

УДК 533.6

DOI: 10.53815/20726759_2021_13_3_133

Н. Ш. Нгуен

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Численный метод для модели Эйлера движения переохлажденных капель в условиях обледенения

Модель Эйлера движения капель можно рассматривать как уравнения газа без давления. Эта система является слабо гиперболической. Решение задачи Римана может быть дельта-шок или вакуум. Для расчета разработана схема типа Годунова. В качестве примера приведены расчеты одномерных задач, задача движения капли в гравитационном поле и задача обтекания цилиндра.

Ключевые слова: Модель Эйлера движения капель, слабо гиперболическая система, дельта-шок, схема типа Годунова.

N. S. Nguyen

Moscow Institute for Physics and Technology

Numerical method for the Eulerian droplet model in icing conditions

Eulerian droplet model can be seen as pressureless gas equations. The system is nonstrictly hyperbolic. The solutions of the Riemann problem can be delta shock or vacuum. A new Godunov-type scheme is developed. Numerical results for onedimensional problems, droplet moving in a gravity field and the flow over a cylinder are presented.

Key words: Eulerian particle model, nonstrictly hyperbolic system, delta shock waves, Godunov-type scheme.

1. Введение

Моделирование нарастания льда на поверхности тела изучали в разных исследовательских центрах разных стран, например, в NASA (США), ONERA (Франция), DRA (Великобритания) [1]. Процесс моделирования нарастания льда можно разбить на три этапа:

- В условиях обледенения, объемная доля переохлажденных капель очень мала, поэтому можно рассмотреть поле воздуха и поле водности отдельно, пренебрегая влиянием капель на течение воздуха. На первом этапе осуществляется моделирование обтекания летательного аппарата (в дальнейшем – ЛА) сухим воздухом. Движение воздуха описывается системой уравнений Рейнольдса. Первый шаг является достаточно стандартным и не требует дополнительного описания.
- На втором этапе проводится моделирование движения переохлажденных капель в локальном поле газодинамических параметров, рассчитанном на первом этапе.

- На третьем этапе проводится моделирование термодинамического процесса нарастания льда на поверхности ЛА. Так как выросший лед изменяет геометрию ЛА, цикл расчета может повторяться.

В данной работе рассматривается вторая задача. При моделировании движения капель применяется два подхода. В программе LEWICE [2] и IGLOO2D (ONERA) [3] применяется подход Лагранжа. При таком подходе непосредственно рассчитывается движение капель. В программе FENSAP-ICE [4] используется подход Эйлера, рассматривается плотность капель и уравнения (будем называть их *уравнения водности*) напоминают систему уравнений Эйлера. С практической точки зрения, второй подход имеет существенные преимущества. Прежде всего это совместимость с солвером движения воздуха, в котором обычно используется подход Эйлера. Использование одних и тех же расчетных сеток на первых двух этапах существенно сокращает время подготовки расчета, упрощает портирование данных при переходе ко второму этапу, позволяет упростить расчет сложных геометрий. Кроме того, подход Эйлера требует существенно меньших затрат вычислительных ресурсов, особенно для больших 3D-задач.

Систему уравнений водности можно рассматривать как уравнения газа без давления. Система уравнений движения капель является слабо гиперболической, что может приводить к проблемам с устойчивостью метода решения. Существуют подходы, основанные на регуляризации системы уравнений водности путем добавления в нее фиктивных членов [5,6]. В данной работе представлен метод решения оригинальной модели Эйлера движения капель и показано, что предлагаемый метод достаточно устойчив и эффективен.

2. Модель Эйлера движения капель

Основные принципы описания движения переохлажденных капель с подходом Эйлера изложены в работе [8]. По законам сохранения массы и импульса формируется система уравнений водности:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = F_{Di} + F_{GBi}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\rho = \rho_w \alpha$ – водность или абсолютная влажность, α – объёмная доля капель, ρ_w – плотность воды, v_i – скорость капли, F_{Di} – сила сопротивления от потока воздуха, F_{GBi} – сила тяжести и плавучести:

$$F_{Di} = \frac{0.75 C_D Re_d \mu}{\rho_w d^2} \rho (v_{ai} - v_i), \quad F_{GBi} = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w}\right) \rho g_i,$$

где μ – молекулярная вязкость, v_{ai} – i -компонента скорости воздуха, d – средний диаметр капли, C_D – коэффициент сопротивления, ρ_a – плотность воздуха, g_i – ускорение свободного падения.

