УДК 517.929

Р. Перез Ортиз

Московский государственый университет имени М. В. Ломоносова

Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра

Изучаются интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, представляющие собой абстрактное волновое уравнение, возмущенное вольтерровыми интегральными операторами, зависящими от параметра. К исследованию указанных уравнений приводят многочисленые задачи, возникающие в приложениях: в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью и в теории усреднения. Основная цель предлагаемой работы – проведение спектрального анализа оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений.

Ключевые слова: вольтерровые интегральные операторы, интегродифференциальные уравнения, спектральный анализ, уравнение теплопроводности Гуртина–Пипкина.

R. Perez Ortiz

Lomonosov Moscow State University

Spectral analysis of integro-differential equations with kernels depending on the parameter

We study integro-differential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space, which represents abstract wave equations perturbed by terms that include Volterra integral operators with kernel depending on the parameter. These equations can be regarded as an abstract form of the Gurtin–Pipkin equation, which describes the evolution of thermal phenomena, heat transfer in materials with memory or sound propagation in viscoelastic media. The main objective of the proposed work is to study the spectral analysis of operator functions, which are symbols of mentioned equations.

Key words: Volterra integral operators, integrodifferential equations, spectral analysis, Sobolev space, Gurtin–Pipkin heat equation.

1. Введение

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^{2\xi}u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2}$$

Здесь A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный, а параметр $\xi \in (0,1)$. Скалярная функция $K(t)$ допускает представление $K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathrm{e}^{-\gamma_j t}$, где $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$. Предполагается, что

$$a) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1, \qquad\qquad b) \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty.$$

Условие a) означает, что ядро $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и $\|K(t)\|_{L_1} < 1$. В случае b) ядро $K(t)$ будет принадлежать пространству Соболева: $W_1^1(\mathbb{R}_+)$, то есть будет обладать большей гладкостью.

Уравнение (1) является абстрактной формой уравнений, которые возникают во многих областях механики и физики, таких, как теория теплопроводности, в средах с памятью (уравнения Гуртина–Пипкина), теория вязкоупругости, теория усреднения. Модели распространения тепла в средах с памятью были изучены, в частности, в [9, 10]. Уравнения типа Гуртина–Пипкина возникают также в кинетической теории газов (подробнее см. [1], гл. 3), в динамике вязкоупругих твердых тел (см. [5], гл. 18) и в задачах управляемости термоупругих систем с памятью (см. [5], гл. 19).

Основная цель данной работы состоит в исследовании спектра оператор-функции, являющейся символом уравненя (1). Отметим, что в случае $\xi = 1$ спектральный анализ уравнения (1) подробно проводился в работах [1, 2, 11, 12]. На основе результатов, полученных в [1,2], в работе [13] установлено представление решений интегродифференциальных уравнений в виде суммы рядов по экспонентам, отвечающих точкам спектра оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Однако наличие параметра $\xi \in (0, 1)$ весьма существенно меняет структуру спектра оператор-функции. При этом появляется ряд новых эффектов по сравнению со случаем $\xi = 1$ (подробнее см. п. 3). Здесь уместно подчеркнуть, что уравнение (1) изучалось многими авторами. Ограничимся здесь указанием работ [6–8], в которых рассматривался случай $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$. Заметим, однако, что в известных нам работах при $\xi \in (0, 1)$ и, в частности, в работах [6–8] спектральный анализ символа уравнения (1) не проводился. Предлагаемая работа является естественным развитием результатов работ [1, 2, 11, 12].

2. Корректная разрешимость

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Превратим область определения $\mathrm{dom}(A^\beta)$ оператора A^β $(\beta > 0)$ в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β. Обозначим $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ – пространство Соболева вектор-функций, заданных на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в пространстве H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty \exp(-2\gamma t) \left(\|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma \geq 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [15, гл. 1]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A^0) = L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$.

Определение 1. Вектор-функцию u назовем сильным решением задачи (1) и (2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geq 0$ и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (2).

В работе [2] при $\xi = 1$ была установлена корректная разрешимость задачи (1) и (2). Аналогичным образом для $\xi = (0, 1)$ получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть для всех $\xi \in [0, 1]$ и при некотором $\gamma_0 \geq 0$ вектор-функция $A^{2-\xi} f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$, а также $f(0) = 0$, и условие (a) выполнено. Тогда*

1)*если выполнено условие (b) и $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$, $\xi \in [0, 1]$, то для любого $\gamma > \gamma_0$ задача $(1)-(2)$ однозначно разрешима в пространстве $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$, и для ее решения оценка*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)} \leq d \left(\|A^{2-\xi} f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 + \|A^2 \varphi_0\|_H + \|A \varphi_1\|_H \right) \tag{3}$$

справедлива с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0 и φ_1;

2) *если условие* (b) *не выполнено и* $\varphi_0 \in H_{2+\xi}$, $\varphi_1 \in H_{1+\xi}$, $\xi \in (0,1]$, *то для* $\gamma > \gamma_0$ *задача* $(1)-(2)$ *однозначно разрешима в пространстве* $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, *и для ее решения оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \le d\left(\|A^{2-\xi} f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^{2+\xi}\varphi_0\|_H + \|A^{1+\xi}\varphi_1\|_H\right) \tag{4}$$

справедлива с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1.

