

УДК 533.6.07:62-52

К. Д. Бухаров

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского

Оптимизация по быстродействию системы управления скоростью воздушного потока в дозвуковой аэродинамической трубе

В работе предложен метод оптимизации по быстродействию системы управления скоростью воздушного потока в дозвуковой аэродинамической трубе, основанный на поиске решения задачи Лагранжа в понтрягиновской постановке для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами, описывающей аэродинамическую трубу как объект управления по скорости воздушного потока.

Ключевые слова: математическая модель, регулятор скорости воздушного потока, задача Лагранжа, аэродинамическая труба.

K. D. Bukharov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
FGUP «Central Aerohydrodynamic Institute»

Optimization technique of performance characteristics of the air flow speed control system for a subsonic wind tunnel

The paper focuses on the optimization technique of performance characteristics of the air flow speed control system for subsonic wind tunnel based on the Lagrange problem solution for the third order system of differential equations with constant coefficients.

Key words: mathematical model, airspeed control system, Lagrange problem, wind tunnel.

1. Введение

Создание новых образцов авиационной и ракетно-космической техники военного и двойного назначения требует проведения обширного комплекса экспериментальных исследований, включающих, прежде всего, испытания моделей летательных аппаратов в аэродинамических трубах (АДТ). Из мировой практики известно, что более половины общих затрат на разработку новых образцов ЛА приходится на такие исследования, что определяет важность задачи повышения их технико-экономической эффективности.

Одним из путей повышения экономичности испытаний в аэродинамических трубах является сокращение времени проведения эксперимента на основе оптимизации по быстродействию систем управления, в частности системы управления скоростью воздушного потока в рабочей части АДТ. Дозвуковые АДТ, такие как Т-101, Т-102, Т-103, Т-104 ЦАГИ, широко используются для проведения промышленного аэродинамического эксперимента.

В работе рассматривается метод оптимизации системы управления скоростью воздушного потока на примере АДТ Т-102 ЦАГИ, одной из востребованных дозвуковых АДТ. Синтез алгоритма управления скоростью воздушного потока, близкого к оптимальному по быстродействию, основывается на решении задачи Лагранжа для математической модели АДТ Т-102 как объекта управления по скорости воздушного потока и математической модели модернизированного главного привода (ГП) АДТ Т-102.

2. Задача Лагранжа для управления скоростью воздушного потока в дозвуковой АДТ Т-102

Поскольку аэродинамическая труба является существенно нелинейным объектом управления по скорости воздушного потока, то задача управления может быть сформулирована для случая изменения скорости воздушного потока относительно предыдущего значения на небольшую величину (порядка 10 м/с), что, как правило, соответствует программам испытаний моделей ЛА по скорости воздушного потока. В этом случае математическую модель АДТ и привода можно рассматривать как линейную с постоянными коэффициентами, параметрически зависящими от стационарного состояния объекта управления [1, 2].

В соответствии со структурной схемой системы управления ГП АДТ Т-102 математическую модель привода АДТ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= K_u u(t), \\ T_n \dot{\omega}(t) + \omega(t) &= \nu(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(t)$ – цифровое управляющее воздействие, ограниченное по амплитуде $|u(t)| \leq 1$;

$\nu(t)$ – сигнал цифрового устройства задатчика оборотов вентиляторов;

K_u – коэффициент интегрирующего звена цифрового устройства задатчика оборотов вентиляторов;

$\omega(t)$ – угловая скорость вращения вентиляторов АДТ;

T_n – постоянная времени привода.

Как показывает практика, аэродинамический контур трубы, как объект управления по скорости воздушного потока, в окрестности некоторой скорости V_0 может быть с удовлетворительной для задач управления точностью описан дифференциальным уравнением следующего вида [3]:

$$T_T(V_0) \dot{V}(t) + V(t) = K_T(V_0) \omega(t), \quad (2)$$

где T_T – постоянная времени АДТ;

K_T – коэффициент передачи АДТ.