Число Re_d вычисляется по следующей формуле:

$$Re = \frac{\rho_a d}{\mu} |v_a - v|.$$

Для определения C_D используем эмпирическую формулу [8]:

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_d} (1 + 0.15 Re_d^{0.687}), & Re_d < 1000, \\ 0.4, & Re_d \geq 1000. \end{cases}$$

Для определения свойств системы уравнений водности рассмотрим её двумерный аналог:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q, \quad (2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{Dx} + F_{GBx} \\ F_{Dy} + F_{GBy} \end{pmatrix}.$$

Перепишем систему:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J_x \frac{\partial U}{\partial x} + J_y \frac{\partial U}{\partial y} = Q,$$

где $J_x = \frac{\partial F}{\partial U}$, $J_y = \frac{\partial H}{\partial U}$ — матрицы Якобиан. Для любого единичного вектора $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$, рассмотрим матрицу $A = J_x n_x + J_y n_y$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ -u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) & un_x + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) & un_y \\ -v(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) & vn_x & vn_y + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \end{bmatrix}.$$

Она имеет три одинаковых собственных значений $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$. Система (2) является слабо гиперболической.

3. Численный метод

Численный метод строится в рамках конечно-объемного подхода, конкретное описание которого можно найти во многих источниках, например [12]. Для простоты рассмотрим фиксированный объем V в одномерном потоке, которому присваивается номер (i) . Численная схема для системы водности будет иметь вид

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau^n}{V_i} [F_{i+1/2} - F_{i-1/2}] + \tau^n Q_i,$$

где τ^n — шаг по времени, $F_{i\pm 1/2}$ — потоки сквозь грани ячейки. Задача определения значений этих потоков называется *задачей Римана о распаде произвольного разрыва*. Для решения задачи Римана используем метод типа Годунова для уравнений газодинамики [7, 11]. Конкретно, рассмотрим локальную одномерную задачу Римана:

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L, & x \leq x_{i+1/2}, \\ U_R, & x > x_{i+1/2}. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку система (2) имеет только одну характеристику (три характеристики совпадают), возможные конфигурации постановки задачи показаны на рис. 1.

По положению левой и правой характеристик мы предлагаем следующую схему для определения решения:

$$u_L > u_R : U_{i+1/2} = \begin{cases} U_L, & \text{если } (\rho_L u_L + \rho_R u_R) > 0, \\ U_R, & \text{дргой случай,} \end{cases} \\ u_L < u_R : U_{i+1/2} = \begin{cases} U_L, & \text{если } u_L > 0, \\ U_R, & \text{если } u_R < 0, \\ 0, & \text{если } u_L \leq 0 \leq u_R. \end{cases} \quad (4)$$

Обратим внимание на случай столкновения потоков. В таком случае, критерием для выбора решения является сумма импульсов потоков. Если эта сумма больше нуля, то по закону сохранения импульса, импульс образующего потока после удара также больше нуля, из чего следует, что его характеристика направлена вправо. Поэтому мы возьмем $U_{i+1/2} = U_L$.

Для вычисления потока сквозь грани ячейки используется формула

$$F_{i+1/2} = F(U_{i+1/2}).$$

В данной работе, рассмотрим два типа схем: схема первого порядка Годунова (Godunov), схема второго порядка TVD (Kogan, vanLeer). Сравнение этих схем будет представлено в следующей главе.

