УДК 519.175.4

А. В. Буркин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Малые подграфы и расширения в семействе случайных подграфов плотных дистанционных графов

В предыдущих работах были получены результаты, касающиеся распределения малых подграфов и расширений в случайном симметричном дистанционном графе. В настоящей статье мы обобщаем эти утверждения на более широкий класс случайных дистанционных графов.

Ключевые слова: дистанционные графы, случайные графы, малые подграфы, свойства расширений.

A. V. Burkin

Lomonosov Moscow State University

Small subgraphs and extensions in a family of random subgraphs of dense distance graphs

Earlier, the results concerning the distribution of small subgraphs and extensions in a random symmetric distance graph were obtained. In this paper, we generalize these statements to a wider family of random distance graphs.

Key words: distance graphs, random graphs, small subgraphs, extension properties.

1. Введение и история задачи

Исторически первая (и наиболее изученная) модель случайного графа $G(n, p)$ была предложена П. Эрдёшом и А. Реньи в 1959–1960 гг. (см. [1, 2]). В ней все (неориентированные) ребра проводятся независимо друг от друга с вероятностью p. Если точнее, случайный граф $G(n, p)$ есть случайный элемент, принимающий значения в множестве всех неориентированных графов на n вершинах с распределением $\mathsf{P}(G(n, p) = (V, E)) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}$ (здесь V — это множество вершин графа — некоторое фиксированное множество мощности n, а E — множество ребер — множество пар элементов V). Достаточно полное описание результатов, посвященных $G(n, p)$, можно найти в [3–7].

Естественное обобщение этой модели получается, если ребра проводятся не все возможные, а принадлежащие множеству ребер некоторого графа G. Соответствующий случайный элемент в такой постановке называется *случайным подграфом* G_p графа G.

Одной из важных проблем в теории случайных графов Эрдёша–Реньи является нахождение предельного распределения малых подграфов в $G(n, p)$. Первые результаты были получены еще самими П. Эрдёшем и А. Реньи [2], а позже этим вопросом занимались Б. Боллобаш [8], А. Ручински, Э. Винс [9] и др. Приведем формулировки основных теорем, но прежде дадим основные определения.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$ — произвольное свойство графов. Формально под свойством графов для некоторого n понимается любое подмножество множества всех неориентированных графов на n вершинах. Примерами таких свойств являются свойство содержать некоторый фиксированный граф в качестве подграфа, свойство графа быть связным, свойство графа иметь хроматическое число, равное пяти. *Пороговой вероятностью* свойства $\mathcal{A}$ для случайного графа G_p называется такая функция $p^* = p^*(n)$, что $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathcal{A}) = 0$ при $p = o(p^*)$, $n \to \infty$, и $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathcal{A}) = 1$ при $p = w(p^*)$, $n \to \infty$ (или наоборот). Здесь $f(n) = o(g(n))$ $(f(n) = w(g(n)))$ означает, что для любого $C > 0$ существует $n_0 > 0$, такое, что для любого $n > n_0$ выполнено $|f(n)| < C|g(n)|$ $(C|g(n)| < |f(n)|)$. Для этих отношений мы также будем использовать обозначения $f(n) \ll g(n)$ и $f(n) \gg g(n)$ соответственно. Функция $p^* = p^*(n)$ называется *точной пороговой вероятностью*, если для любого $c < 1$ при $p \leqslant cp^*$ выполнено $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathcal{A}) = 0$ и для любого $c > 1$ при $p \geqslant cp^*$ выполнено $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathcal{A}) = 1$ (или наоборот).

Будем обозначать $v(F)$ и $e(F)$ количество вершин и количество ребер графа F соответственно. Напомним, что граф F называется *строго сбалансированным*, если

$$\rho(H) < \rho(F)$$

для любого собственного непустого подграфа $H \subset F$, где $\rho(H) = e(H)/v(H)$ — *плотность* графа H. Граф называется *сбалансированным*, если неравенство нестрогое.

Максимальной плотностью графа F называется величина

$$\rho^{\max}(F) = \max_{\substack{H \subseteq F \\ v(H) \neq 0}} \frac{e(H)}{v(H)}.$$

Теорема 1 (Б. Боллобаш [8]; А. Ручински, Э. Винс [9])**.** *Пусть F — произвольный фиксированный граф. Тогда функция $p^* = n^{-1/\rho^{\max}(F)}$ является пороговой вероятностью свойства содержать копию F для случайного графа $G(n,p)$. Выполнен также закон больших чисел для числа копий X_F графа F в $G(n,p)$: при $p \gg p^*$ для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X_F}{\mathsf{E}X_F} - 1\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

Теорема 2 (Б. Боллобаш [8])**.** *Пусть F — строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и a — количество его автоморфизмов. Пусть $p \sim cn^{-k/l}$, $c > 0$. Тогда распределение величины X_F слабо сходится к пуассоновскому с параметром $\lambda = c^l/a$.*

В настоящей работе мы получили ряд результатов об асимптотическом распределении малых подграфов в семействе других моделей случайного графа, называемых *случайными дистанционными графами*, определение которых будет дано в следующем разделе. Эти результаты распространяют утверждения, доказанные в [10], на более широкий класс графов.

Перейдем к описанию *свойств расширений*, являющихся обобщениями свойства содержать некоторый фиксированный граф.

Пусть H — граф с вершинами $z_1, \ldots, z_d, y_1, \ldots, y_k$, где $R = \{z_1, \ldots, z_d\}$ — множество *корней*. *Сетью* называется пара (R, H). Говорят, что граф G удовлетворяет *свойству расширения* $\mathrm{Ext}(R, H)$, если для любых $v_1, \ldots, v_d \in V(G)$ найдутся такие $w_1, \ldots, w_k \in V(G) \setminus \{v_1, \ldots, v_d\}$, что $\{z_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{v_i, w_j\} \in E(G)$ для любых $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ и $\{y_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{w_i, w_j\} \in E(G)$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

Пусть $l = e(H) - e(H|_R)$, где $H|_R$ — подграф H, индуцированный на множестве R. В общем случае величины k и l будем обозначать $v(R, H)$ и $e(R, H)$ соответственно. Величина $\rho(R, H) = l/k$ называется *плотностью* сети (R, H). *Подсетью* называется сеть $(R, S) := (R, H|_S)$, где $R \subset S \subseteq V(H)$. В *собственной* подсети $S \neq V(H)$. Сеть (R, H) называется *строго сбалансированной*, если $\rho(R, S) < \rho(R, H)$ для всех собственных подсетей (R, S). Она называется *сбалансированной*, если неравенства нестрогие. Сеть (R, H) называют *нетривиальной*, если каждая корневая вершина z соединена ребром в H с хотя бы одной вершиной $y \in V(H) \setminus R$.

Дж. Спенсером в [11] была доказана следующая теорема.

Теорема 3 (Дж. Спенсер [11]). *Пусть (R, H) — нетривиальная строго сбалансированная сеть. Тогда существуют такие числа $0 < \varepsilon < K$, что*

$$\text{если } p \leqslant \varepsilon n^{-k/l} (\ln n)^{1/l}, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathrm{Ext}(R, H)) = 0;$$

$$\text{если } p \geqslant K n^{-k/l} (\ln n)^{1/l}, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathrm{Ext}(R, H)) = 1.$$

Верно и более сильное утверждение. Пусть c_1 есть число автоморфизмов графа H, оставляющих корни на своих местах. Пусть, кроме того, c_2 обозначает количество биективных отображений R на себя, которые можно продолжить до некоторого автоморфизма H. Если $\lambda = \mathrm{const} > 0$ и для $p = p(n)$ выполнено

$$n^k p^l / c_1 = \ln \left(n^d / (c_2 \lambda) \right),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathrm{Ext}(R, H)) = e^{-\lambda}.$$

2. Описание модели и новые результаты

В этом разделе мы определим *случайные дистанционные графы* и приведем формулировки доказанных нами теорем для этой модели, аналогичных теоремам 1–3 из предыдущего раздела.

2.1. Основные понятия и формулировки теорем

В настоящей работе рассматривается семейство *полных дистанционных графов*

$$G = G(n, \alpha n, \alpha^2 n) = (V, E), \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}(\alpha_1, \alpha_2) = 1, \quad n \equiv 0 \mod \alpha_2^2,$$

в которых

$$V = \left\{ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \alpha n \right\}, \quad E = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha^2 n \right\},$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение.