Таким образом, динамика АДТ Т-102 как объекта управления может описываться системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$\begin{cases} T_T \dot{V}(t) + V(t) = K_T \omega(t), \\ T_n \dot{\omega}(t) + \omega(t) = \nu(t), \\ \dot{v}(t) = K_u u(t). \end{cases} \quad (3)$$

Задача Лагранжа с одним подвижным концом для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3) может быть поставлена следующим образом:

$$\Phi = \int_0^T dt \rightarrow \inf, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{T_1} (K_1 x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{T_2} (x_3 - x_2), \\ \dot{x}_3 = K_2 u, \end{cases} \quad (5)$$

$$x_1(0) = 0; x_2(0) = 0; x_3(0) = 0;$$

$$x_1(T) = \Delta V; \quad \dot{x}_1(T) = 0 \left(\Rightarrow x_2(T) = \frac{\Delta V}{K_1} \right); \quad \dot{x}_2(T) = 0 \left(\Rightarrow x_3(T) = \frac{\Delta V}{K_1} \right). \quad (6)$$

Найти экстремаль \hat{x} , доставляющую минимум функционалу (4) при дифференциальных связях (5) с начальными условиями и условиями на свободном конце (6), образуемую управлением $|u| < 1$. Функция Лагранжа задачи (4) – (6) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \int_0^T L(\lambda, t) dt + l(\lambda, x(0), x(T)) = \\ &= \int_0^T \left[\lambda_0 + p_1(t) \left(\dot{x}_1 - \frac{1}{T_1}(K_1 x_2 - x_1) \right) + p_2(t) \left(\dot{x}_2 - \frac{1}{T_2}(x_3 - x_2) \right) + \right. \\ &+ p_3(t) \left(\dot{x}_3 - K_2 u \right) \left. \right] dt + \lambda_1(x_1(0)) + \lambda_2(x_2(0)) + \lambda_3(x_3(0)) + \\ &+ \lambda_4 \left(x_1(T) - \Delta V \right) + \lambda_5 \left(x_2(T) - \frac{\Delta V}{K_1} \right) + \lambda_6 \left(x_3(T) - \frac{\Delta V}{K_1} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Условия стационарности по x (уравнения Эйлера) выглядят следующим образом:

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial(\dot{x}_i)} \right) + \frac{\partial L}{\partial(x_i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$i = 1: \quad -\dot{p}_1 + \frac{1}{T_1} p_1 = 0; \quad p_1(t) = c_1 \exp \left(\frac{t}{T_1} \right), \quad (9)$$

$$i = 2: \quad -\dot{p}_2 - \frac{K_1}{T_1} p_1 + \frac{1}{T_2} p_2 = 0; \quad p_2(t) = c_2 \exp \left(\frac{t}{T_2} \right) + \frac{c_1 K_1 T_2}{T_1 - T_2} \exp \left(\frac{t}{T_1} \right), \quad (10)$$

$$i = 3: \quad -\dot{p}_3 - \frac{1}{T_2} p_2 = 0; \quad p_3(t) = -c_2 \exp \left(\frac{t}{T_2} \right) - \frac{c_1 K_1 T_1}{T_1 - T_2} \exp \left(\frac{t}{T_1} \right) + c_3. \quad (11)$$

Условия трансверсальности задачи выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{x}_i)}(0) = \frac{\partial l}{\partial(x_i(0))}, \quad \frac{\partial L}{\partial(\dot{x}_i)}(T) = -\frac{\partial l}{\partial(x_i(T))}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} i = 1: \quad p_1(0) &= \lambda_1; \quad p_1(T) = -\lambda_4, \\ i = 2: \quad p_2(0) &= \lambda_2; \quad p_2(T) = -\lambda_5, \\ i = 3: \quad p_3(0) &= \lambda_3; \quad p_3(T) = -\lambda_6. \end{aligned} \quad (13)$$

