УДК 517

Е. С. Колпаков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Сведение вычисления фейнмановских интегралов к интегралам по мере Винера с использованием аналитического продолжения

Построены фейнмановские интегралы как аналитические продолжения интеграла модели φ^4 в евклидовом случае для разрывных траекторий. Установлена формула связи фейнмановского интеграла с интегралом по мере Винера по непрерывным траекториям.

Ключевые слова: интеграл Фейнмана, мера Винера.

E. S. Kolpakov

Lomonosov Moscow State University

Reducing the computation of Feynman integrals to integrals in the Wiener measure applying analytic continuation

Feynman integrals are constructed as analytic continuation of the integral of the φ^4 model in the Euclidean case for discontinuous trajectories. A formula is obtained for the connection between the Feynman integral and the integral over the Wiener measure along continuous trajectories.

Key words: Feynman integral, Wiener measure.

1. Введение

Работа посвящена сведению вычисления фейнмановских интегралов по пространству разрывных траекторий к нахождению интегралов от преобразованных функционалов по мере Винера. При этом интегрирование проводится уже по непрерывным траекториям.

Было замечено в работе Белокурова В. В., Шавгулидзе Е. Т. [1], что интегралы, описывающие модель φ^4, могут быть сведены к интегралам по мере Винера с помощью нелинейного преобразования, в процессе которого возникают интегралы по разрывным траекториям. Отметим, что эта задача связана с уравнением теплопроводности [2–4].

В данной работе исследованы свойства нелинейного преобразования, и построено аналитическое продолжение интеграла в комплексную область. В результате был определён фейнмановский интеграл для модели φ^4 на разрывных траекториях.

Введём E разрывных траекторий следующим образом: $E = \cup_{n=0}^{\infty} X_n$, где X_n есть пространство функций $x(t)$ вида $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{t-t_j^*} + \varphi(t)$ где $t_1^*, t_2^*, ... \in (0,1]$, а функция φ гёльдерова на $[0,1]$ с коэффициентом $\theta \in (0; \frac{1}{2})$ и $\varphi(0) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j^*}$ и $\varphi(t_k^*) = -\sum\limits_{j\neq k} \frac{1}{t_k^*-t_j^*}$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Было доказано, что отображение из пространства E в пространство гёльдеровых функций

$C_0^\theta([0,1])$, заданное формулой $y(t) = x(t) + \int\limits_0^t x^2(\tau)d\tau$ взаимно-однозначно и непрерывно, см. работу [5].

Предложенное отображение позволяет при $\alpha > 0$ свести вычисление функционального интеграла

$$I(\alpha) = \frac{\int\limits_E f(x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_0^1(x'(t))^2dt-\int\limits_0^1 x^4(t)dt+\frac{1}{3}x^3(1)}dx}{\int\limits_E e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_0^1(x'(t))^2dt-\int_0^1 x^4(t)dt+\frac{1}{3}x^3(1)}dx}$$

к интегралу по мере Винера:

$$I(\alpha) = \int\limits_{C_0^\theta([0,1])} f(x_{\alpha,y})exp(-\frac{1}{2}\alpha^2(\int\limits_0^1(y'(t))^2dt))dy =$$

$$= \int\limits_{C_0^\theta([0,1])} f(x_{\alpha,y})exp(-\frac{1}{2}(\int\limits_0^1(z'_{\alpha,y}(t))^2dt))dy/$$

Такая конструкция при $\alpha > 0$ использовалась в [1].

Воспользуемся определением интеграла Фейнмана через аналитическое продолжение из монографии Смолянова О. Г., Шавгулидзе Е. Т. [6]. Отметим, что в нашем случае аналитический фейнмановский интеграл будет совпадать с интегралом Фейнмана как пределом конечнократных интегралов.