Эти графы называются *дистанционными*, поскольку их ребра соответствуют парам вершин, находящихся на определенном расстоянии друг от друга. Подобные графы играют важную роль в различных задачах комбинаторной геометрии (см., например, [12–16]).

Количество вершин этого графа будем обозначать $N = N(n)$, а его степень (граф, очевидно, является регулярным) — $N_1 = N_1(n)$. Заметим, что в силу формулы Стирлинга

$$N = C_n^{\alpha n} \sim \frac{e^{H(\alpha) n}}{\sqrt{2\pi \alpha \beta n}},$$

$$N_1 = C_{\alpha n}^{\alpha^2 n} C_{\beta n}^{\alpha \beta n} \sim \frac{e^{H(\alpha) n}}{2\pi \alpha^{3/2} \beta^{3/2} n},$$

где $\beta = 1 - \alpha$, а $H(\alpha) = -\alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta$ — функция энтропии.

Нас интересуют случайные подграфы $G(n, \alpha n, \alpha^2 n)$, которые мы будем далее называть *случайными дистанционными графами* $G_p(n, \alpha n, \alpha^2 n)$. Не опасаясь путаницы, в дальнейшем мы часто будем записывать G и G_p вместо $G(n, \alpha n, \alpha^2 n)$ и $G_p(n, \alpha n, \alpha^2 n)$ соответственно.

В статье [10] были получены результаты для $G(n, n/2, n/4)$, аналогичные приведенным результатам для случайного графа $G(n, p)$. В настоящей работе мы обобщаем эти теоремы на случай произвольного α. Будем использовать обозначение X_F для числа копий графа F в случайном графе G_p. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 4. *Пусть F — произвольный фиксированный граф. Тогда функция*

$$p^* = N^{-1/\rho^{\max}(F)} \frac{N}{N_1}$$

является пороговой вероятностью свойства $G_p(n, \alpha n, \alpha^2 n)$ содержать копию F. При $p \gg p^*$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X_F}{\mathsf{E}X_F} - 1\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

Теорема 5. *Пусть F — строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и a есть число автоморфизмов F. Пусть*

$$p \sim cN^{-k/l}\frac{N}{N_1},$$

где $c = \mathrm{const} > 0$. Тогда распределение X_F слабо сходится к пуассоновскому с параметром $\lambda = c^l/a$, где X_F — число копий графа F в $G_p(n, \alpha n, \alpha^2 n)$.

Перейдем к свойствам расширений. Такие свойства являются монотонными (см., например, [4]) и поэтому для них существуют пороговые вероятности (см. [4]). Тем не менее, как показано в [10], для многих сетей (R, H) и для любых p свойства $\mathrm{Ext}(R, H)$ с вероятностями, стремящимися к 1, не выполнены для некоторых подпоследовательностей случайных дистанционных графов $G_p(n, n/2, n/4)$. Аналогичные наблюдения могут быть сделаны и для графов $G(n, \alpha n, \alpha^2 n)$. Поэтому для подобных свойств расширений пороговую вероятность не удается представить в удобном виде, как это сделано в теореме 3 для случайного графа $G(n, p)$. В этой связи, действуя аналогично случаю $\alpha = 1/2$ из [10], мы модифицировали определение свойств расширений для «дистанционного случая», сузив семейство множеств корней. Определим эти свойства.

Пусть $f = f(n)$ — произвольная последовательность положительных чисел. Также пусть (R, H) — нетривиальная строго сбалансированная сеть с $V(H) = \{z_1, \ldots, z_d, y_1, \ldots, y_k\}$, $R = \{z_1, \ldots, z_d\}$ и $e(R, H) = l$. Рассмотрим произвольные вершины $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, \ldots, v_n^1), \ldots, \mathbf{v}^d = (v_1^d, \ldots, v_n^d) \in V$. Обозначим $\delta_1, \ldots, \delta_{2^d} \in \{0, 1\}^d$ различные d-последовательности из нулей и единиц, упорядоченные лексикографически: $\delta_1 = (1, \ldots, 1) > \ldots > (0, \ldots, 0) = \delta_{2^d}$. Разобьем множество $\{1, \ldots, n\}$ на подмножества $B_1, \ldots, B_{2^d}$ следующим образом: $i \in B_j$ тогда и только тогда, когда $(v_i^1, \ldots, v_i^d) = \delta_j$. Положим

$$x_j = x_j\left(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d\right) = |B_j| - \tilde{w}'_j(d+1) \text{ при } j \in \left\{1, \ldots, 2^d\right\}, \tag{1}$$

где $\tilde{w}'_j(d+1)$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, определяются рекуррентно:

$$\tilde{w}'_1(2) = \alpha n, \quad \tilde{w}'_2(2) = \beta n,$$

$$\tilde{w}'_{2k-1}(i+1) = \left[\alpha \tilde{w}'_k(i)\right], \ \tilde{w}'_{2k}(i+1) = \tilde{w}'_k(i) - \left[\alpha \tilde{w}'_k(i)\right], \quad k \in \left\{1, \ldots, 2^{i-1}\right\}, i \in \{1, \ldots, d\}.$$

Здесь и далее $[\cdot]$ обозначает целую часть числа (с округлением в меньшую сторону).

Обозначим $\tilde{V}_f^d$ множество всех d-последовательностей вершин из V, для которых $|x_j| \leqslant f(n)$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$. Будем говорить, что остовный подграф G' дистанционного графа G обладает свойством $\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R, H)$, если для любого $(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d) \in \tilde{V}_f^d$ найдутся такие $\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k \in V \setminus \{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d\}$, что $\{z_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^j\} \in E(G')$ для любых $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ и $\{y_i, y_j\} \in E(H) \Rightarrow \{\mathbf{w}^i, \mathbf{w}^j\} \in E(G')$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Иными словами, свойство $\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R, H)$ получается из $\mathrm{Ext}(R, H)$ рассмотрением только тех d-последовательностей вершин из V, которые принадлежит $\tilde{V}_f^d$. Таким образом, нас интересуют только последовательности вершин, разбивающие $\{1, \ldots, n\}$ на части, приблизительно равные $\tilde{w}'_j(d+1)$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$. Теорема, сформулированная ниже, выполнена при условии $f \ll n^{2/3}$ и является обобщением соответствующей теоремы из [10] на случай произвольного α.

Теорема 6. *Пусть c_1 есть число автоморфизмов графа H, которые оставляют на месте каждый корень $x_i \in R$. Пусть $p = p(n)$ удовлетворяет равенству*

$$N^k \left(\frac{N_1}{N}\right)^l p^l / c_1 = d \ln N.$$

Тогда p является точной пороговой вероятностью для свойства $\mathrm{Ext}_f^{\mathrm{dist}}(R, H)$.

С точностью до используемых вспомогательных утверждений теоремы 4–6 доказываются так же, как и в случае $\alpha = 1/2$, рассмотренном в [10]. Эти сформулированные в п. 2.2 утверждения, интересные и сами по себе, в случае произвольного α требуют другого подхода. В силу схожести доказательств лемм со случаем $\alpha = 1/2$, мы ограничимся доказательством только первой из них в разделе 3, детали которого достаточно сильно отличаются в случае произвольного α.

2.2. Формулировки основных лемм

Пусть $f(n)$ — произвольная последовательность положительных чисел, причем $f \ll n^{2/3}$. Пусть, кроме того, (R, H) — произвольная сеть с $V(H) = \{z_1, \ldots, z_d, y_1, \ldots, y_k\}$, $R = \{z_1, \ldots, z_d\}$ и $e(R, H) = l$. Для различных $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d \in V$ обозначим $M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d)$ количество инъективных отображений из $V(H)$ в V, переводящих z_i в $\mathbf{v}^i$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, и сохраняющих ребра между вершинами, среди которых хотя бы одна не является корнем. Поскольку величина $M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d)$ не зависит от выбора конкретных вершин, а лишь от значений $|B_j|$ (см. параграф 2.1), $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, которые, в свою очередь, зависят только от чисел $x_1, \ldots, x_{2^d}$, будем обозначать $M_{(R,H)}^{\vec{x}} = M_{(R,H)}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^d)$, где вектор $\vec{x} := (x_1, \ldots, x_{2^d})$ определен в (1).