Доказательство сформулированной теоремы 1 приведено в [4].

Замечание 1. Случай $\xi = 1$ подробно изучался в [2], а также в гл. 3 монографии [1]. При $\xi = 1$ теорема 1 переходит в теорему 1 из работы [2].

3. Спектральный анализ

Рассмотрим оператор-функцию

$$L(\zeta) = \zeta^2 I + A^2 - \widehat{K}(\zeta)A^{2\xi}, \ \ 0 < \xi < 1, \tag{5}$$

являющуюся символом уравнения (1), где $\widehat{K}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta+\gamma_k}$ является преобразованием Лапласа функции $K(t)$, I – единичный оператор, действующий в пространстве H. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям a_j: $Ae_j = a_j e_j, j \in \mathbb{N}$. Собственные значения a_j упорядочены по возрастанию: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \cdots$, при этом $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Во всех следующих утверждениях предполагается, что $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\zeta)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$\ell_n(\zeta) := (L(\zeta)e_n, e_n) = \zeta^2 + a_n^2\left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\zeta+\gamma_k}\right) =: \zeta^2 + a_n^2 f_n(\zeta), \ \ 0 < \xi < 1.$$

Перейдем к вопросу о структуре спектра оператор-функции $L(\zeta)$. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\sup_k\{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty. \tag{6}$$

Условие (6) было введено в работе [14], а также использовалось в работах [1], [2], [11], [12]. Описательно говоря, условие (6) означает, что элементы последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ не могут приближаться друг к другу слишком быстро.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $b)$ *и* (6). *Тогда нули мероморфной функции* ℓ_n *представляют собой счетную серию вещественных корней* $\{\mu_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ *таких, что*

$$-\gamma_k < \mu_{n,k} < -\gamma_{k-1}, \ \text{и} \ \lim_{n\to\infty}\mu_{n,k} = -\gamma_k, \tag{7}$$

а также пару комплекно-сопряженных корней $\mu_n^{\pm}$, $\mu_n^{+} = \overline{\mu_n^{-}}$, *представимых в виде*

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\sum_{j=1}^{\infty}c_j + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{1-2\xi}}\right)\right), \qquad \xi \in [0, \tfrac{1}{2}), \tag{8}$$

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{\infty}c_j + O\left(\frac{1}{a_n}\right) \pm i\left(a_n + O(1)\right), \qquad \xi = \tfrac{1}{2}, \tag{9}$$

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\sum_{j=1}^{\infty}c_j + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi-1}}\right)\right), \qquad \xi \in (\tfrac{1}{2}, 1]. \tag{10}$$

При выполнении условий теоремы 2 спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\zeta)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\mu_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mu_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty,\infty}$ функций $\ell_n(\zeta)$, т.е.

$$\sigma(L) = \overline{\left(\cup_{n,k=1}^{\infty}\mu_{n,k}\right) \cup \left(\cup_n^{\infty}\mu_n^{\pm}\right)}.$$

Замечание 2. В соотношениях (8)–(10) подчиненные слагаемые, содержащие символы $O\left(\frac{1}{a_n^k}\right)$, выписаны отдельно для вещественной и мнимой частей $\mu_n^{\pm}(\xi)$.

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 2 и $\xi \in (0,1)$ невещественные собственные значения $\mu_n^{\pm}$ асимптотически стремятся к мнимой оси (см. рис. 1), поскольку $\mathrm{Re}\ \mu_n^{\pm}(\xi) \to -0$ при $a_n \to \infty$. В то время как в случае $\xi = 1$ $\mathrm{Re}\ \mu_n^{\pm}(\xi) \to -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ (подробнее см. [2], а также [1, гл. 3]). При этом структура вещественного спектра $\sigma_{\mathbb{R}}$ при $\xi \in (0,1)$ также отличается от случая $\xi = 1$, поскольку при $\xi = 1$ вещественные нули $\mu_{n,k}(\xi) \to x_k$, где x_k – вещественные нули функции $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta+\gamma_k} = 1$ (подробнее см. [1, 2]). Таким образом, при $\xi \in (0,1)$ невещественный спектр оператор-функции $L(\zeta)$ близок к спектру абстрактного волнового уравнения (при $K(t) \equiv 0$).

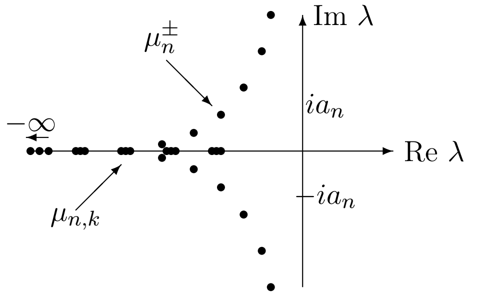

Рис. 1

Перейдем теперь к случаю, когда условие b) не выполнено.

Условие 1. Предположим, что последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеют следующее представление:

$$c_k = \frac{A}{k^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \gamma_k = Bk^{\beta} + O(k^{\beta-1}), k \in \mathbb{N}$$

при $k \to \infty$, где константы $A > 0, B > 0$, $0 < \alpha \le 1$, $\alpha + \beta > 1$ таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1$.