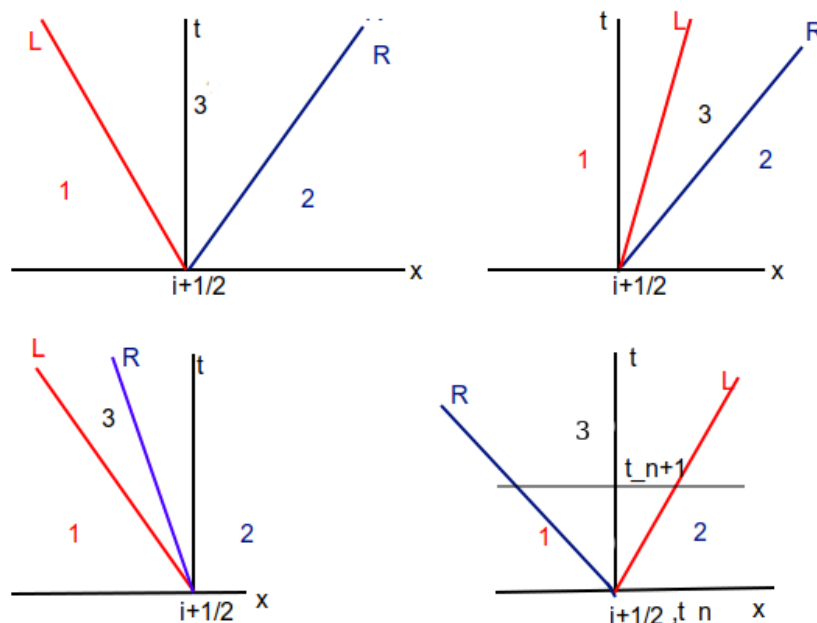


Рис. 1. Постановка задачи Римана

4. Модификации модели Эйлера движения капель и их численный метод

Система уравнений (1) очень похожа на систему уравнений движения невязкого газа Эйлера, если не учитывается один аспект: у неё нет статического давления. Как показано выше, она не является гиперболической.

С попыткой превратить систему (1) в гиперболическую обычно добавляется некое «давление» в левой [6] или в обеих [5] частях уравнений. Это давление определяется по формуле $p_d = C\rho^k$, где C – некоторый коэффициент, $k = 1.0, 2.0, \dots$. В этой статье используется формулу $p_d = C\rho$ с коэффициентом порядка $C \approx 0.001$, как предполагается в работе [6]. Это давление называется *давлением частиц*. Оно прямо пропорционально водности. В итоге, мы получим ещё две модификации модели движения капель:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j + p_d \sigma_{ij})}{\partial x_j} = F_{Di} + F_{GBi} \end{cases} \quad (5)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j + p_d \sigma_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial p_d}{\partial x_i} + F_{Di} + F_{GBi}. \end{cases} \quad (6)$$

Эти системы гиперболические, для решения их задачи Римана можно использовать метод Роу [7]. Сравнение метода Годунова для оригинальной системы и метода Роу для модификаций будет представлено в следующей главе.

С давлением частиц $p_d = C\rho$, эти системы похожи на систему уравнений изотермического газа [7]:

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

где в одномерном случае

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho a^2 \end{pmatrix},$$

a – ненулевая константная скорость распространения звука. Для определения матрицы Якоби, пусть $u_1 \equiv \rho$, $u_2 \equiv \rho u$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2^2/u_1 + a^2 u_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(u_2/u_1)^2 + a^2 & 2u_2/u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix}.$$

Матрица Якоби A имеет два собственных числа

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u + a$$

и два правые собственных вектора

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \end{pmatrix}.$$

Соответственно, в приближении Роу имеем:

$$U_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_L + U_R) - \frac{1}{2}R \text{sign}(\Lambda) R^{-1}(U_R - U_L),$$

где R – матрица, столбцами которой являются собственные векторы, Λ – диагональная матрица, диагональ которой состоит из собственных чисел. Тогда, поток сквозь грани ячейки определяется по формуле

$$F_{i+1/2} = F(U_{i+1/2})$$

или

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_L + F_R) - \frac{1}{2}R|\Lambda|R^{-1}(U_R - U_L).$$

По постановке Роу величина u , появляющаяся в R, Λ , вычисляется следующей формулой:

$$u = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}.$$

Однако при решении реальных задач движения переохлажденных капель в расчете может появляться зона, куда капли не попадают. В этой зоне нет капель, то есть $\rho = 0$. В таком случае, чтобы избежать ошибки деления на ноль, для вычисления средней скорости Роу используется формула:

$$u = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

5. Численные результаты

5.1. Безразмерные одномерные задачи

Рассмотрим простейший вид системы (1) – безразмерные одномерные уравнения движений капель:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\alpha u)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u^2)}{\partial x} = \mu \alpha (u_a - u), \end{cases} \quad (7)$$

где α – объёмная доля, μ – коэффициент сопротивления, u_a – скорость воздуха.