Лемма 1. *Найдется такая функция $M'_{(R,H)} = M'_{(R,H)}(n)$, не зависящая от $\vec{x}$, что $M_{(R,H)}^{\vec{x}} = M'_{(R,H)}\left(1 + O\left((f(n))^3/n^2\right)\right)$ при $n \to \infty$ равномерно по всем $\vec{x}$ с условием $|x_j| \leqslant f(n)$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$.*

В следующем утверждении была получена асимптотика числа вхождений произвольного графа F в дистанционный граф G, которая выражается таким же образом, как и в случае $\alpha = 1/2$.

Лемма 2. *Пусть M_F — количество мономорфизмов графа F с k вершинами и l ребрами в G. Тогда*

$$M_F \sim M(k, l) := N^k \left(\frac{N_1}{N}\right)^l.$$

Как и в случае $\alpha = 1/2$, мы получили формулу для $M'_{(R,H)}$ из леммы 1.

Лемма 3. *В обозначениях леммы 1 в качестве $M'_{(R,H)}$ можно выбрать $M(k, l)$.*

Доказательства последних двух лемм проходят так же, как в случае $\alpha = 1/2$, отличаясь лишь использованием вспомогательных утверждений настоящей статьи. Поэтому здесь мы их не приводим.

3. Доказательства лемм

В пп. 3.1–3.2 мы введем дополнительные обозначения и сформулируем и докажем некоторые вспомогательные утверждения. В п. 3.3 будет доказана лемма 1, сформулированная в предыдущем разделе.

3.1. Дополнительные определения и предварительные замечания

В дальнейших рассуждениях нам понадобятся вспомогательные обозначения. Пусть (R,H) — произвольная сеть с $V(H)=\{z_1,\ldots,z_d,y_1,\ldots,y_k\}$, $R=\{z_1,\ldots,z_d\}$ и $e(R,H)=l$, а $\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^d\in V$ — произвольные различные вершины. В обозначениях из раздела 2 положим

$$w_1^{\vec{x}}(1)=\tilde{w}_1'(d+1)+x_1,\ldots,w_{2^d}^{\vec{x}}(1)=\tilde{w}_{2^d}'(d+1)+x_{2^d}.$$

Рассмотрим произвольное $s\in\{1,\ldots,k\}$ и такие различные вершины $\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^s\in V$, что $\{z_i,y_j\}\in E(H)\Rightarrow\{\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^j\}\in E(G)$ для любых $i\in\{1,\ldots,d\}$, $j\in\{1,\ldots,s\}$ и $\{y_i,y_j\}\in E(H)\Rightarrow\{\mathbf{w}^i,\mathbf{w}^j\}\in E(G)$ для любых $i,j\in\{1,\ldots,s\}$. Для вершин $\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^d,\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^{s-1}$ рассмотрим разбиение множества $\{1,\ldots,n\}$ на подмножества $B_1,\ldots,B_{2^{d+s-1}}$ (см. раздел 2), мощности которых, как несложно видеть, зависят от чисел $x_1,\ldots,x_{2^d}$, и положим

$$w_j=w_j^{\vec{x}}(s)=|B_j|,\quad B_j=\left\{r_1^j,\ldots,r_{w_j}^j\right\},\quad j\in\left\{1,\ldots,2^{d+s-1}\right\}.$$

Посмотрим теперь на вершину $\mathbf{w}^s$ и на ее координаты как вектора в V. Для каждого $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$ обозначим $u_j^{\vec{x}}(s)$ количество единиц среди чисел $w^s_{r_1^j},\ldots,$ $w^s_{r^j_{w_j}}$ (мы обозначили $w_1^s,\ldots,w_n^s$ координаты $\mathbf{w}^s$). В силу определения дистанционного графа $G(n,\alpha n,\alpha^2 n)$ ясно, что наличие ребра между вершиной $\mathbf{w}^s$ и некоторой вершиной $\mathbf{v}$ из $\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^d,\mathbf{w}^1,\ldots,\mathbf{w}^{s-1}$, представляется в виде равенства скалярного произведения этих вершин $\alpha^2 n$. Последнее, в свою очередь, единственным образом записывается в виде суммы 2^{d+s-2} величин $u_j^{\vec{x}}(s)$ с единичными коэффициентами (где индексы входящих в выражение величин суть индексы множеств B_j, для которых координаты вершины $\mathbf{v}$ с номерами из B_j равны 1). Кроме того, для вершины $\mathbf{w}^s$ справедливо равенство $\langle\mathbf{w}^s,\mathbf{w}^s\rangle=\alpha n$. Этот скалярный квадрат, очевидно, записывается в виде суммы всех $u_j^{\vec{x}}(s)$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$.

Предположим, что в графе H среди вершин $x_1,\ldots,x_d,y_1,\ldots,y_{s-1}$ только вершины $x_{l_1^1(s)},\ldots,$ $x_{l^1_{a(s)}(s)},y_{l_1^2(s)},\ldots,y_{l^2_{b(s)}(s)}$ соединены ребрами с вершиной y_s (здесь $a(s)$ — количество вершин среди $x_1,\ldots,x_d$, соединенных с y_s, $b(s)$ — среди $y_1,\ldots,y_{s-1}$). Обозначим $c(1,i)$, $i\in\{l_1^1(s),\ldots,l^1_{a(s)}(s)\}$, и $c(2,i)$, $i\in\{l_1^2(s),\ldots,l^2_{b(s)}(s)\}$, последовательности индексов переменных $u_j^{\vec{x}}(s)$, входящих в уравнения, соответствующие наличию ребер между вершинами y_s и x_i, $i\in\{l_1^1(s),\ldots,l^1_{a(s)}(s)\}$, и между вершинами y_s и y_i, $i\in\{l_1^2(s),\ldots,l^2_{b(s)}(s)\}$, соответственно. Заметим, что длины всех таких последовательностей совпадают и равны $m(s)=2^{d+s-2}$. Тогда для того, чтобы вершина $\mathbf{w}^s$ была соединена с вершинами $\mathbf{v}_{l_1^1(s)},\ldots,\mathbf{v}_{l^1_{a(s)}(s)}$, $\mathbf{w}_{l_1^2(s)},\ldots,\mathbf{w}_{l^2_{b(s)}(s)}$, необходимо и достаточно, чтобы были справедливы равенства и неравенства системы

$$\begin{cases} u^{\vec{x}}_{c_1\left(1,l_1^1(s)\right)}(s)+\ldots+u^{\vec{x}}_{c_{m(s)}\left(1,l_1^1(s)\right)}(s)=\alpha^2 n,\\ \ldots\\ u^{\vec{x}}_{c_1\left(1,l^1_{a(s)}(s)\right)}(s)+\ldots+u^{\vec{x}}_{c_{m(s)}\left(1,l^1_{a(s)}(s)\right)}(s)=\alpha^2 n,\\ u^{\vec{x}}_{c_1\left(2,l_1^2(s)\right)}(s)+\ldots+u^{\vec{x}}_{c_{m(s)}\left(2,l_1^2(s)\right)}(s)=\alpha^2 n,\\ \ldots\\ u^{\vec{x}}_{c_1\left(2,l^2_{b(s)}(s)\right)}(s)+\ldots+u^{\vec{x}}_{c_{m(s)}\left(2,l^2_{b(s)}(s)\right)}(s)=\alpha^2 n,\\ u_1(s)+u_2(s)+\ldots+u_{2^{d+s-1}}(s)=\alpha n,\\ \forall j\in\left\{1,2,3,\ldots,2^{d+s-1}\right\}\;\; 0\leqslant u_j^{\vec{x}}(s)\leqslant w_j^{\vec{x}}(s). \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно,

$$M^{\vec{x}}_{(R,H)}=\sum C^{u_1^{\vec{x}}(1)}_{w_1^{\vec{x}}(1)}\ldots C^{u_{2^d}^{\vec{x}}(1)}_{w_{2^d}^{\vec{x}}(1)}\cdot\ldots\cdot C^{u_1^{\vec{x}}(k)}_{w_1^{\vec{x}}(k)}\ldots C^{u^{\vec{x}}_{2^{d+k-1}}(k)}_{w^{\vec{x}}_{2^{d+k-1}}(k)}, \tag{3}$$

где суммирование в выражении ведется по всем решениям $(u_1^{\vec{x}}(1),\ldots,u_{2^d}^{\vec{x}}(1))$, $\ldots$, $(u_1^{\vec{x}}(k),\ldots,\ u_{2^{d+k-1}}^{\vec{x}}(k))$ систем (2) с $s=1,\ldots,s=k$ соответственно. Здесь $w_{2j-1}^{\vec{x}}(s+1)=u_j^{\vec{x}}(s)$, $w_{2j}^{\vec{x}}(s+1)=w_j^{\vec{x}}(s)-u_j^{\vec{x}}(s)$ при любых $s\in\{1,\ldots,k-1\}$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$.