Замечание 4. Если $\gamma_{k+1} - \gamma_k \approx k^{\beta-p}$ удовлетворяется при $k \to \infty$ с $p \ge 1$, то условие (6) выполнено при $p < 2\beta$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие 1 и $\beta > \frac{1}{2}$. Тогда нули мероморфной функции ℓ_n представляют собой счетное множество вещественных нулей $\{\lambda_{n,k} | k \in \mathbb{N}\}$:*

$$\cdots - \gamma_k < \lambda_{n,k} < \cdots < -\gamma_1 < \lambda_{n,1} < 0, \text{ и } \lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = -\gamma_k, \tag{11}$$

также пару комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$, представимых в виде

$$\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{AD_1B^{r-1}}{\beta a_n^{r+1-2\xi}} \pm i\left(a_n + \frac{AD_2B^{r-1}}{\beta a_n^{r+1-2\xi}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\xi),2r+3-4\xi\}}}\right), \quad r \in (0, \tfrac{1}{2}), \tag{12}$$

$$\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{AD_1B^{r-1}}{\beta a_n^{r+1-2\xi}} \pm i\left(a_n + \frac{AD_2B^{r-1}}{\beta a_n^{r+1-2\xi}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), \quad r \in [\tfrac{1}{2}, 1), \tag{13}$$

$$\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{A}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{2(1-\xi)}} \pm i a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), \quad r = 1, \tag{14}$$

при $a_n \to \infty$, где $r := \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, и *константа $D = D_1 + iD_2$ определяется следующим образом*:

$$D := \frac{i}{2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^r(i+t)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\pi r)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}(1-r)\right). \tag{15}$$

При выполнении условий теоремы 3 спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\zeta)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\lambda_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty,\infty}$ функций $\ell_n(\zeta)$, т.е.

$$\sigma(L) = \overline{\left(\cup_{n,k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}\right) \cup \left(\cup_{n}^{\infty}\lambda_n^{\pm}\right)}.$$

Замечание 5. Случай $\xi = 1$ подробно изучался в [2], а также в гл. 3 монографии [1]. При $\xi = 1$ теорема 3 переходит в теорему 3 из работы [2].

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2. Доказательству теоремы 2 предпошлем доказательство следующей леммы.

Лемма 1. *Рассмотрим функцию*

$$\ell_{n,N}(\zeta) := \zeta^2 + a_n^2\left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\zeta+\gamma_k}\right) =: \zeta^2 + a_n^2 f_{n,N}(\zeta), \qquad k = 1, ..., N. \tag{16}$$

Тогда нули функции $\ell_{n,N}$ представляют собой множество действительных нулей $\{\mu_{n,k}\}_{k=1}^{N}$:

$$-\gamma_k < \mu_{n,k} < x_{n,k} < -\gamma_{k-1} < \mu_{n,k-1} < x_{n,k-1} < \cdots < 0, \tag{17}$$

$$\mu_{n,k} - x_{n,k} = O\left(\frac{1}{a_n^m}\right), \ \ k = 1, 2, \cdots N, \ \ a_n \to \infty, \tag{18}$$

где $m = 2(1-\xi)$, если $0 \le \xi < \frac{1}{2}$, $m = 1$, если $\xi = \frac{1}{2}$, $m = 2\xi$, если $\frac{1}{2} < \xi \le 1$ и $x_{n,k}$ – действительные нули функции $f_{n,N}(\zeta)$ вместе с парами комплексно-сопряженных нулей $\mu_n^{\pm}$, $\mu_n^{+} = \overline{\mu_n^{-}}$, асимптотически представимых в виде

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{j=1}^{N}c_j}{a_n^{2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{1-2\xi}}\right)\right), \ 0 \le \xi < \frac{1}{2}, \tag{19}$$

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{j=1}^{N}c_j}{a_n} + O\left(\frac{1}{a_n}\right) \pm i\left(a_n + O(1)\right), \qquad \xi = \frac{1}{2}, \tag{20}$$

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{j=1}^{N}c_j}{a_n^{2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi-1}}\right)\right), \qquad \frac{1}{2} < \xi \le 1. \tag{21}$$

Асимптотические формулы (19) – (21) были получены с помощью основной теоремы алгебры и теоремы Виета. Действительно, функция $\ell_{n,N}$ имеет ровно $N+2$ нулей, из которых N нулей (легко видеть графически) являются действительными и удовлетворяют неравенствам (17). По теореме Виета знаем, что

$$\sum_{k=1}^{N}x_{n,k} = \left(\frac{\sum_{j=1}^{N}c_j}{a_n^{2(1-\xi)}}\right) - \sum_{j=1}^{N}\gamma_j, \ \ \prod_{k=1}^{N}x_{n,k} = (-1)^N\prod_{j=1}^{N}\gamma_j\left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{N+2}\mu_{n,k} = -\sum_{j=1}^{N}\gamma_j, \qquad \prod_{k=1}^{N+2}\mu_{n,k} = (-1)^{N+2}a_n^2\prod_{j=1}^{N}\gamma_j\left(1 - \frac{S_N}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), \tag{23}$$