Постановка задачи Римана:

$$(\alpha, u)(x, 0) = \begin{cases} (\alpha_l, u_l), & x \leq 0, \\ (\alpha_r, u_r), & x > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Точное решение этой задачи представлено в статье [9]. Это решение — либо дельта-шок, либо вакуум.

В случае дельта-шока $u_l > u_r$

$$(\alpha, u)(x, t) = \begin{cases} (\alpha_l, \mathbf{u}_l(x, t)), & x < \xi(t), \\ (\omega(t)\delta(x - \xi(t)), \sigma(t)), & x = \xi(t), \\ (\alpha_r, \mathbf{u}_r(x, t)), & x > \xi(t), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{\sqrt{\alpha_l \alpha_r} (u_l - u_r)}{1 - e^{-\mu t}}, \\ \sigma(t) &= u_a + \left(\frac{\mu \sqrt{\alpha_l} u_l + \sqrt{\alpha_r} u_r}{\sqrt{\alpha_l} + \sqrt{\alpha_r}} - u_a \right) e^{-\mu t}, \\ \delta(t) &\text{ — дельта функция,} \\ \xi(t) &= \int_0^t \sigma(s) ds, \\ \mathbf{u}_l(x, t) &= u_a + (u_l - u_a) e^{\mu t}, \\ \mathbf{u}_r(x, t) &= u_a + (u_r - u_a) e^{\mu t}. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае вакуума $u_l < u_r$

$$(\alpha, u)(x, t) = \begin{cases} (\alpha_l, \mathbf{u}_l(x, t)), & x < X_1(t), \\ (0, \bar{u}(x, t)), & X_1(t) \leq x \leq X_2(t), \\ (\alpha_r, \mathbf{u}_r(x, t)), & x > X_2(t), \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= u_a + \frac{\mu(x - u_a t)}{e^{\mu t} - 1}, \\ X_1(t) &= u_a t + \frac{(u_a - u_l)(e^{\mu t} - 1)}{\mu}, \\ X_2(t) &= u_a t + \frac{(u_a - u_r)(e^{\mu t} - 1)}{\mu}. \end{aligned} \quad (12)$$

Конкретные постановки задач показаны в табл. 1. Другие параметры расчетов представлены ниже:

$$\mu = 0.2, \quad u_a = 1.0, \quad \Delta x = 10^{-2}, \quad \Delta t = 10^{-3}, \quad t = 1.0.$$

Т а б л и ц а 1

Одномерные задачи

	α_l	u_l	α_r	u_r
Дельта – шок	0.008	1.5	0.003	0.5
Вакуум	0.008	0.5	0.003	1.5

Первая задача представляет случай образования дельта-шока при столкновении потоков. Вторая задача — это случай, когда два потока отделяются друг от друга, вследствие образуется вакуум.

Сравнение реконструкций Годунова, Колгана и ван Лиры

Полученные результаты в момент времени $t = 1$ представлены на рис. 2 и 3. Видно, что разработанный метод дает приемлемые результаты, при этом схема ван Лиры дает более точные результаты чем схемы Колгана и Годунова.