Рассмотрим функционал $f(x) = \int\limits_0^1(\int\limits_0^{t_2} x(t_1)dt_1)\varphi(t_2)dt_2$, где φ – произвольная гёльдерова функция. Он существует на функциях вида $x(t) = \sum\limits_{j=1}^n \frac{\beta_0}{t-t_j^*} + \gamma(t)$, где β_0 – константа, а γ – гёльдерова функция, поскольку

$$\int\limits_0^1(\int\limits_0^{t_2} x(t_1)dt_1)\varphi(t_2)dt_2 =$$

$$= \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1(\int\limits_0^{t_2} \frac{\beta_0}{t_1-t_j^*}dt_1)\varphi(t_2)dt_2 - \int\limits_0^1(\int\limits_0^{t_2} \gamma(t_1)dt_1)\varphi(t_2)dt_2 =$$

$$= \sum_{j=1}^n \beta_0\int\limits_0^1 \ln|t_2 - t_j^*|\varphi(t_2)dt_2 - \int\limits_0^1(\int\limits_0^{t_2} \gamma(t_1)dt_1)\varphi(t_2)dt_2.$$

А интегралы в последней части равенства существуют. Определим пространство $\mathbf{F}$ как пространство линейных комбинаций конечных произведений таких функционалов.

2. Результаты

Теорема 1. *Для всех функционалов из* $\mathbf{F}$ *существует аналитическое продолжение функции* $I(\alpha)$ *на область*

$$\{\alpha|0 \le \arg\alpha \le \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} \le |\alpha| \le 2\}.$$

Идея доказательства: введём промежуточное пространство Ψ, на котором берётся функциональный интеграл, зависящий от параметра. И у интеграла на пространстве Ψ существует аналитическое продолжение по параметру.

Опишем промежуточное пространство Ψ функций ψ, в котором берётся аналитическое продолжение интеграла.

α, x, y связаны уравнением $\alpha y(t) = x(t) + \int\limits_0^t x^2(\tau)d\tau$. Сделаем замену $\xi(t) = \alpha y(t) - x(t)$, уравнение примет вид $\xi(t) = \int\limits_0^t (\alpha y(\tau) - \xi(\tau))^2 d\tau$, откуда

$$\xi'(t) = (\alpha y(t) - \xi(t))^2,$$

сделаем замену $\psi_1(t) = \frac{Re\xi(t)}{1+|\xi(t)|^2}$, $\psi_2(t) = \frac{Im\xi(t)}{1+|\xi(t)|^2}$, $\psi_3(t) = \frac{|\xi(t)|^2}{1+|\xi(t)|^2}$ и тогда $\xi(t) = \frac{\psi_1(t)}{1-\psi_3(t)} + i\frac{\psi_2(t)}{1-\psi_3(t)}$. Получим функцию $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$, принимающую значения на сфере $\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2 = \psi_3$ в трёхмерном вещественном пространстве с координатами (ψ_1, ψ_2, ψ_3). Все функции ψ, которые могут быть получены таким образом для любых гёльдеровых функций y, образуют пространство Ψ.

Уравнение

$$\xi'(t) = (\alpha y(t) - \xi(t))^2$$

после замены примет вид

$$(\psi_1'(t)(1-\psi_3(t)) + \psi_3'(t)\psi_1(t)) + i(\psi_2'(t)(1-\psi_3(t)) + \psi_3'(t)\psi_2(t)) =$$
$$= (\alpha(1-\psi_3(t))y(t) - (\psi_1(t) + i\psi_2(t)))^2.$$

Для данного комплексного α из области

$$\{\alpha | 0 \leq \arg\alpha \leq \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} \leq |\alpha| \leq 2\}$$

и гельдеровой с параметром θ функции $y(t)$ можно определить функцию $\psi_{\alpha,y} \in \Psi$ так, что для её координатных функций $\psi_{\alpha,y,1}, \psi_{\alpha,y,2}, \psi_{\alpha,y,3}$ выполнено

$$(\psi_{\alpha,y,1}'(t)(1-\psi_{\alpha,y,3}(t)) + \psi_{\alpha,y,3}'(t)\psi_{\alpha,y,1}(t)) + i(\psi_{\alpha,y,2}'(t)(1-\psi_{\alpha,y,3}(t)) + \psi_{\alpha,y,3}'(t)\psi_{\alpha,y,2}(t)) =$$
$$= (\alpha(1-\psi_3(t))y(t) - (\psi_1(t) + i\psi_2(t)))^2$$

при всех $t \in [0,1]$, кроме тех, в которых $\psi_{\alpha,y,3}(t) = 1$.

Таким образом, у функции $\psi_{\alpha,y}(t)$ существует аналитическое продолжение по параметру α.