Условие стационарности по подвижному концу $t = T$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial(T)} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial(T)}(T) = 0, \quad (14)$$

$$\lambda_0 + \lambda_4 \dot{x}_1(T) + \lambda_5 \dot{x}_2(T) + \lambda_6 \dot{x}_3(T) = 0. \quad (15)$$

С учетом условий (6) условие стационарности по подвижному концу упрощается следующим образом:

$$\lambda_0 + \lambda_6 \dot{x}_3(T) = 0. \quad (16)$$

Условие минимума по управлению u задачи, в силу линейности интегранта задачи по управлению, выглядит следующим образом:

$$\min_{|u| \leq 1} (-p_3(t)u(t)) = -p_3(t)\hat{u}(t). \quad (17)$$

Следовательно, экстремальное управление $\hat{u}(t) = \text{sign}(p_3(t))$, тогда произведение функций $p_3(t)$ и $\hat{u}(t)$ дает модуль функции $p_3(t)$:

$$p_3(t)\hat{u}(t) = |p_3(t)|. \quad (18)$$

Подставляя в (16) условие трансверсальности (13) для $p_3(T)$, учитывая уравнение дифференциальной связи (5) и следствие из условия минимума по управлению (18), получим следующее выражение:

$$\lambda_0 = K_2|p_3(T)|. \quad (19)$$

Как известно, множитель Лагранжа λ_0 можно выбирать произвольно. В случае $\lambda_0 = 0$ возможны два варианта. Если $|p_3(t)| = 0$ на всем отрезке времени $[0, T]$, тогда все множители Лагранжа обращаются в ноль, и решений нет. Если $p_3(T) = 0$, но при этом $p_3(t)$ не обращается в ноль на полуинтервале времени $[0, T)$, тогда знак управления не изменяется, что означает $\hat{u}(t) \equiv \pm 1$ в зависимости от знака $x_1(T) = \Delta V$. В этом случае достаточно легко показать, что решений, удовлетворяющих дифференциальным связям (5) с условиями (6) на концах отрезка, нет.

При $\lambda_0 = 1$ из условия (19) следует: $|p_3(T)| = K_2^{-1}$, и тогда функция $p_3(t)$ может менять знак либо один, либо два раза на отрезке времени $[0, T]$, что соответствует следующим наборам управления: $(+1; -1)$, $(-1; +1)$, $(+1, -1, +1)$, $(-1, +1, -1)$.

Несложно показать, что в случае, когда управление меняет один раз знак на временном отрезке $[0, T]$, решений, удовлетворяющих дифференциальным связям (5) с условиями (6) на концах отрезка, нет. В силу симметрии задачи без потери общности можно считать, что $x_1(T) = \Delta V > 0$, и тогда экстремальное управление представимо в следующем виде:

$$\hat{u} = \begin{cases} +1, & t \in [0, \tau_1], \\ -1, & t \in (\tau_1, \tau_2], \\ +1, & t \in (\tau_2, T]. \end{cases} \quad (20)$$

Общее решение системы (5) представимо в следующем виде:

$$x_3(t) = K_2 u_c t + \xi_3, \quad (21)$$

$$x_2(t) = \xi_2 \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) + K_2 u_c t + \xi_3 - K_2 u_c T_2, \quad (22)$$

$$x_1(t) = \xi_1 \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) + \frac{K_1 \xi_2 T_2}{T_2 - T_1} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) + K_1 K_2 u_c t - K_1 K_2 u_c (T_1 + T_2) + K_1 \xi_3. \quad (23)$$

Константы ξ_i , $i = 1, 2, 3$ находятся из начальных условий при $t = 0$ и из условий непрерывности функций x_i , $i = 1, 2, 3$ в точках τ_1, τ_2 .