3.2. Вспомогательные утверждения

В предложениях ниже будем предполагать, что функция $f(n)$ такова, что $n^{1/2}\ll f(n)\ll n^{2/3}$.

Предложение 1. *Пусть*

$$F(w_1,w_2,x,t)=\frac{C_{w_1}^{[\alpha w_1]+x}C_{w_2}^{[\alpha w_2]-x+t}}{C_{w_1}^{[\alpha w_1]}C_{w_2}^{[\alpha w_2]}}.$$

Пусть также для постоянных $0<c,C<1$ выполнено $cn\leqslant w_i\leqslant Cn$, $i=1,2$. Кроме того, пусть $w_1+w_2=w$, $cn\leqslant w\leqslant Cn$. Тогда при достаточно больших n для некоторых (зависящих от α) положительных констант C_1,C_2

$$F(w_1,w_2,x,t)\leqslant C_1e^{t\ln(\beta/\alpha)}\ \text{при}\ |t|\leqslant f(n)\ \text{и любых}\ x,$$

$$F(w_1,w_2,x,t)\leqslant C_1e^{t\ln(\beta/\alpha)-C_2(f(n))^2/n}\ \text{при}\ |t|\leqslant f(n)\ \text{и}\ |x|>f(n).$$

Доказательство. Будем предполагать, что $|t|\leqslant f(n)$. Пусть сначала также $|x|\leqslant f(n)$. Легко видеть, что

$$C_n^m=\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\exp\left(H\left(\frac{m}{n}\right)n+O\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}\right)\right),\ m\to\infty,n-m\to\infty.$$

Используя это асимптотическое равенство и раскладывая $H(\cdot)$ по формуле Тейлора, получим, что

$$\begin{aligned}C_{w_1}^{[\alpha w_1]+x}C_{w_2}^{[\alpha w_2]-x+t}&=\sqrt{\frac{w_1}{2\pi([\alpha w_1]+x)(w_1-[\alpha w_1]-x)}}\exp\Bigg(H(\alpha)w_1+\\&+H'(\alpha)\frac{[\alpha w_1]-\alpha w_1+x}{w_1}w_1+\frac{1}{2}H''(\alpha)\left(\frac{[\alpha w_1]-\alpha w_1+x}{w_1}\right)^2w_1+O\left(\frac{(f(n))^3}{n^2}\right)\Bigg)\times\\&\times\sqrt{\frac{w_2}{2\pi([\alpha w_2]-x+t)(w_2-[\alpha w_2]+x-t)}}\exp\Bigg(H(\alpha)w_2+\\&+H'(\alpha)\frac{[\alpha w_2]-\alpha w_2-x+t}{w_2}w_2+\frac{1}{2}H''(\alpha)\left(\frac{[\alpha w_2]-\alpha w_2-x+t}{w_2}\right)^2w_2+O\left(\frac{(f(n))^3}{n^2}\right)\Bigg)=\\&=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{w_1w_2}{[\alpha w_1][\alpha w_2](w_1-[\alpha w_1])(w_2-[\alpha w_2])}}\exp\Bigg(H(\alpha)w+\\&+\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)([\alpha w_1]+[\alpha w_2]-\alpha w+t)-\frac{1}{2\alpha\beta}\left(\frac{x^2}{w_1}+\frac{(x-t)^2}{w_2}\right)+O\left(\frac{(f(n))^3}{n^2}\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $H'(x)=\ln((1-x)/x)$ и $H''(x)=-\frac{1}{x(1-x)}$. Таким образом, $F(w_1,w_2,x,t)\leqslant C_1e^{t\ln(\beta/\alpha)}$ при $|x|\leqslant f(n)$ (с обозначенными выше условиями на w_1,w_2).

Кроме того, $F(w_1,w_2,x,t)\leqslant C_1e^{t\ln(\beta/\alpha)-C_2(f(n))^2/n}$ при $|x|=[f(n)]$. Для того чтобы получить утверждение, покажем, что, начиная с некоторого n, величина $F(w_1,w_2,x,t)$ при

$|t| \leqslant f(n)$ монотонно убывает по x при $x \geqslant [f(n)]$ и монотонно возрастает при $x \leqslant -[f(n)]$:

$$\frac{F(w_1,w_2,x+1,t)}{F(w_1,w_2,x,t)} = \frac{([\alpha w_1]+x)!(w_1-[\alpha w_1]-x)!}{([\alpha w_1]+x+1)!(w_1-[\alpha w_1]-x-1)!}\times$$
$$\times\frac{([\alpha w_2]-x+t)!(w_2-[\alpha w_2]+x-t)!}{([\alpha w_2]-x-1+t)!(w_2-[\alpha w_2]+x+1-t)!} =$$
$$= \frac{(a-x)(b-x+t)}{(c+x+1)(d+x+1-t)} = \frac{ab-(a+b)x+x^2+t(a-x)}{cd+(c+d)(x+1)+(x+1)^2-t(c+x+1)} =$$
$$= 1+\frac{(ab-cd)-(a+b+c+d)x-(c+d)-2x-1+t(a+c+1)}{cd+(c+d)(x+1)+(x+1)^2-t(c+x+1)} =$$
$$= 1+\frac{O(n)-wx+O(n)+w_1t+O(f(n))}{(c+x+1)(d+x+1-t)} = 1+\frac{-wx+w_1t+O(n)}{(c+x+1)(d+x+1-t)}.$$

Здесь

$$a = w_1-[\alpha w_1], \quad b=[\alpha w_2], \quad c=[\alpha w_1], \quad d = w_2-[\alpha w_2].$$

Отсюда при достаточно больших n

$$\frac{F(w_1,w_2,x+1,t)}{F(w_1,w_2,x,t)} < 1, \text{ если } x \geqslant [f(n)],$$

и

$$\frac{F(w_1,w_2,x+1,t)}{F(w_1,w_2,x,t)} > 1, \text{ если } x \leqslant -[f(n)].$$

Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^1(n),\ldots,\mathbf{v}^i = \mathbf{v}^i(n)$ *— вершины графа* G*, разбивающие множество* $\{1,\ldots,n\}$ *на подмножества* $B_1,\ldots,B_{2^i}$ *мощностей* $w_1(i+1),\ldots,w_{2^i}(i+1)$*, причем при достаточно больших* n *для любого* $j\in\{1,\ldots,2^i\}$ *выполнено* $cn \leqslant w_j(i+1) \leqslant Cn$*, где* $0<c,C<1$ *— некоторые положительные постоянные. Выберем вершину с номером* $i+1$*, фиксируя в каждом подмножестве* $u_j(i+1)$ *позиций, для которых соответствующие координаты искомой вершины-вектора равны* 1*, причем* $\sum_{j=1}^{2^i} u_j(i+1) = \alpha n$*. Множество таких вершин, отвечающих набору* $u(i+1) = (u_1(i+1),\ldots,u_{2^i}(i+1))$*, будем обозначать* $V_{u(i+1)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^i)$*. Тогда, если хотя бы для одного* j *из* $\{1,\ldots,2^i\}$ *выполнено* $|u_j(i+1)-[\alpha w_j(i+1)]| > f(n)$*, то при достаточно больших* n *мощность множества* $V_{u(i+1)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^i)$ *не превосходит* $C_1e^{H(\alpha)n-C_2(f(n))^2/n}$ *для некоторых положительных констант* C_1, C_2.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\left|V_{u(i+1)}\left(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^i\right)\right| = C_{w_1(i+1)}^{u_1(i+1)}\ldots C_{w_{2^i}(i+1)}^{u_{2^i}(i+1)}.$$

Будем доказывать утверждение по индукции. Пусть $i=1$. Представляя $u_j(2) = \alpha w_j(2)+t_j(2)$, $j\in\{1,2\}$, получаем, что $t_1(2) = x = -t_2(2)$. Поэтому количество способов выбрать вершину с $|t_1(2)| > f(n)$ (и, соответственно, с таким же условием на $t_2(2)$) в силу предложения 1 не превосходит $C_1e^{H(\alpha)n-C_2(f(n))^2/n}$.