Тогда у интеграла $I(\alpha)$ существует аналитическое продолжение:

$$I(\alpha) = \int\limits_{\Psi} g_f(\psi_{\alpha,y})W(dy) = \int\limits_{C_0^\theta([0,1])} f(x_{\alpha,y})W(dy),$$

где g_f – функционал на пространстве Ψ, определяемый следующим образом:
$g_f(\psi_{\alpha,y}) = f(x_{\alpha,y})$ для данного функционала f.

Таким образом, получена следующая формула:

Теорема 2. (*формула сведения*). *На области* $\{\alpha | 0 \leq \arg\alpha \leq \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} \leq |\alpha| \leq 2\}$ *для* $f \in \mathbf{F}$ *выполнено равенство* $I(\alpha) = \int\limits_{C_0^\theta([0,1])} f(x_{\alpha,y})W(dy)$.

Следствие. *Выполнено равенство функциональных интегралов:*

$$\frac{\int\limits_E f(x)e^{-\frac{1}{2}i\int\limits_0^1(x'(t))^2dt-\int\limits_0^1 x^4(t)dt+\frac{1}{3}x^3(1)}dx}{\int\limits_E e^{-\frac{1}{2}i\int\limits_0^1(x'(t))^2dt-\int_0^1 x^4(t)dt+\frac{1}{3}x^3(1)}dx} = \int\limits_{C_0^\theta([0,1])} f(x_{e^{\frac{\pi}{4}i},y})W(dy)$$

Идея доказательства: подставим $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}}$ в формулу сведения, получим требуемое следствие.

3. Итог

Вычисление интеграла по пространству E разрывных траекторий для комплексных α сведено к вычислению интеграла по мере Винера:

$$\frac{\int\limits_E f(x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_0^1(x'(t))^2dt-\int\limits_0^1 x^4(t)dt+\frac{1}{3}x^3(1)}dx}{\int\limits_E e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\int\limits_0^1(x'(t))^2dt-\int_0^1 x^4(t)dt+\frac{1}{3}x^3(1)}dx} = \int\limits_{C_0^\theta([0,1])} f(x_{\alpha,y})W(dy)$$

4. Благодарности

Автор выражает благодарность Е. Т. Шавгулидзе и О. Г. Смолянову за ценные замечания.

Литература

1. *Belokurov V. V.,Shavgulidze E. T.* Paths with singularities in functional integrals of quantum field theory. 2013. https://arxiv.org/abs/1112.3899
2. *Бушев Д.Н., Харкевич Ю.И.* Нахождение подпространств решений уравнения Лапласа и теплопроводности, изометрических пространствам действительных функций, и некоторые их применения // Матем. заметки. 2018. Т. 103, вып. 6. С. 803–817.
3. *Махмудов К.О., Махмудов О.И., Тарханов Н.Н.* Нестандартная задача Коши для уравнения теплопроводности // Матем. заметки. 2017. Т. 102, вып. 2. С. 270–283.
4. *Kuo H.H.* Gaussian measures in banach spaces. Springer-Verlag, 1975.
5. *Kolpakov E.S.* Transformation of the functional integral over discontinuous path to integrals along continuous path // Proceedings of the International scientific conference «Infinite-dimensional analysis and mathematical physics». 2019. C. 25.
6. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные Интегралы. Москва : Изд-во МГУ, 2015.

References

1. *Belokurov V. V.,Shavgulidze E. T.* Paths with singularities in functional integrals of quantum field theory. 2013. https://arxiv.org/abs/1112.3899
2. *Bushev D.N., Kharkevich Yu.I.* Finding Solution Subspaces of the Laplace and Heat Equations Isometric to Spaces of Real Functions, and Some of Their Applications. Mathematical Notes. 2018. V. 103, N 6. P. 869–880.

3. *Makhmudov K.O., Makhmudov O.I., Tarkhanov N.* A nonstandard Cauchy problem for the heat equation. Mathematical Notes. 2017. V. 102, N 2. P. 250–260.

4. *Kuo H.H.* Gaussian measures in banach spaces. Springer-Verlag, 1975.

5. *Kolpakov E.S.* Transformation of the functional integral over discontinuous path to integrals along continuous path. Proceedings of the International scientific conference «Infinite-dimensional analysis and mathematical physics». 2019. P. 25.

6. *Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T.* Continual integrals. Moscow : Moscow State University Press, 2015.

Поступила в редакцию 29.11.2020