где $x_{n,k}$ и $\mu_{n,k}$ являются нулями $f_{n,N}$ и $\ell_{n,N}$ соотвестственно и $S_N := \sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{\gamma_j}$. Из (18), (22) и (23) для $m = 2(1-\xi), 1, 2\xi$ получаем

$$\sum_{k=1}^{N+2}\mu_{n,k} = \sum_{k=1}^{N}\left(x_{n,k} + O\left(\frac{1}{a_n^m}\right)\right) + 2\mathrm{Re}\mu_n^{\pm}, \qquad \prod_{k=1}^{N+2}\mu_{n,k} = \prod_{k=1}^{N}\left(x_{n,k} + O\left(\frac{1}{a_n^m}\right)\right)\mu_n^{+}\mu_n^{-}.$$

Здесь мы полагаем, что $\mu_{n,N+1} = \mu_n^+$ и $\mu_{n,N+2} = \mu_n^-$. Следовательно,

$$\mathrm{Re}\mu_n^\pm = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{j=1}^N c_j}{a_n^{2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^m}\right),\ m = 2(1-\xi), 1, 2\xi, \quad \mathrm{Im}\mu_n^\pm = a_n + O\left(\frac{1}{a_n^k}\right),\ k = 1-2\xi, 0, 2\xi - 1.$$

Таким образом, справедливы представления (19) – (21).

Асимптотические формулы (8) – (10) можно получить из (19) – (21) при $N \to \infty$. Покажем теперь, что в круге $B_\varepsilon(\mu_n^+) = \{\zeta : |\zeta - \mu_n^+| < \varepsilon\}$ функция $\ell_n(\zeta)$ имеет только один нуль для достаточно больших a_n. Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^\infty c_k$ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$, найдется N, для которого

$$\sum_{k=N+1}^\infty c_k < \frac{\varepsilon}{10}. \tag{24}$$

Рассмотрим окружность $D_\varepsilon(\mu_n^+) = \{\zeta : \zeta = \mu_n^+ + \varepsilon e^{i\varphi}, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ радиуса ε и с центром в точке μ_n^+ (для корня μ_n^- рассуждения совершенно аналогичны). Представим функцию $\ell_n(\zeta)$ в виде

$$\ell_{n,N}(\zeta) := \zeta^2 + a_n^2\left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\zeta + \gamma_k}\right), \quad m_{n,\infty}(\zeta) := -a_n^{2\xi}\sum_{k=N+1}^\infty \frac{c_k}{\zeta+\gamma_k}.$$

Выберем столь малое $\varepsilon > 0$ так, чтобы в круге $B_\varepsilon(\mu_n^+)$ не было других нулей функции $\ell_{n,N}(\zeta)$. Оценим функцию $\ell_{n,N}(\zeta)$ на окружности $D_\varepsilon(\mu_n^+)$. С этой целью заметим, что для $\zeta \in D_\varepsilon(\mu_n^+)$

$$|\zeta - \mu_{n,k}| \ge \left(\left(-\frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^N c_k}{a_n^{2(1-\xi)}} - \mu_{n,k} + \varepsilon\cos(\varphi)\right)^2 + (a_n + \varepsilon\sin(\varphi))^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge a_n - \varepsilon.$$

Для других случаев рассуждения аналогичны. Заметим, что при $\zeta \in D_\varepsilon(\mu_n^+)$ верны следующие: $|\zeta - \mu_n^+| = \varepsilon$, $|\zeta - \mu_n^-| > 2a_n - \varepsilon$. На основании указанных неравенств получаем следующую оценку снизу:

$$\left|\prod_{k=1}^N (\zeta - \mu_{n,k})(\zeta - \mu_n^+)(\zeta - \mu_n^-)\right|_{\zeta \in D_\varepsilon(\mu_n^+)} \ge (a_n - \varepsilon)^{N+1}\varepsilon. \tag{25}$$

Из неравенств

$$|\zeta + \gamma_j|_{\zeta \in D_\varepsilon(\mu_n^+)} \le \left|-\frac{\sum_{k=1}^N c_k}{2a_n^{2(1-\xi)}} + \gamma_j + \varepsilon\cos(\varphi)\right| + |a_n + \varepsilon\sin(\varphi)| \le M_1 + 2\varepsilon + a_n,$$

где $M_1 = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\sum_{k=1}^\infty c_k\right) + \gamma_j$, приходим к оценке

$$\left|\prod_{k=1}^N (\zeta - \gamma_k)\right|_{\zeta \in D_\varepsilon(\mu_n^+)} \le (a_n + 2\varepsilon + M_1)^N. \tag{26}$$

Теперь из (25) и (26) получаем

$$|\ell_{n,N}(\zeta)| = \frac{|\prod_{k=1}^N (\zeta - \mu_{n,k})(\zeta - \mu_n^+)(\zeta - \mu_n^-)|}{|\prod_{k=1}^N (\zeta - \gamma_k)|} \ge \varepsilon a_n\left(1 - O\left(\frac{1}{a_n}\right)\right), \qquad \zeta \in D_\varepsilon(\mu_n^+).$$

Таким образом, при достаточно большом a_n будет справедливо неравенство

$$|\ell_{n,N}(\zeta)| \geq \frac{\varepsilon a_n}{2}, \qquad \zeta \in D_\varepsilon(\mu_n^+). \tag{27}$$