Предположим, что предложение доказано для всех $i \leqslant \mu-1$, докажем его для $i=\mu$. Пусть для некоторого $k\in\{1,\ldots,2^{\mu-1}\}$ выполнено $|u_{2k-1}(\mu+1)+u_{2k}(\mu+1)-[\alpha w_{2k-1}(\mu+1)]-[\alpha w_{2k}(\mu+1)]| > f(n)$. Образуем вектор $u'(\mu) = (u'_1(\mu),\ldots,u'_{2^{\mu-1}}(\mu))$ по правилу $u'_k(\mu) = u_{2k-1}(\mu+1)+u_{2k}(\mu+1)$, $k\in\{1,\ldots,2^{\mu-1}\}$. Рассмотрим первые $\mu-1$ вершин и множество $V_{u'(\mu)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^{\mu-1})$ вершин графа G, отвечающих набору $u'(\mu)$. Заметим, что $V_{u'(\mu)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^{\mu-1})$ не зависит от $\mathbf{v}^\mu$ и $V_{u(\mu+1)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^\mu) \subset V_{u'(\mu)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^{\mu-1})$. Поскольку для некоторого $k\in\{1,\ldots,2^{\mu-1}\}$ выполнено $|u'_k(\mu)-[\alpha w'_k(\mu)]| > f(n)-c_1$ с $c_1 = \text{const} > 0$, где $w_k(\mu) = w_{2k-1}(\mu+1)+w_{2k}(\mu+1)$, по предположению индукции $|V_{u'(\mu)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^{\mu-1})| < C_1 e^{H(\alpha)n - C_2(f(n))^2/n}$, а следовательно, $|V_{u(\mu+1)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^{\mu})| < C_1 e^{H(\alpha)n - C_2(f(n))^2/n}$. Здесь C_1, C_2, как и раньше, — некоторые положительные константы.

Таким образом, можно далее считать, что для всех $k \in \{1,\ldots,2^{\mu-1}\}$ выполнено $|u_{2k-1}(\mu+1) + u_{2k}(\mu+1) - [\alpha w_{2k-1}(\mu+1)] - [\alpha w_{2k}(\mu+1)]| \leqslant f(n)$. Представим $u_j(\mu+1)$ в следующем виде:

$$u_{2k-1}(\mu+1) = [\alpha w_{2k-1}(\mu+1)] + q_k(\mu+1),$$

$$u_{2k}(\mu+1) = [\alpha w_{2k}(\mu+1)] - q_k(\mu+1) + s_k(\mu+1).$$

Ясно, что для всех $k \in \{1,\ldots,2^{\mu-1}\}$ выполнено $|s_k(\mu+1)| \leqslant f(n)$. Поэтому можно применить предложение 1 для соответствующих пар последовательных множителей в выражении для $|V_{u(\mu+1)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^{\mu})|$:

$$|V_{u(\mu+1)}(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^{\mu})| \leqslant C_1 e^{\sum_{k=1}^{2^{\mu-1}} H(\alpha) w_k(\mu) + \sum_{k=1}^{2^{\mu-1}} s_k(\mu+1)\ln(\beta/\alpha) - C_2(f(n))^2/n}. \tag{4}$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{2^{\mu}} u_j(\mu+1) = \alpha n,$$

выполнено

$$\sum_{j=1}^{2^{\mu-1}} s_j(\mu+1) = O(1).$$

Таким образом, последнее выражение в (4) не превосходит $\tilde{C}_1 e^{H(\alpha)n - \tilde{C}_2(f(n))^2/n}$, где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — некоторые положительные постоянные.

Предложение доказано.

3.3. Доказательство леммы 1

Без ограничения общности будем считать, что $f \gg n^{0.6}$. Будем также предполагать, что $f(n) \geqslant n^{0.6}$ при всех n.

Доказательство проходит по той же схеме, что и в случае, разобранном в [10]. Для полноты картины мы, как и в [10], сначала обозначим основные идеи доказательства, а затем все строго докажем, не ссылаясь на доказательство соответствующей леммы из [10].

Идея доказательства. В разделе 3.1 мы свели задачу нахождения числа расширений $M^{\vec{x}}_{(R,H)}$ к поиску асимптотики для некоторой суммы (3) по решениям k систем уравнений (2). В такой формулировке достаточно доказать, что эта асимптотика не зависит от $x_1,\ldots,x_{2^d}$ и равномерна по ним при $|x_i| \leqslant f(n)$, $i \in \{1,\ldots,2^d\}$.

Как будет видно далее, максимум суммы (3) достигается при $u^{\vec{x}}_j(s) = [\alpha w^{\vec{x}}_j(s)] + O(1)$, $n \to \infty$. Также будет показано, что если в сумме (3) проводить суммирование не по всем $u^{\vec{x}}_j(s)$, удовлетворяющим соответствующим системам уравнений (2), а лишь по таким, что $|u^{\vec{x}}_j(s) - [\alpha w^{\vec{x}}_j(s)]| \leqslant n^{0.6}$, то асимптотика суммы не поменяется, причем сохранится и равномерность по $x_1,\ldots,x_{2^d}$ (при достаточно малых x_i). Для такой «укороченной» суммы уже гораздо легче, вводя для удобства новые переменные и обозначения, доказать равномерность ее асимптотики.

Доказательство. В силу определения чисел $x_1,\ldots,x_{2^d}$ существуют такая константа $c > 0$ и такие d целых чисел $a_1,\ldots,a_d$, что $|a_j| \leqslant c$ для всех $j \in \{1,\ldots,d\}$ и вектор $(x_1,\ldots,x_{2^d})$ является решением системы (2), в которой $s = 1$, $a(1) = d$ и правая часть заменена на столбец $(a_1,\ldots,a_d,0)^T$. Покажем, что существует такая константа $C > 0$, не зависящая от $(x_1,\ldots,x_{2^d})$, что для всех $j \in \{1,\ldots,2^d\}$ найдутся числа $y_j = y_j(n) \in \mathbb{Z}$ и $r_j \in \mathbb{Z}$,

$$|r_j| \leqslant C, \tag{5}$$

для которых
$$x_j = \alpha_2^k y_j + r_j, \tag{6}$$
а вектор $(y_1, \ldots, y_{2^d})$ является решением системы (2), в которой $s = 1$, $a(1) = d$ и правая часть заменена на столбец $(0, \ldots, 0)^T$. Обозначим последнюю систему следующим образом: $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Подставив вместо $\mathbf{y}$ вектор $([x_1/\alpha_2^k], \ldots, [x_{2^d}/\alpha_2^k])$, получим в правой части некоторый вектор $(b_1, \ldots, b_{d+1})^T$, абсолютное значение каждого элемента которого не превосходит некоторой константы $\tilde{c} > 0$. Заметим, что для любого $i \in \{1, \ldots, d+1\}$ в i-ой строке матрицы $A = (a_{i,j})_{d+1}^{2^d}$ содержится ненулевой коэффициент: $a_{i,2^d-2^{d-i}} = 1$ (если $i \in \{1, \ldots, d\}$) и $a_{d+1,2^d} = 1$, при этом соответствующие коэффициенты в остальных строках (кроме последней) равны нулю: $a_{j,2^d-2^{d-i}} = 0$ (если $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d\}$) и $a_{j,2^d} = 0$ (если $j \in \{1, \ldots, d\}$). Следовательно, положив
$$y_{2^d-2^{d-i}} = \left[\frac{x_{2^d-2^{d-i}}}{\alpha_2^k}\right] - b_i \text{ при } i \in \{1, \ldots, d\},$$
$$y_{2^d} = \left[\frac{x_{2^d}}{\alpha_2^k}\right] + \sum_{i=1}^{d} b_i - b_{d+1},$$
$$y_j = \left[\frac{x_j}{\alpha_2^k}\right] \text{ при } j \in \left\{1, \ldots, 2^d\right\} \setminus \left\{2^d - 2^{d-1}, 2^d - 2^{d-2}, \ldots, 2^d - 1, 2^d\right\},$$
мы получим искомый вектор $\mathbf{y}$.

