow : Nauka, 1978. 344 p. (in Russian).
3. Electron-optical instrument-making of VNIIOFI in 40 years. Optical-electronic measurements. Moscow : Universitetskaya kniga, 2005. P. 430–453. (in Russian).
4. High-speed photoelectronic registration of images. Ed. M.Ya. Schelev. V. 3. Moscow : Fizmatlit, 2017. (in Russian).
5. *Bulygin V.S.* Cumulant analysis transformation a signal of linear physical system. Proceedings of MIPT. 2019. V. 11, N 4. (in Russian).
6. *Bulygin V.S.* Quantum Limitation of the Electron-Optical Method of Studing the Fast Processes. Zhurnal Tekhniceskoi Fiziki. 1984. V. 54, N 1. P. 51–55. (in Russian).
7. *Bulygin V.S.* About a quantum limit of Temporal Resolution of an electron-optical method. Theses of reports of the XI All-Union scientific and technical conference «The high-speed photo and a metrology of the fast-proceeding processes». Moscow : 1983. P. 11. (in Russian).
8. *Flügge S.* Practical Quantum Mehanics. Moscow : Mir, 1974. V. 1. 341 p. (in Russian).
9. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. Moscow : Nauka, 1979. 832 p. (in Russian).
10. *Gradshteyn I.M., Ryzhik I.M.* Table of integrals, series, and products. Moscow: GRFML, 1962. 1100 p. (in Russian).

11. *N. Mott, I. Sneddon.* Wave Mechanics and its Applications. Moscow : Nauka, 1966. 428 p. (in Russian).
12. *Dynin E.A., Ponomarev V.D.* About a Quantum limit of Temporal Resolution of the electron-optical focusing systems. Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki. 1984. V. 54, N 2. P. 361–367. (in Russian).

Поступила в редакцию 31.08.2019