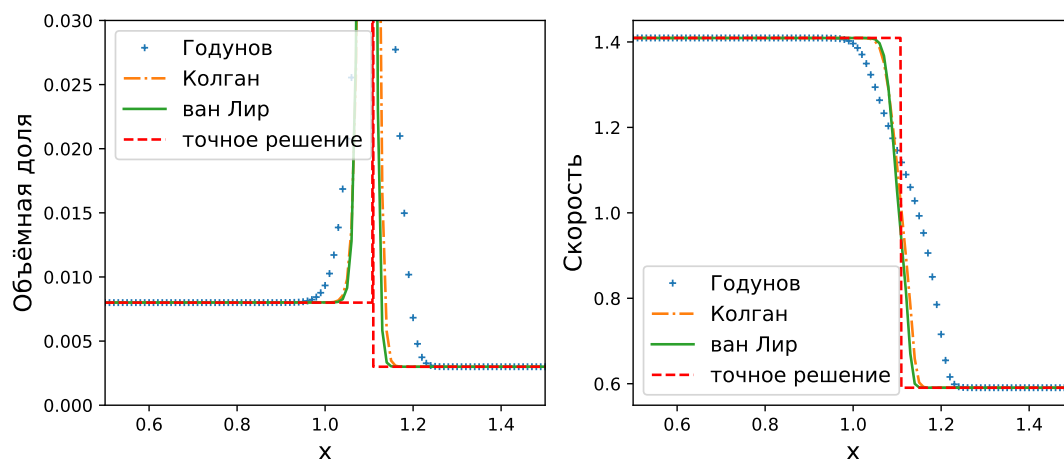


Рис. 2. Образование дельта-шока

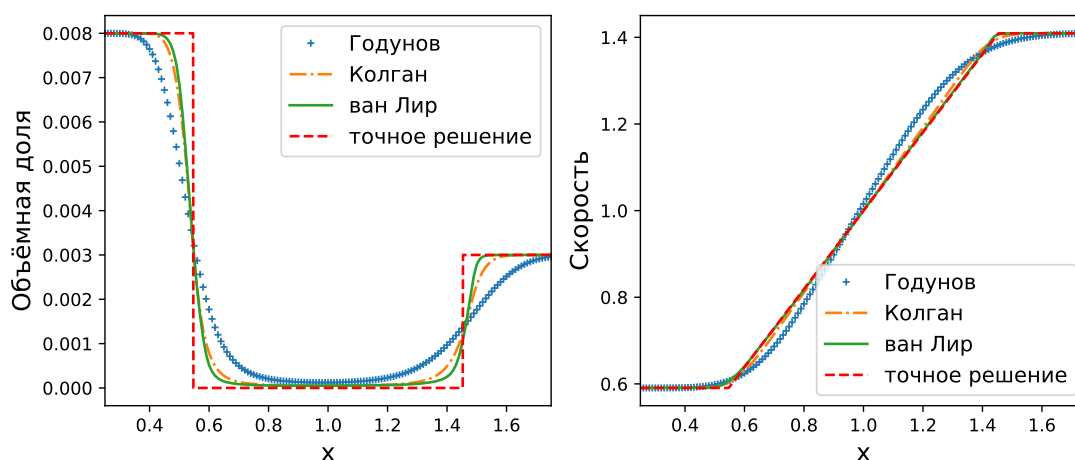


Рис. 3. Образование вакуума

5.2. Двумерные задачи

Задача свободного падения капли

Рассмотрим втекание каплю в расчетную область под действием силы тяжести, пренебрегая силой аэродинамического сопротивления в неподвижном воздухе. Начальные параметры расчёта:

$$d = 16 \text{ мкм}, V_d = (10.0, 0.0) \text{ м/с}, \rho = 0.01 \text{ кг/м}^3, g = 9.8 \text{ м/с}^2.$$

На рис. 4 представлено поле плотности каплей и результат сравнения траектории потока с траекторией тела, брошенного горизонтально со скоростью u : $x = ut, y = y_0 + gt^2/2$. Результат показывает совпадение этих траекторий. Это значит, что гравитационный член в уравнении движения капли правильно работает.