Оценим теперь модуль функции $m_{n,\infty}(\zeta)$ сверху при достаточно больших a_n:

$$|m_{n,\infty}(\zeta)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_n^{2\xi} c_k}{|\zeta+\gamma_k|} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_n^{2\xi} c_k}{a_n - \varepsilon} \leq \frac{a_n^{2\xi}}{(a_n-\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{10} < a_n \frac{\varepsilon}{5}, \qquad \zeta \in D_\varepsilon(\mu_n^+). \tag{28}$$

На основании неравенств (27) и (28) имеем

$$|\ell_{n,N}(\zeta)| \geq \frac{\varepsilon a_n}{2} > a_n \frac{\varepsilon}{5} > |m_{n,\infty}(\zeta)|, \tag{29}$$

и согласно теореме Руше получаем, что в круге $B_\varepsilon(\mu_n^+)$ функция $\ell_n(\zeta)$ имеет один простой нуль μ_n^+ (или μ_n^- соответственно) при достаточно больших a_n.

Покажем теперь, что множество нулей функции

$$\frac{\ell_n(\zeta)}{a_n^2} = \frac{\zeta^2}{a_n^2} + f_n(\zeta) := g_n(\zeta) + f_n(\zeta) \tag{30}$$

совпадает с объединением счетной серии действительных нулей $\{\mu_{n,k}|k \in \mathbb{N}\}$ и парами комплексно-сопряженных нулей $\mu_n^\pm$, $\mu_n^+ = \overline{\mu_n^-}$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим прямоугольный контур $\Gamma = \{C^+ \cup C^- \cup C \cup C^*\}$, где

$$C^\pm = \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\zeta = \pm X, |\mathrm{Im}\zeta| \leq Y, X, Y > 0\}, \quad C^* = \{\overline{\zeta} \in \mathbb{C} : \zeta \in C\},$$
$$C = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\zeta| \leq X, \mathrm{Im}\zeta = \pm Y, X, Y > 0\}.$$

В [3] было приведено полное доказательство того, что на прямоугольном контуре Γ справедливо следующее неравенство:

$$|f_n(\zeta)| < |g_n(\zeta)|, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{31}$$

Таким образом, согласно теореме Руше и принципу аргумента получаем

$$N(g_n(\zeta)) - P(g_n(\zeta)) = N(f_n(\zeta) + g_n(\zeta)) - P(f_n(\zeta) + g_n(\zeta)),$$

где N и P – соответственно число нулей и полюсов внутри контура Γ, причем каждый полюс и нуль считаются с учетом их порядка и кратности соответственно. По определению функции $g_n(\zeta)$, $N(g_n(\zeta)) - P(g_n(\zeta)) = 2$. Внутри контура Γ функция $f_n(\zeta) + g_n(\zeta)$ имеет N полюсов: $-\gamma_N, -\gamma_{N-1}, ..., -\gamma_1$. Следовательно, $N(f_n(\zeta) + g_n(\zeta)) = N + 2$. Легко видеть (графически) (см. также [14]), что функция $f_n(\zeta)+g_n(\zeta)$ имеет $N+1$ или N действительных нулей внутри контура Γ, которые удовлетворяют неравенствам (7) в зависимости от того, $\mu_{N,n} < X_N$ или $\mu_{N,n} \geq X_N$. Но если $\mu_{N,n} < X_N$, то $f_n(\zeta) + g_n(\zeta)$ имеет один комплексный нуль внутри контура Γ, что невозможно, так как $\overline{(f_n + g_n)}(\zeta) = (f_n + g_n)(\overline{\zeta})$. Следовательно, внутри контура Γ существует ровно два комплексных нуля $\mu_n^\pm$, где $\mu_n^+ = \overline{\mu_n^-}$.

Доказательство теоремы 3. Как и в теореме 2, здесь мы рассмотрим ту же самую функцию (30) и покажем, что множество всех её нулей совпадает с объединением счетной серии действительных нулей $\{\lambda_{n,k}|k \in \mathbb{N}\}$ и с парами комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^\pm$, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$. Более того, покажем, что последовательности $\{\lambda_{n,k}|k \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяют неравенствам (11). Во второй части доказательства мы покажем, что для комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^\pm$ справедливы асимптотические представления (12)–(14). Аналогично [2] можно доказать, что справедливо неравенство (31) для всех $\zeta \in \Gamma = \{C^+ \cup C^- \cup C \cup C^*\}$ (подробнее см. [3]). Остальные утверждения следуют из теоремы 2.

Основная идея доказательства теоремы 3 заключается в замене функции $\hat{K}(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\zeta+\gamma_k}$, апроксимирующей функцией, выраженной интегралом

$$h(\zeta)=\int_1^{\infty}\frac{A}{t^{\alpha}(\zeta+Bt^{\beta})}dt,$$

с последующими оценками функции $h(\zeta)$ в области $\{\zeta\in\mathbb{C}:|\arg\zeta|<\pi-\delta,\delta>0\}$. Апроксимация функции $\hat{K}(\zeta)$ функцией $h(\zeta)$ была установлена в работе [2, лемма 3].