Введем для удобства новые обозначения:
$$t_j(s) = u_j^{\vec{x}}(s) - \left[\alpha\left(w_j^{\vec{x}}(s) - \varepsilon_j(s)\right)\right], \tag{7}$$
где $\varepsilon_j(1) = r_j$ при $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, а при $s \in \{2, \ldots, k\}$
$$\varepsilon_j(s) = \begin{cases} r_q, & \text{если } j = 2^{s-1}q,\ q \in \{1, \ldots, 2^d\}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
Кроме того, пусть в обозначениях раздела 2 $w'_j(1) = \tilde{w}'_j(d+1)$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$. Далее, $u'_j(s)$ при $s \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$ и $w'_j(s)$ при $s \in \{2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$ определяются из следующих рекуррентных соотношений:
$$u'_j(s) = [\alpha w'_j(s)] + t_j(s), \tag{8}$$
$$w'_{2j-1}(s) = u'_j(s-1), \quad w'_{2j}(s) = w'_j(s-1) - u'_j(s-1), \quad j \in \left\{1, \ldots, 2^{d+s-2}\right\}. \tag{9}$$
Очевидно, $w_j^{\vec{x}}(1) = w'_j(1) + \alpha_2^k y_j + r_j$ и $u_j^{\vec{x}}(1) = [\alpha w'_j(1)] + \alpha_1 \alpha_2^{k-1} y_j + t_j(1)$ при $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$. Получим по индукции аналогичные выражения для $w_j^{\vec{x}}(s)$ и $u_j^{\vec{x}}(s)$ при $s \in \{2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$. Пусть $s \in \{2, \ldots, k\}$. Предположим, что для любого $j \in \{1, \ldots, 2^{d+(s-1)-1}\}$ справедливы равенства
$$w_j^{\vec{x}}(s-1) = w'_j(s-1) + \delta_j(s-1) + \varepsilon_j(s-1), \quad u_j^{\vec{x}}(s-1) = [\alpha w'_j(s-1)] + \alpha\delta_j(s-1) + t_j(s-1), \tag{10}$$
где $\delta_j(s)$, $s \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$, определяются из рекуррентных соотношений:
$$\delta_j(1) = \alpha_2^k y_j, \quad j \in \left\{1, \ldots, 2^d\right\},$$
$$\delta_{2j-1}(s) = \alpha\delta_j(s-1), \quad \delta_{2j}(s) = \beta\delta_j(s-1), \quad j \in \left\{1, \ldots, 2^{d+s-2}\right\}.$$

Тогда в силу (8), (9) и (10) для любого $j \in \{1, \ldots, 2^{d+(s-1)-1}\}$ имеем

$$w^{\vec{x}}_{2j-1}(s) = u^{\vec{x}}_j(s-1) = u'_j(s-1) + \alpha\delta_j(s-1) = w'_{2j-1}(s) + \delta_{2j-1}(s),$$

$$w^{\vec{x}}_{2j}(s) = w^{\vec{x}}_j(s-1) - u^{\vec{x}}_j(s-1) = w'_j(s-1) - u'_j(s-1) + \beta\delta_j(s-1) + \varepsilon_j(s-1) = \\ = w'_{2j}(s) + \delta_{2j}(s) + \varepsilon_{2j}(s).$$

Окончательно, для любого $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$ выполнено

$$w^{\vec{x}}_j(s) = w'_j(s) + \delta_j(s) + \varepsilon_j(s). \tag{11}$$

Следовательно, в силу (7)

$$u^{\vec{x}}_j(s) = t_j(s) + \left[\alpha\left(w^{\vec{x}}_j(s) - \varepsilon_j(s)\right)\right] = \left[\alpha w'_j\right] + \alpha\delta_j(s) + t_j(s). \tag{12}$$

Таким образом,

$$M^{\vec{x}}_{(R,H)} = \sum C^{\left[\alpha w'_1(1)\right]+\alpha\delta_1(1)+t_1(1)}_{w'_1(1)+\delta_1(1)+\varepsilon_1(1)} \ldots C^{\left[\alpha w'_{2^d}(1)\right]+\alpha\delta_{2^d}(1)+t_{2^d}(1)}_{w'_{2^d}(1)+\delta_{2^d}(1)+\varepsilon_{2^d}(1)} \times \ldots \times$$

$$\times C^{\left[\alpha w'_1(k)\right]+\alpha\delta_1(k)+t_1(k)}_{w'_1(k)+\delta_1(k)+\varepsilon_1(k)} \ldots C^{\left[\alpha w'_{2^{d+k-1}}(k)\right]+\alpha\delta_{2^{d+k-1}}(k)+t_{2^{d+k-1}}(k)}_{w'_{2^{d+k-1}}(k)+\delta_{2^{d+k-1}}(k)+\varepsilon_{2^{d+k-1}}(k)}, \tag{13}$$

где суммирование ведется по всем наборам $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k))$, таким что числа $u^{\vec{x}}_j(s)$, $s \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$, определяемые равенством (7), являются решением систем (2) при $s \in \{1, \ldots, k\}$.

Докажем, что суммирование в (13) можно осуществлять по некоторому такому множеству $T = T(n)$ наборов $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k))$, не зависящему от $x_1, \ldots, x_{2^d}$, что равенство в (13) заменится на асимптотическое равенство и для всех $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$ будет выполнено $|t_j(s)| \leqslant n^{0.6}$ при $s \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$.

Заметим, что в силу определения вектора $(y_1, \ldots, y_{2^d})$ вектор $(\delta_1(1), \ldots, \delta_{2^d}(1)) = (y_1, \ldots, y_{2^d})$ является решением системы (2), в которой $s = 1$, $a(1) = d$ и правая часть заменена на столбец $(0, \ldots, 0)^T$. Произведем замену переменных $u^{\vec{x}}_j(1)$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, в системе (2) в соответствии с (12). Тогда коэффициенты системы при $s = 1$ без ограничений, записанных в ее последней строке, не зависят от $\vec{x}$. Следовательно, и ее решения также не зависят от $\vec{x}$. Более того, при достаточно больших n любое решение $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1))$ системы (2) при $s = 1$ без ограничений, записанных в ее последней строке, удовлетворяющее неравенствам $|t_j(1)| \leqslant n^{0.6}$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, удовлетворяет этим ограничениям, так как $w^{\vec{x}}_j(1) \geqslant [(\min\{\alpha, \beta\})^d n] - f(n)$ при всех $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$. Следовательно, множество всех наборов $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1))$, удовлетворяющих неравенствам $|t_j(1)| \leqslant n^{0.6}$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, и определяемых равенством (7), совпадает с множеством всех наборов $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1))$, удовлетворяющих неравенствам $|t_j(1)| \leqslant n^{0.6}$, $j \in \{1, \ldots, 2^d\}$, и являющихся решениями системы (2) без ограничений, записанных в ее последней строке. Обозначим $\tilde{T}(1)$ множество всех таких наборов. Заметим, наконец, что в силу (6), (8), (9) и (11) для любого набора $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1)) \in \tilde{T}(1)$ выполнены неравенства

$$w^{\vec{x}}_j(2) \geqslant w'_j(2) - C_1 f(n) \geqslant \left[\min\{\alpha, \beta\} w'_j(1)\right] - n^{0.6} - C_1 f(n) \geqslant \\ \geqslant \left[(\min\{\alpha, \beta\})^{d+1} n\right] - \tilde{C}(2) f(n)$$

при всех $j \in \{1, \ldots, 2^{d+1}\}$, где C_1 и $\tilde{C}(2)$ — некоторые положительные константы.