$$\begin{cases} \xi_3^{(0)} = 0, \\ \xi_2^{(0)} = K_2 T_2, \\ \xi_1^{(0)} = -K_1 K_2 \frac{T_1^2}{T_2 - T_1}, \\ u_c = 1. \end{cases} \quad t \in (0, \tau_1], \quad (24)$$

$$\begin{cases} \xi_3^{(1)} = 2K_2 \tau_1, \\ \xi_2^{(1)} = K_2 T_2 \left(1 - 2 \exp\left[\frac{\tau_1}{T_2}\right]\right) \\ \xi_1^{(1)} = K_1 K_2 \frac{T_1^2}{T_2 - T_1} \left(2 \exp\left[\frac{\tau_1}{T_1}\right] - 1\right), \\ u_c = -1. \end{cases} \quad t \in (\tau_1, \tau_2], \quad (25)$$

$$\begin{cases} \xi_3^{(2)} = 2K_2(\tau_1 - \tau_2), \\ \xi_2^{(2)} = K_2T_2 \left(1 - 2 \exp\left[\frac{\tau_1}{T_2}\right] + 2 \exp\left[\frac{\tau_2}{T_2}\right] \right), \\ \xi_1^{(2)} = K_1K_2 \frac{T_1^2}{T_2 - T_1} \left(2 \exp\left[\frac{\tau_1}{T_1}\right] - \exp\left[\frac{\tau_2}{T_1}\right] - 1 \right), \\ u_c = 1. \end{cases} \quad t \in (\tau_2, T]. \quad (26)$$

Константы τ_1, τ_2, T находятся из условий (6) для свободного конца отрезка $t = T$ путем подстановки (26) в (21) – (23). Искомые константы связаны следующей системой уравнений.

$$\begin{cases} T + 2\tau_1 - 2\tau_2 = \frac{\Delta V}{K_1K_2}, \\ 1 - 2 \exp\left[\frac{\tau_1}{T_2}\right] + 2 \exp\left[\frac{\tau_2}{T_2}\right] = \exp\left[\frac{T}{T_2}\right], \\ 1 - 2 \exp\left[\frac{\tau_1}{T_1}\right] + 2 \exp\left[\frac{\tau_2}{T_1}\right] = \exp\left[\frac{T}{T_1}\right]. \end{cases} \quad (27)$$

Таким образом, алгоритм расчета экстремали может быть следующим. По известным константам $\Delta V, K_1, K_2, T_1, T_2$ находятся τ_1, τ_2, T при условии ($0 < \tau_1 < \tau_2 < T$) как решения системы (27). Найденные константы подставляются в (24) – (26) и затем восстанавливается экстремальное решение \hat{x} (21) – (23).

Найденная экстремаль \hat{x} удовлетворяет необходимым условиям слабого минимума задачи (4) – (6). К сожалению, показать выполнение достаточных условий аналитическим путем затруднительно, однако практические наблюдения дают основание утверждать, что минимум функционала (4) существует. Тогда найденная экстремаль даёт локальный минимум. Кроме того, поскольку экстремаль единственна, других локальных минимумов задачи нет, а значит, найденная экстремаль доставляет минимум задаче (4) – (6).

3. Синтез регулятора скорости воздушного потока для дозвуковой АДТ Т-102

Передаточная функция замкнутой следящей системы «Регулятор+АДТ», приведенной на рис. 1, выглядит следующим образом:

$$W_{з.с.}(s) = \frac{W_{АДТ}W_{рег}}{W_{АДТ}W_{рег} + 1}. \quad (28)$$

При этом передаточная функция главного привода и аэродинамического контура как объекта управления задается следующим выражением:

$$W_{АДТ}(s) = \frac{K(V_0)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2(V_0)s)}. \quad (29)$$