Покажем, что комплескные нули функции $\ell_n(\zeta)$ асимптотически представимы в виде $\lambda_n^{\pm}=\pm ia_n+\tau_n a_n$, $n\in\mathbb{N}$ при $n\to\infty$, где τ_n – некоторая числовая последовательность. Для этого достаточно показать, что асимптотическое представление λ_n^{+} удовлетворяет уравнению $\frac{\hat{K}(\lambda_n^+)}{a_n^{2(1-\xi)}}=\frac{(\lambda_n^+)^2}{a_n^2}+1$, которое равносильно уравнению $\hat{K}(\lambda_n^+)=a_n^{2(1-\xi)}\tau_n(\tau_n+2i)$. Отсюда получаем, что

$$\tau_n=\frac{\hat{K}(\lambda_n^+)}{a_n^{2(1-\xi)}(\tau_n+2i)}. \tag{32}$$

Обозначим $h_n(\tau):=\frac{\hat{K}(ia_n+\tau a_n)}{a_n^{2(1-\xi)}(\tau+2i)}$, $\zeta_n=ia_n+\tau a_n$. Тогда уравнение (32) можно переписать в виде $\tau_n=h_n(\tau_n)$, откуда получаем, что число τ_n является неподвижной точкой отображения $\tau\to h_n(\tau)$ при $n\to\infty$. Следовательно, достаточно показать, что при $n\to\infty$ отоброжение $\tau\to h_n(\tau)$ является сжимающим. Таким образом, искомое решение τ_n будет найдено как предел последовательности τ_n^k при $k\to\infty$, где $\tau_n^k=h(\tau_n^{k-1})$, $\tau_n^0=0,\tau_n^1\neq\tau_n$.

Докажем, что отображение $\tau\to h_n(\tau)$ является сжимающим. Это следует из леммы 2, которая была доказана в [2], и из оценки

$$|h_n'(\tau)|=\left|\frac{\hat{K}(\lambda_n^+)-\hat{K}'(\lambda_n^+)(a_n\tau+2ia_n)}{a_n^{2(1-\xi)}(\tau+2i)^2}\right|\leq\frac{|\hat{K}'(\lambda_n^+)(2\zeta_n)|+|\hat{K}(\lambda_n^+)|}{a_n^{2(1-\xi)}},\quad |\tau|<\frac{1}{2}.$$

Лемма 2. *На множестве* $\{\zeta\in\mathbb{C}:|\arg\zeta|<\pi-\delta,\delta>0\}$ *справедливы следующие соотношения:* $|\zeta\hat{K}'(\zeta)|\to 0$ и $|\hat{K}(\zeta)|\to 0$ при $|\zeta|\to\infty$.

Замечание 6. $h_n(\tau_n)=-\frac{i}{2}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\xi)}}[1+O(\tau_n)]$, $n\to\infty$ при $n\to\infty$. Действительно, используя разложение в ряд Тейлора в $\tau_n=0$, непосредственно получаем

$$h_n(\tau_n)=-\frac{i}{2}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\xi)}}[1+O(\tau_n)],\ n\to\infty.$$

Таким образом, для τ_n справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\tau_n=-\frac{i}{2}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\xi)}}[1+O(\tau_n)],\ n\to\infty. \tag{33}$$

Следующая лемма приведена в [2] и используется для того, чтобы получить формулы (12)–(14).

Лемма 3. *Если* $|\arg\zeta|<\pi-\delta,\delta>0$, *то*

$$\hat{K}(\zeta)=\frac{AB^{r-1}}{\beta|\zeta|^r}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^r(\exp(i\varphi)+t)}+O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right),\qquad \text{если } 0<r<1, \tag{34}$$

$$\hat{K}(\zeta)=\frac{A}{\beta}\frac{\ln\left|\frac{\zeta}{B}+1\right|}{\zeta}+O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right),\qquad \text{если } r=1. \tag{35}$$

Используя лемму 3 и следующий результат:

$$D=\frac{i}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^r(i+t))}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\pi r)}\exp(i\frac{\pi}{2}(1-r)),\quad \arg(ia_n)=\tfrac{\pi}{2},$$

получаем следующую асимптотическую формулу для случая $0 < r < 1$:

$$-\frac{i}{2}\hat{K}(ia_n) = -\frac{i}{2}\frac{AB^{r-1}}{\beta|a_n|^r}\int_0^\infty \frac{dt}{t^r(i+t)} + O\left(\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{ADB^{1-r}}{\beta a_n^r} + O\left(\frac{1}{a_n}\right),$$

Здесь $D := D_1 + iD_2$. Таким образом:

$$\tau_n = -\frac{i}{2}\frac{\hat{K}(ia_n)}{a_n^{2(1-\xi)}}[1+O(\tau_n)] = \left(-\frac{ADB^{r-1}}{\beta a_n^{r+2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\xi)}}\right)\right)[1+O(\tau_n)].$$

Пусть $R_1 + R_2 := \left(-\frac{AD_1}{\beta B^{1-r}}\right) + \left(-i\frac{AD_2}{\beta B^{1-r}}\right)$. Тогда

$$\tau_n = \frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\xi)}}\right) + \left(\frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\xi)}}\right)\right)O\left(R\right) =$$
$$= \frac{R_1}{a_n^{r+2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\xi)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{2r+4(1-\xi)}}\right) + \frac{R_2}{a_n^{r+2(1-\xi)}},$$