Влияние ветра

Далее рассмотрим, как ведет себя поток каплей в гравитационном поле, когда ветер дует вверх. Начальные параметры:

$$d = 1,6 \text{ мм}, V_d = (80.0, 0.0) \text{ м/с}, \rho = 0.55 \text{ г/м}^3, g = 9.8 \text{ м/с}^2, V_a = (0.0, 5.0) \text{ м/с}.$$

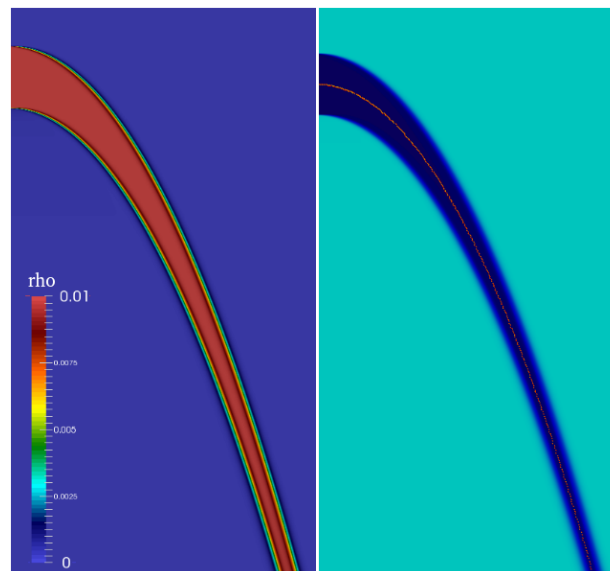


Рис. 4. Свободное падение потока капль

Здесь мы увидим накопление капль из-за противодействия на них силы ветра и силы гравитации (рис. 5). Когда концентрация капль достаточно большая, они падают вниз (рис. 6).

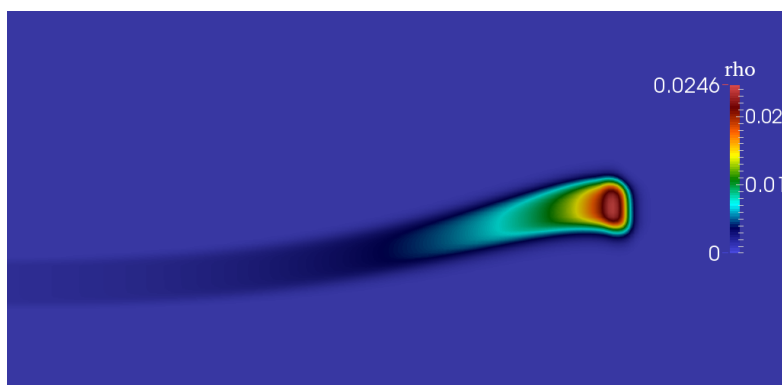


Рис. 5. Поток капль под действием ветра и гравитации



Рис. 6. Поток капль под действием ветра и гравитации

Результаты этих двух тестов показывают, что в разработанной программе все силы, действующие на капли, физичны.

Обтекание цилиндра

Рассмотрим обтекание цилиндра потока каплеь диаметра $d = 20$ мкм, водность (LWC) $\rho = 0.54$ г/м³. Начальные параметры:

$$V_{d,a} = (90.0, 0.0) \text{ м/с}, \quad p = 100000.0 \text{ Па}, \quad T = 268.3 \text{ К}.$$

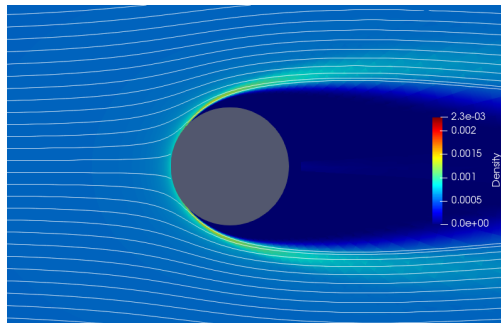


Рис. 7. Поле водности обтекания цилиндра

Для вычисления течения воздуха используется модель турбулентности Спаларта–Алмараса. На рис. 7 представлено поле водности и траектории движения каплеь. Видно, что поток каплеь отрывается от поверхности цилиндра, образуется «сухая зона» за ним, в которой водность очень мала.