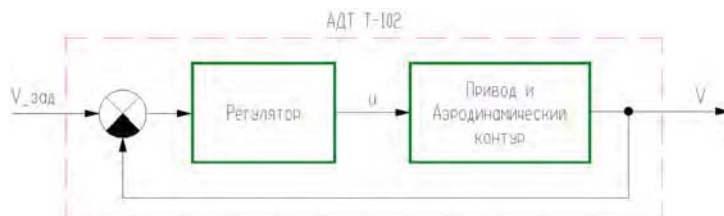


Рис. 1. Структурная схема следящей системы управления

Оптимизация вида и расчет коэффициентов передаточной функции регулятора $W_{рег}$ могут быть осуществлены следующим образом. Потребуем, чтобы переходная характеристика $\hat{V}(t)$ передаточной функции $W_{з.с.}$ замкнутой системы (28) была как можно ближе к найденной экстремали \hat{x} :

$$D(\hat{V}) = \sum_k (\hat{x}(k \cdot dT) - \hat{V}(k \cdot dT))^2 \rightarrow \min, \quad (30)$$

где dT – квант времени цифровой системы управления.

Передаточную функцию регулятора будем искать среди функций следующего вида:

$$W_{\text{per}}(s) = \frac{\sum_{i=0}^N c_i^{(Z)} s^i}{1 + \sum_{i=1}^M c_i^{(P)} s^i}. \quad (31)$$

Таким образом, после перехода к дискретному виду передаточной функции (28) задача (30) оказывается линейной по параметрам $c_i^{(Z)}$, $c_i^{(P)}$ и решается методом наименьших квадратов. Выбор порядка числителя и знаменателя передаточной функции осуществляется с учетом физической реализуемости системы, с одной стороны, и эмпирически выбирается наименьшим для удовлетворения требований технического задания по качеству управления ($\sigma V = 0,1$ м/с), с другой стороны. Передаточная функция регулятора выглядит следующим образом:

$$W_{\text{per}}(s) = K_{\text{per}} \frac{T_N s + 1}{T_p s + 1}. \quad (32)$$

Разностное уравнение, соответствующее передаточной функции регулятора (32), выглядит следующим образом:

$$u_i = u_{i-1} \exp\left[-\frac{dT}{T_p}\right] + K_{\text{per}} \left(\frac{T_N}{T_p} (\Delta V - x_i) - \frac{T_N}{T_p} \exp\left[-\frac{dT}{T_N}\right] (\Delta V - x_{i-1}) \right), \quad (33)$$

где dT – шаг квантования по времени;

u – цифровое задание системе управления ГП АДТ Т-102;

$\Delta V - x$ – ошибка управления по скорости воздушного потока.

На рис. 2 приведены локальное решение задачи Лагранжа \hat{x} и переходный процесс по скорости воздушного потока, реализуемый с помощью регулятора (32). Для моделирования процессов выбраны коэффициенты, наиболее типичные для аэродинамических установок данного класса.

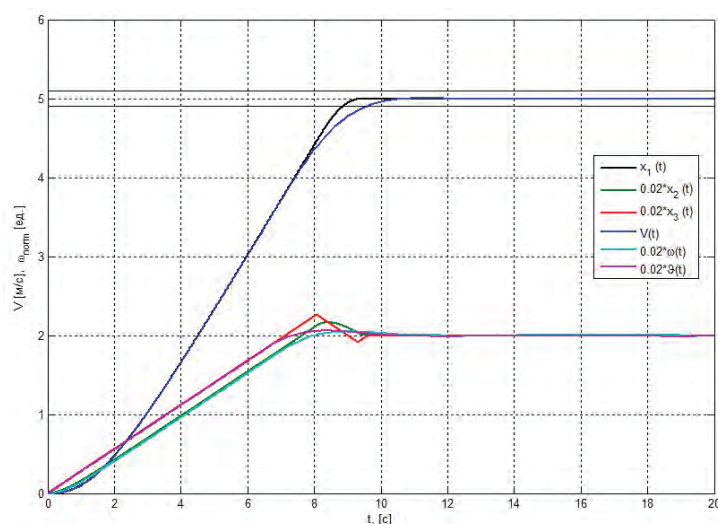


Рис. 2. Переходные процессы для изменения скорости воздушного потока

Как видно из рис. 2, полученный регулятор (32) обеспечивает близкие к оптимальным динамические характеристики АДТ как объекта управления.