где $R = \frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\xi)}}\right)$. В случае $0 < r < 1$, справедлива следующая формула:

$$\tau_n = \frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{1+2(1-\xi),2r+4(1-\xi)\}}}\right), \qquad 0 < r < \tfrac{1}{2}, \tag{36}$$

$$\tau_n = \frac{R_1+R_2}{a_n^{r+2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\xi)}}\right), \qquad \tfrac{1}{2} \le r < 1. \tag{37}$$

Вновь используя лемму 3, в случае $r = 1$ имеем

$$-\frac{i}{2}\hat{K}(ia_n) = -\frac{i}{2}\frac{A}{\beta}\frac{\ln\left|\frac{ia}{B}+1\right|}{ia_n} + O\left(\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{2}\frac{A}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n} + O\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

Таким образом, получаем асимптотическую формулу:

$$\tau_n = -\frac{1}{2}\frac{A}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{1+2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1+2(1-\xi)}}\right). \tag{38}$$

Поскольку $\lambda_n^{\pm} = \pm ia_n + \tau_n a_n$, из асимптотических формул (36) – (38) вытекает, что

$$\mathrm{Re}\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{B^{r-1}AD_1}{\beta a_n^{r+2(\frac{1}{2}-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\xi),2r+4(\frac{3}{4}-\xi)\}}}\right), \qquad 0 < r < \tfrac{1}{2}, \tag{39}$$

$$\mathrm{Re}\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{AD_1}{\beta B^{1-r}a_n^{r+2(\frac{1}{2}-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), \qquad \tfrac{1}{2} \le r < 1, \tag{40}$$

$$\mathrm{Re}\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{A}{\beta}\frac{\ln a_n}{a_n^{2(1-\xi)}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), \qquad r = 1. \tag{41}$$

5. Заключение и комментарии

При выполнении условий теоремы 3 возможны следующие случаи.

1) При $r = 1$ и $\xi \in (0,1)$, и при $r \in (0,1)$ и $\xi \in (0, \frac{r+1}{2}) \cup \{\frac{1}{2}\}$, имеем $\mathrm{Re}\ \lambda_n^{\pm}(\xi) \to -0$, то есть

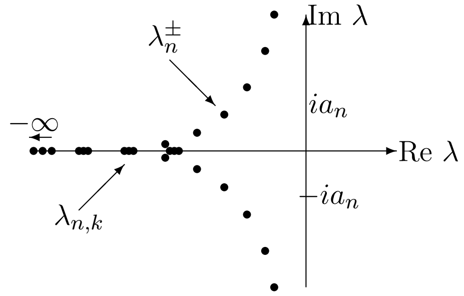

Рис. 2

2) При $r \in (0,1)$ и $\xi \in (\frac{r+1}{2}, 1)$, $\mathrm{Re}\ \lambda_n^{\pm}(\xi) \to -\infty$, когда $a_n \to \infty$, так как

$$\mathrm{Re}\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{AD_1}{\beta B^{1-r}} a_n^{2(\xi - \frac{r+1}{2})} + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\xi), 2r+3-4\xi\}}}\right).$$

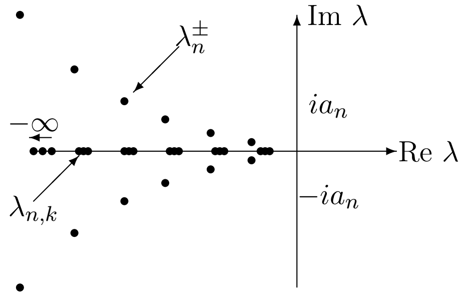

Рис. 3

3) При $r \in (0,1)$ и $\xi = \frac{r+1}{2}$ получаем следующую асимптотику:

$$\mathrm{Re}\lambda_n^{\pm} = -\frac{AD_1}{\beta B^{1-r}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1-r}}\right),$$

которая зависит только от r. Тогда $\mathrm{Re}\ \lambda_n^{\pm}(\xi) \to -\frac{AD_1}{\beta B^{1-r}} = \vartheta$ при $a_n \to \infty$. Если $A \geq B$, то рис. 4, а если $A < B$, то рис. 5.

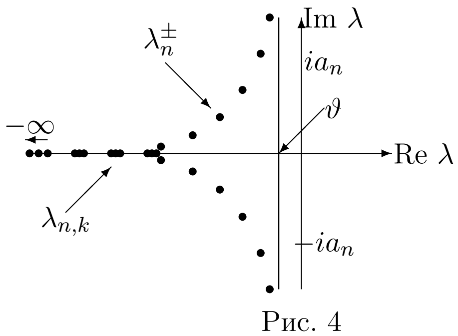

Рис. 4

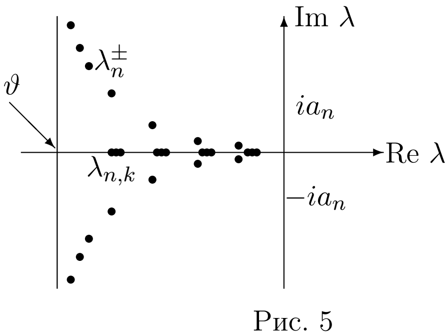

Рис. 5

Таким образом, случай $\xi \in (0,1)$ существенно отличается от случая $\xi = 1$, поскольку при $\xi = 1$ $\mathrm{Re}\ \lambda_n^{\pm}(\xi) \to -\infty$ (подробнее см. [2]). Тем самым наличие параметра $\xi \in (0,1)$ значительно усложняет структуру невещественного спектра оператор-функции $L(\zeta)$. Так, в случаях 1) и 3) структура невещественного спектра близка к спектру волнового уравнения, а в случае 2) к спектру абстрактного параболического уравнения.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. В. Власову за постоянное внимание к работе и конструктивные замечания, а также участникам семинаров под руководством А. Л. Скубачесвкого и профессора А. А. Шкаликова за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта Мексиканского центра экономических и социальных исследований (CEMEES в испанской аббревиатуре).