Дальше проведено сравнение скорости сходимости решения при использовании оригинальной системы уравнений водности (1) методом Годунова, и модифицированных систем (5), (6) методом Роу. Для этого рассматривается коэффициент захвата каплеь на поверхности:

$$\beta = \frac{\rho_w V_{w,n}}{\rho_\infty V_\infty},$$

где $\rho_w, V_{w,n}$ есть водность и нормальная скорость каплеь на поверхности, ρ_∞, V_∞ — параметры набегающего потока каплеь.

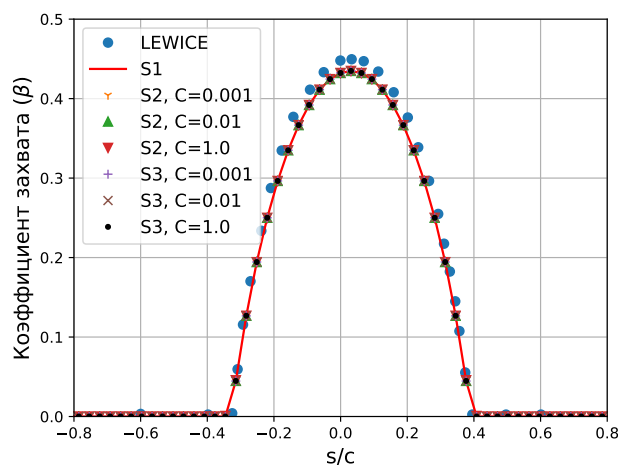


Рис. 8. Локальный коэффициент захвата

На рис. 8 показано, что численные результаты всех систем уравнений (S1 — система (1), S2 — система (5), S3 — система (6) при коэффициентах давления $C = 0.001, C = 0.01, C = 1.0$ практически совпадают. Это объясняется тем, что в системе (6) добавление давления частиц в обеих частях устраняет изменения в результате, а в системе (5) это давление маленькое по значению и оно очень слабо влияет на результат. Также видно, что полученные результаты мало отличаются друг от друга и от результата LEWICE [10] — двумерной программы моделирования обледенения в NASA.

Дальше на рис. (9) представлена сходимость суммы коэффициента захвата на всей поверхности цилиндра по числу итерации техники локального шага по времени. Скорости сходимости решений разных методов не сильно отличаются.

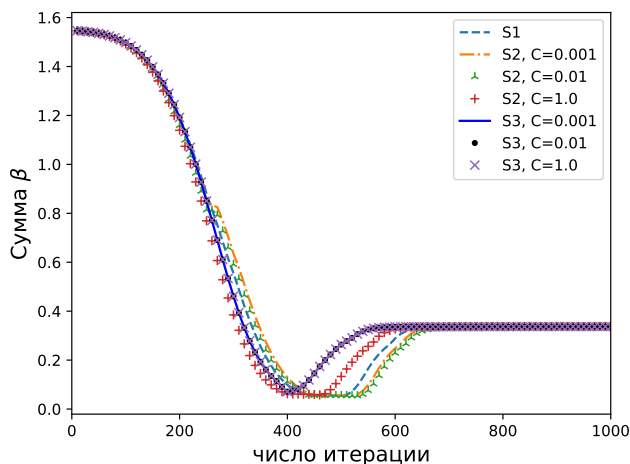


Рис. 9. Сходимость решений по итерации

6. Заключение

Вычислительные результаты показывают, что разработанный метод типа Годунова, основанный на решении задачи Римана, является достаточно простым и позволяет получать приемлемые результаты при решении системы уравнений водности.

Методы, основанные на искусственном добавлении давления в исходные уравнения водности (1), приводят к незначительному увеличению скорости сходимости решения. При этом, добавление давления в систему и использование метода Роу для модификаций системы (5) и (6) усложняют математическую модель и код солвера. Поэтому автор предлагает использовать разработанный метод типа Годунова для решения оригинальной системы уравнений водности.