Пусть $s \in \{2,\ldots,k\}$ и множество $\tilde{T}(s-1)$ наборов $(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(s-1),\ldots,t_{2^{d+s-2}}(s-1))$ задано. Рассмотрим произвольный набор

$$\mathbf{t} = (t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(s-1),\ldots,t_{2^{d+s-2}}(s-1)) \in \tilde{T}(s-1).$$

Пусть для всех $j \in \{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$ выполнено

$$w_j^{\vec{x}}(s) \geqslant \left[(\min\{\alpha,\beta\})^{d+s-1}n\right] - \tilde{C}(s)f(n), \tag{14}$$

где $\tilde{C}(s) = \mathrm{const} > 0$. По аналогии со случаем $s=1$ в силу определения вектора $(y_1,\ldots,y_{2^d})$ вектор $(\delta_1(s),\ldots,\delta_{2^{d+s-1}}(s))$ является решением системы (2), в которой $a(s)=d$, $b(s)=s-1$ и правая часть заменена на столбец $(0,\ldots,0)^T$. Снова сделаем замену переменных $u_j^{\vec{x}}(s)$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$, в соответствии с (12). Поскольку коэффициенты системы без ограничений, записанных в ее последней строке, не зависят от $\vec{x}$ и являются функциями от переменных $t_j(i)$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+i-1}\}$, $i\in\{1,\ldots,s-1\}$, которые также не зависят от $\vec{x}$, то и решения такой системы не зависят от $\vec{x}$, и при достаточно больших n любое решение $(t_1(s),\ldots,t_{2^{d+s-1}}(s))$ системы (2) без ограничений, записанных в ее последней строке, удовлетворяющее неравенствам $|t_j(s)| \leqslant n^{0.6}$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$, удовлетворяет этим ограничениям в силу предположения (14). Следовательно, множество всех наборов $(t_1(s),\ldots,t_{2^{d+s-1}}(s))$, удовлетворяющих неравенствам $|t_j(s)| \leqslant n^{0.6}$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$, и определяемых равенством (7), совпадает с множеством всех наборов $(t_1(s),\ldots,t_{2^{d+s-1}}(1))$, удовлетворяющих неравенствам $|t_j(s)|\leqslant n^{0.6}$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$, и являющихся решениями системы (2) без ограничений, записанных в ее последней строке. Обозначим $\tilde{T}(\mathbf{t})$ множество всех таких наборов. При $s<k$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+s}\}$ и любом $(t_1(s),\ldots,t_{2^{d+s-1}}(s))\in\tilde{T}(\mathbf{t})$ в силу (6), (8), (9), (11) и предположения (14) имеем

$$w_j^{\vec{x}}(s+1) \geqslant w'_j(s+1) - C_1 f(n) \geqslant \left[\min\{\alpha,\beta\}w'_j(s)\right] - n^{0.6} - C_1 f(n) \geqslant$$

$$\geqslant \left[\min\{\alpha,\beta\}\left(w_j^{\vec{x}}(s)-\delta_j(s)-\varepsilon_j(s)\right)\right] - C_2 f(n) \geqslant \left[(\min\{\alpha,\beta\})^{d+s}n\right] - \tilde{C}(s+1)f(n),$$

где $C_1, C_2, \tilde{C}(s+1)$ — положительные константы. Положим

$$\tilde{T}(s) = \bigcup_{\mathbf{t}=(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(s-1),\ldots,t_{2^{d+s-2}}(s-1))\in\tilde{T}(s-1)} \{\mathbf{t}\}\times\tilde{T}(\mathbf{t}).$$

Множество T определим следующим образом: $T=\tilde{T}(k)$. Осталось доказать, что равенство в (13) заменится на асимптотическое равенство при суммировании по всем наборам из T.

По аналогии с доказательством существования чисел $y_1,\ldots,y_{2^d}$, для которых выполнено (5) и (6), можно доказать, что для любых $x_1,\ldots,x_{2^d}$ существует такое число $c=\mathrm{const}>0$, не зависящее от $\vec{x}$, и набор $(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(k),\ldots, t_{2^{d+k-1}}(k))\in T$, что выполнены неравенства $t_j(s)\leqslant c$ для всех $s\in\{1,\ldots,k\}$, $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$. Соответствующий этому набору элемент суммы из правой части равенства (13), как будет следовать из (16), оценивается снизу величиной $e^{H(\alpha)n}/n^{\tilde{c}}$ для некоторой константы $\tilde{c}>0$.

Заметим, что в силу (14) найдется такое $c>0$, что для всех $x_1,\ldots,x_{2^d}\in[-f(n),f(n)]$, $(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(k),\ldots,t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$, $s\in\{1,\ldots,k\}$ и $j\in\{1,\ldots,2^{d+s-1}\}$ при достаточно больших n выполнено $cn\leqslant w_j^{\vec{x}}(s)\leqslant n$. Поэтому можно применить предложение 2, откуда следует, что слагаемые в (13), соответствующие наборам $((t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(k),\ldots,t_{2^{d+k-1}}(k)))$, в которых хотя бы одно из $t_j(i)$ удовлетворяет неравенству $|t_j(i)|>n^{0.6}$, дают в совокупности

$$n^{k2^{d+k-1}}e^{-\Omega\left(n^{0.2}\right)}e^{H(\alpha)kn} = o\left(e^{H(\alpha)kn}/n^{\tilde{c}+1}\right).$$

Здесь $g(n) = \Omega(h(n))$ означает, что при достаточно больших n для некоторого $C > 0$ выполнено $g(n) \geqslant Ch(n)$. Окончательно получаем

$$M_{(R,H)}^{\vec{x}} = \sum_{(t_1(1),\ldots,t_{2^d}(1),\ldots,t_1(k),\ldots,t_{2^{d+k-1}}(k))\in T} C_{w_1'(1)+\delta_1(1)+\varepsilon_1(1)}^{\left[\alpha w_1'(1)\right]+\alpha\delta_1(1)+t_1(1)} \ldots \times \\ \times C_{w_{2^d}'(1)+\delta_{2^d}(1)+\varepsilon_{2^d}(1)}^{\left[\alpha w_{2^d}'(1)\right]+\alpha\delta_{2^d}(1)+t_{2^d}(1)} \ldots C_{w_1'(k)+\delta_1(k)+\varepsilon_1(k)}^{\left[\alpha w_1'(k)\right]+\alpha\delta_1(k)+t_1(k)} \ldots \times \\ \times C_{w_{2^{d+k-1}}'(k)+\delta_{2^{d+k-1}}(k)+\varepsilon_{2^{d+k-1}}(k)}^{\left[\alpha w_{2^{d+k-1}}'(i)\right]+\alpha\delta_{2^{d+k-1}}(k)+t_{2^{d+k-1}}(k)} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{15}$$

равномерно по всем $x_1, \ldots, x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$.

Покажем теперь, что

$$C_{w_1'(s)+\delta_1(s)+\varepsilon_1(s)}^{\left[\alpha w_1'(s)\right]+\alpha\delta_1(s)+t_1(s)} \ldots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+\delta_{2^{d+s-1}}(s)+\varepsilon_{2^{d+s-1}}(s)}^{\left[\alpha w_{2^{d+s-1}}'(i)\right]+\alpha\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)} \sim \\ \sim C_{w_1'(s)}^{\left[\alpha w_1'(s)\right]+t_1(s)} \ldots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)}^{\left[\alpha w_{2^{d+s-1}}'(s)\right]+t_{2^{d+s-1}}(s)}$$

равномерно по всем $x_1, \ldots, x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $s \in \{1, \ldots, k\}$ и $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$.

Поскольку в силу (14) для всех $s \in \{1, \ldots, k\}$ и $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$ выполнено $w_j^{\vec{x}}(s) \geqslant cn$ для некоторого $c > 0$, по формуле Стирлинга найдется такая константа $\tilde{c} > 0$, что для всех тех же наборов переменных

$$\left|\left(C_{w_j'(s)+\delta_j(s)+\varepsilon_j(s)}^{\left[\alpha w_j'(s)\right]+\alpha\delta_j(s)+t_j(s)} \Big/ C_{w_j'(s)+\delta_j(s)}^{\left[\alpha w_j'(s)\right]+\alpha\delta_j(s)+t_j(s)}\right) - \beta^{-\varepsilon_j(s)}\right| \leqslant \tilde{c}\frac{f(n)}{n}.$$

Более того, по формуле Стирлинга существует такое $M > 0$, что для всех $w \in [cn, n] \cap \mathbb{N}$ имеем

$$\left|\frac{w!}{\sqrt{2\pi w}\frac{w^w}{e^w}} - 1\right| \leqslant \frac{M}{w}.$$

Разложение Тейлора дает существование такого $c_1 > 0$, что для всех $s \in \{1, \ldots, k\}$, $w \in [cn, n]$, $|y| \leqslant f(n)$

$$\left|\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+y}} - 1\right| \leqslant c_1\left|\frac{y}{w}\right| \leqslant \frac{c_1}{c}\cdot\frac{f(n)}{n}.$$