Литература

1. *Власов В.В., Медведев Д.А., Раутиан Н.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ / под редакцией В.А. Садовничего. Современные проблемы математики и механики, 2011. Т. VIII, Математика. Выпуск 1. М.: Изд-во МГУ, С. 308.

2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральные анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28, С. 75–113.

3. *Perez Ortiz R., Vlasov V.V.* Spectra of the Gurtin-Pipkin type equations with the kernel, depending on the parameter. http://arxiv.org/abs/1403.4382

4. *Perez Ortiz R., Vlasov V.V.* Correct solvability of hyperbolic Volterra equations with kernels depending on the parameter. http://arxiv.org/abs/1412.1067

5. *Giovambattista Amendola, Fabrizio M. and Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory, Theory and Applications, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2012.

6. *Muñoz Rivera J.E., Grazia Naso M., Vegni F.M.* Asymptotic behavior of the energy for a class of a weakly dissipative second-order systems with memory // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V. 286. P. 692–704.

7. *Muñoz Rivera J.E., Grazia Naso M., Vuk E.* Asymptotic behavior of the energy for electromagnetic systems with memory // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2004. V. 27. P. 819–841.

8. *Muñoz Rivera J.E., Grazia Naso M.* On the Decay of the Energy for Systems with Memory and Indefinite Dissipation // Asymptotic Analysis. 2006. V. 49. P. 189–204.

9. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach // Applied Mathematics and Optimization. 2005. V. 52. P. 143–165.

10. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* A General theory of heat conduction with finite wave speeds // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968. V. 31, N 2. P. 113–116.

11. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Доклады РАН. 2010. Т. 434, N 1. С. 12–15.

12. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 39. С. 36–65.

13. *Раутиан Н. А.* О структуре и свойствах решений интегродифференцияльных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике. Математические заметки. 2011. Т. 90, N 3. 470–473.

14. *Ivanov S. A., Sheronova T. L.* Spectrum of the heat equation with memory. http//arxiv.org/abs/0912.1818v1

15. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

References

1. *Vlasov V.V., Medvedev D.A., Rautian N.A.* Functional Differential Equations in Sobolev Space and its Spectral Analysis. Edited by V. A. Sadovnichy. Modern Problems of Mathematics and Mechanics. 2011. V. VIII. Mathematics. N. 1. Publisher Lomonosov Moscow State University. P. 308. (in Russian).
2. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Well-defined solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations. Proceedings of the Seminar I. G. Petrovskii. 2011. N 28, Part I. P. 75–113. (in Russian).
3. *Perez Ortiz R., Vlasov V.V.* Spectra of the Gurtin-Pipkin type equations with the kernel, depending on the parameter. http://arxiv.org/abs/1403.4382.
4. *Perez Ortiz R., Vlasov V.V.* Correct solvability of hyperbolic Volterra equations with kernels depending on the parameter. http://arxiv.org/abs/1412.1067.
5. *Giovambattista Amendola, Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory, Theory and Applications, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2012.
6. *Muñoz Rivera J.E., Grazia Naso M., Vegni F.M.* Asymptotic behavior of the energy for a class of a weakly dissipative second-order systems with memory. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V. 286. P. 692–704.
7. *Muñoz Rivera J.E., Grazia Naso M., Vuk E.* Asymptotic behavior of the energy for electromagnetic systems with memory. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2004. V. 27. P. 819–841.
8. *Muñoz Rivera J.E., Grazia Naso M.* On the Decay of the Energy for Systems with Memory and Indefinite Dissipation. Asymptotic Analysis. 2006. V. 49. P. 189–204.
9. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach. Applied Mathematics and Optimization. 2005. V. 52. P.143–165.
10. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* A General theory of heat conduction with finite wave speeds. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968. V. 31, N 2. P. 113–116.
11. *Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A.C.* Solvability and spectral analysis of integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics. Doklady Rossiyskoy Akademii Nauk. 2010. V. 434. N 1. P. 12–15. (in Russian).
12. *Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A.C.* Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2011. V. 39. P. 36–65. (in Russian).
13. *Rautian N.A.* On the Structure and Properties of Solutions of Integro-Differential Equations Arising in Thermal Physics and Acoustics. Mathematical Notes. 2011. V. 90, N 3. P. 470–473. (in Russian).
14. *Ivanov S.A., Sheronova T.L.* Spectrum of the heat equation with memory. http//arxiv.org/abs/0912.1818v1
15. *Lions J.L., Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. M.: Mir, 1971. (in Russian).

Поступила в редакцию 01.06.2015.