Литература

1. *Wright W.B., Gent R.W., Guffond D.* DRA/NASA/ONERA Collaboration on Icing Research. Part II—Prediction of Airfoil Ice Accretion // NASA Technical Report, NASA-CR-202349. 1997.
2. *Ruff G., Berkowitz B.* Users Manual for the NASA Lewis Ice Accretion Prediction Code (LEWICE) // NASA Technical Report, NASA-CR-185129. 1990.
3. *Trontin P., Kontogiannis A., Blanchard G., Villedieu P.* Description and assessment of the new ONERA 2D icing suite IGLOO2D // AIAA 2017-3417. 2017.
4. *Beaugendre H., Morency F., Habashi W.G.* FENSAP-ICE's Three-Dimensional In-Flight Ice Accretion Module: ICE3D // Journal of Aircraft. V. 40, N 2. 2003.
5. *Jung S.K., Myong R.S., Cho T.H.* Development of Eulerian Droplets Impingement Model Using HLLC Riemann Solver and POD-Based Reduced Order Method // 41st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 2011.
6. *Keita S., Bourgault Y.* Eulerian models with particle pressure for air-particle flows // European Journal of Mechanics / B Fluids. 2019.
7. *Toro E.F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics // Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2009.

8. *Bourgault Y., Habashi W.G., Dompierre J., Boutanos Z., Di Bartolomeo W.* An Eulerian approach to supercooled droplets impingement calculations // American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1997.
9. *Keita S., Bourgault Y.* Eulerian droplet model: Delta-shock waves and solution of the Riemann problem // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019.
10. *Wright W.B.* User Manual for the NASA Glenn Ice Accretion Code LEWICE // NASA/CR-2002-211793. 2002.
11. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271–306.
12. *Босняков С.М., Акинфиев В.О., Власенко В.В., Глазков С.А., Горбушин А.Р., Кажан Е.В., Курсаков И.А., Лысенков А.В., Матяш С.В., Михайлов С.В.* Использование методов вычислительной аэродинамики в экспериментальных работах ЦАГИ // Матем. моделирование. 2011. Т. 23, № 11. С. 65–98.

References

1. *Wright W.B., Gent R.W., Guffond D.* DRA/NASA/ONERA Collaboration on Icing Research. Part II—Prediction of Airfoil Ice Accretion. NASA Technical Report, NASA-CR-202349. 1997.
2. *Ruff G., Berkowitz B.* Users Manual for the NASA Lewis Ice Accretion Prediction Code (LEWICE). NASA Technical Report, NASA-CR-185129. 1990.
3. *Trontin P., Kontogiannis A., Blanchard G., Villedieu P.* Description and assessment of the new ONERA 2D icing suite IGLOO2D. AIAA 2017-3417. 2017.
4. *Beaugendre H., Morency F., Habashi W.G.* FENSAP-ICE's Three-Dimensional In-Flight Ice Accretion Module: ICE3D. Journal of Aircraft. V. 40, N 2. 2003.
5. *Jung S.K., Myong R.S., Cho T.H.* Development of Eulerian Droplets Impingement Model Using HLLC Riemann Solver and POD-Based Reduced Order Method. 41st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 2011.
6. *Keita S., Bourgault Y.* Eulerian models with particle pressure for air-particle flows. European Journal of Mechanics / B Fluids. 2019.
7. *Toro E.F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2009.
8. *Bourgault Y., Habashi W.G., Dompierre J., Boutanos Z., Di Bartolomeo W.* An Eulerian approach to supercooled droplets impingement calculations. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1997.
9. *Keita S., Bourgault Y.* Eulerian droplet model: Delta-shock waves and solution of the Riemann problem. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019.
10. *Wright W.B.* User Manual for the NASA Glenn Ice Accretion Code LEWICE. NASA/CR-2002-211793. 2002.
11. *Godunov S.K.* A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. Mat. Sb. 1959. V. 47, I. 3. P. 271–306. (in Russian).
12. *Bosnyakov S.M., Akinfiev V.O., Vlasenko V.V., Glazkov S.A., Gorbushin A.R., Kagan E.V., Kursakov I.A., Lysenkov A.V., Matyash S.V., Mikhailov S.V.* An experience of using CFD methods in experimental works in TsAGI. Math. Models. 2011. V. 23, N 11. P. 65–98. (in Russian).