Заметим, что в силу определения величин $x_1, \ldots, x_{2^d}$ и $y_1, \ldots, y_{2^d}$ справедливы равенства $\sum_{j=1}^{2^d} x_j = \sum_{j=1}^{2^d} y_j = 0$, а, следовательно, $\sum_{j=1}^{2^d} r_j = 0$ в силу (6) и $\sum_{j=1}^{2^{d+s-1}} \delta_j(s) = \sum_{j=1}^{2^{d+s-1}} \varepsilon_j(s) = 0$ для любого $s \in \{1, \ldots, k\}$ в силу определения величин $\delta_j(s)$ и $\varepsilon_j(s)$. Наконец,

$$C_{w_j'(s)+\delta_j(s)}^{\left[\alpha w_j'(s)\right]+\alpha\delta_j(s)+t_j(s)} = \\ = \sqrt{\frac{w_j'(s)+\delta_j(s)}{2\pi\left(\left[\alpha w_j'(s)\right]+\alpha\delta_j(s)+t_j(s)\right)\left(w_j'(s)-\left[\alpha w_j'(s)\right]+\beta\delta_j(s)-t_j(s)\right)}} \times \\ \times \exp\left(H(\alpha)\left(w_j'(s)+\delta_j(s)\right) + H'(\alpha)\frac{\left[\alpha w_j'(s)\right]-\alpha w_j'(s)+t_j(s)}{w_j'(s)+\delta_j(s)}\left(w_j'(s)+\delta_j(s)\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}H''(\alpha)\left(\frac{\left[\alpha w_j'(s)\right]-\alpha w_j'(s)+t_j(s)}{w_j'(s)+\delta_j(s)}\right)^2\left(w_j'(s)+\delta_j(s)\right) + O\left(\frac{(f(n))^3}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha\beta w_j'(s)}} \exp\left(H(\alpha)w_j'(s) + H(\alpha)\delta_j(s) + H'(\alpha)\left(\left[\alpha w_j'(s)\right] - \alpha w_j'(s) + t_j(s)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}H''(\alpha)\frac{\left(\left[\alpha w_j'(s)\right] - \alpha w_j'(s) + t_j(s)\right)^2}{w_j'(s)} + O\left(\frac{(f(n))^3}{n^2}\right)\right) =$$

$$= e^{H(\alpha)\delta_j(s)} C_{w_j'(s)}^{\left[\alpha w_j'(s)\right]+t_j(s)} \left(1 + O\left(\frac{(f(n))^3}{n^2}\right)\right)$$

равномерно по всем $x_1, \ldots, x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $s \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{d+s-1}\}$ и $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$.

Поэтому

$$C_{w_1'(s)+\delta_1(s)+\varepsilon_1(s)}^{\left[\alpha w_1'(s)\right]+\alpha\delta_1(s)+t_1(s)} \ldots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+\delta_{2^{d+s-1}}(s)+\varepsilon_{2^{d+s-1}}(s)}^{\left[\alpha w_{2^{d+s-1}}'(s)\right]+\alpha\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)} =$$

$$= \beta^{-\sum_{j=1}^{2^{d+s-1}} \varepsilon_j(s)} C_{w_1'(s)+\delta_1(s)}^{\left[\alpha w_1'(s)\right]+\alpha\delta_1(s)+t_1(s)} \ldots \times$$

$$\times C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)+\delta_{2^{d+s-1}}(s)}^{\left[\alpha w_{2^{d+s-1}}'(s)\right]+\alpha\delta_{2^{d+s-1}}(s)+t_{2^{d+s-1}}(s)} \left(1 + O\left(\frac{f(n)}{n}\right)\right) =$$

$$= e^{H(\alpha)\sum_{j=1}^{2^{d+s-1}} \delta_j(s)} C_{w_1'(s)}^{\left[\alpha w_1'(s)\right]+t_1(s)} \ldots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)}^{\left[\alpha w_{2^{d+s-1}}'(s)\right]+t_{2^{d+s-1}}(s)} \left(1 + O\left(\frac{(f(n))^3}{n^2}\right)\right) =$$

$$= C_{w_1'(s)}^{\left[\alpha w_1'(s)\right]+t_1(s)} \ldots C_{w_{2^{d+s-1}}'(s)}^{\left[\alpha w_{2^{d+s-1}}'(s)\right]+t_{2^{d+s-1}}(s)} \left(1 + O\left(\frac{(f(n))^3}{n^2}\right)\right) \quad (16)$$

равномерно по всем $x_1, \ldots, x_{2^d} \in [-f(n), f(n)]$, $s \in \{1, \ldots, k\}$ и $(t_1(1), \ldots, t_{2^d}(1), \ldots, t_1(k), \ldots, t_{2^{d+k-1}}(k)) \in T$. Тем самым лемма доказана, поскольку множество T и все величины в правой части не зависят от $\vec{x}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 15-01-03530.

Литература

1. *Erdős P., Rényi A.* On random graphs. I // Publ. Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 290–297.
2. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1960. V. 5. P. 17–61.
3. *Bollobás B.* Random graphs. Second edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. V. 73 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. P. xviii+498.
4. *Janson S., Łuczak T., Rucinski A.* Random graphs. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. New York : Wiley-Interscience, 2000. P. xii+333.
5. *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. Москва : МЦНМО, 2011. 136 с.
6. *Колчин В.Ф.* Случайные графы. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва : Физматлит, 2000.
7. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. Москва : БИНОМ, 2007.
8. *Bollobás B.* Threshold functions for small subgraphs // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1981. V. 90, N 2. P. 197–206.
9. *Ruciński A., Vince A.* Balanced graphs and the problem of subgraphs of random graphs // Proceedings of the sixteenth Southeastern international conference on combinatorics, graph theory and computing. 1985. V. 49. P. 181–190.
10. *Буркин А.В., Жуковский М.Е.* Малые подграфы и их расширения в случайном дистанционном графе // Матем. сборник. 2018. Т. 209, № 2. С. 22–46.

11. *Spencer J.* Threshold functions for extension statements // J. Combin. Theory Ser. A. 1990. V. 53, N 2. P. 286–305.
12. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // УМН. 2001. Т. 56, № 1. С. 107–146.
13. *Райгородский А.М.* Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов // Матем. сборник. 2005. Т. 196, № 1. С. 123–156.
14. *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. Москва : МЦНМО, 2007.
15. *Raigorodskii A.M.* Around borsuk's conjecture // J. of Math. Sci. 2008. V. 154, N 4. P. 604–623.
16. *Raigorodskii A.M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinatorica. 2012. V. 32, N 1. P. 111–123.

References

1. *Erdős P., Rényi A.* On random graphs. I. Publ. Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 290–297.
2. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1960. V. 5. P. 17–61.
3. *Bollobás B.* Random graphs. Second edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. V. 73 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. P. xviii+498.
4. *Janson S., Łuczak T., Rucinski A.* Random graphs. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. New York : Wiley-Interscience, 2000. P. xii+333.
5. *Raigorodskii A.M.* Models of random graphs. Moscow : MCCME, 2011. 136 p. (in Russian).
6. *Kolchin V.F.* Random graphs. Moscow : Fizmatlit, 2000 (in Russian).
7. *Alon N., Spencer J.* Probabilistic method. Moscow : BINOM, 2007 (in Russian).
8. *Bollobás B.* Threshold functions for small subgraphs. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1981. V. 90, N 2. P. 197–206.
9. *Ruciński A., Vince A.* Balanced graphs and the problem of subgraphs of random graphs. Proceedings of the sixteenth Southeastern international conference on combinatorics, graph theory and computing. 1985. V. 49. P. 181–190.
10. *Burkin A.V., Zhukovskii M.E.* Small subgraphs and their extensions in a random distance graph. Sbornik : Mathematics. 2018. V. 209, N 2. P. 22–46 (in Russian).
11. *Spencer J.* Threshold functions for extension statements. J. Combin. Theory Ser. A. 1990. V. 53, N 2. P. 286–305.
12. *Raigorodskii A.M.* Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces. Russian Mathematical Surveys. 2001. V. 56, N 1. P. 107–146 (in Russian).
13. *Raigorodskii A.M.* The Erdős-Hadwiger problem and the chromatic numbers of finite geometric graphs. Sbornik: Mathematics. 2005. V. 196, N 1. P. 123–156 (in Russian).
14. *Raigorodskii A.M.* Linear-algebraic method in combinatorics. Moscow : MCCME, 2007 (in Russian).
15. *Raigorodskii A.M.* Around borsuk's conjecture. J. of Math. Sci. 2008. V. 154, N 4. P. 604–623.
16. *Raigorodskii A.M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$. Combinatorica. 2012. V. 32, N 1. P. 111–123.

Поступила в редакцию 04.02.2019