В табл. 1 приведены коэффициенты, использованные при моделировании переходных процессов.

Т а б л и ц а 1

| Наименование | Значение |
|---|----------|
| Исходные параметры объекта управления | |
| Коэффициент передачи АД контура, K_T , [(м/с)/(об/мин)] | 0,05 |
| Коэффициент интегратора САУ ГП, K_i , [(об/мин)/с] | 14 |
| Постоянная времени АД контура, T_T , [с] | 1,2 |
| Постоянная времени САУ ГП, T_n , [с] | 0,5 |
| Изменение скорости воздушного потока ΔV , [м/с] | 5 |
| Значения констант для расчета \hat{x} | |
| Время переходного процесса, T , [с] | 9,6159 |
| Время первого переключения управления, τ_1 , [с] | 8,0769 |
| Время второго переключения управления, τ_2 , [с] | 9,3134 |
| Коэффициенты регулятора $W_{\text{рег}}$ | |
| Коэффициент регулятора, $K_{\text{рег}}$, [1/(м/с)] | 0,976 |
| Постоянная времени, соответствующая нулю передаточной функции регулятора, T_N , [с] | 1,272 |
| Постоянная времени, соответствующая полюсу передаточной функции регулятора, T_P , [с] | 0,451 |

В ходе проведения апробации предлагаемого регулятора в составе создаваемой цифровой системы управления скоростью воздушного потока АДТ Т-102 было проведено 10 экспериментов с контрольной моделью ЛА в диапазоне углов атаки модели ЛА от -6° до 24° , с переменным шагом по углу атаки модели ЛА, для скорости воздушного потока 50 м/с. План каждого эксперимента состоял из 20 точек. Длительность измерений на каждой точке составляла 2 секунды.

На основе полученных экспериментальных данных можно сказать, что регулятор обеспечивает необходимые требования по точности управления и поддержания скорости воздушного потока (σV не превышает 0,1 м/с) при сокращении времени типового аэродинамического эксперимента на 15...20% по сравнению с ручным управлением.

4. Заключение

В результате проведенных исследований получено локальное решение задачи Лагранжа для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. На основе полученной экстремали синтезирован регулятор следящей системы управления АДТ Т-102. Успешно проведена апробация регулятора в составе создаваемой системы управления скоростью воздушного потока АДТ Т-102.

Дальнейшее повышение быстродействия может быть осуществлено с помощью применения оптимального регулятора Понтрягина. Полученные результаты могут быть применены для широкого класса дозвуковых АДТ.

Литература

1. Лебсак В.А., Лыжсин О.В. Математическая модель переходных процессов в компрессорных трубах // Ученые записки ЦАГИ. 1985. Т. XVI, № 2. С. 33–39.
2. Кудрин Н.А., Петроневич В.В. Идентификация математической модели компрессорной аэродинамической трубы как объекта управления // Ученые записки ЦАГИ. 1993. Т. XXIV, № 2. С. 100–106.
3. Бухаров К.Д., Петроневич В.В., Савин П.В. Математическая модель трансзвуковой аэродинамической трубы Т-106 ЦАГИ как объекта управления по числу Маха // Научный вестник МГТУ ГА. 2015. № 223(1). С. 109–114.

References

1. *Lebsak V.A., Lyzhin O.V.* A mathematical model of transient processes in compressor wind tunnels. TsAGI Scientific Notes. 1985. V. XIV N 2. P. 33–39 (in Russian).
2. *Kudrin N.A., Petronevich V.V.* Identification of a mathematical model of a compressor wind tunnel as a control object. TsAGI Scientific Notes. 1993. V. XXVI, N 2. P. 100–106 (in Russian).
3. *Bukharov K.D., Petronevich V.V., Savin P.V.* A mathematical model of the TsAGI's transonic wind tunnel as a Mach number control object. MGTU GA Journal. 2015. N 223(1). P. 109–114 (in Russian).

Поступила в редакцию 15.06.2016