УДК 530.145

В. С. Булыгин

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

О нарушении соотношения неопределённости «энергия–время» при движении частицы в ускоряющем поле

Показано, что в процессе движения длительность волнового пакета может стать короче, чем рассчитанная по соотношению неопределённостей «энергия–время».

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, принципы неопределённости в квантовой механике.

V. S. Bulygin

Moscow Institute of Physics and Technology

About violation of the time–energy uncertainty relation in a task of driving electron impulse in the accelerating field

It is shown that in the course of driving duration of a package can become shorter, than calculated on an Uncertainty Relation Time–Energy.

Key words: Schrödinger Equation, the Principles of Indeterminacy in a Quantum Mechanics.

В статье [1] путём решения уравнения Шрёдингера для движения электронного пакета в произвольном ускоряющем потенциале с заданной волновой функцией на границе (эмиссионная задача) было показано, что длительность электронного пакета с энергией E в некоторых случаях может стать меньшей $\hbar/E$, т. е. не удовлетворять соотношению неопределённости «энергия–время». Проиллюстрируем этот результат на примере не граничной, а традиционной для квантовой механики начальной задаче.

Пусть частица массой m движется вдоль оси x в однородном ускоряющем поле с потенциальной энергией $U(x) = -Fx$, $(F = \text{const} > 0)$. Её распространение описывается уравнением Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}(x)\,\psi(x,t) \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$\hat{H}(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - Fx \tag{2}$$

и начальным состоянием (при $t = 0$):

$$\psi(x,0) = \psi(x,0) = \left(2\pi\sigma_{x_0}^2\right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_{x_0}^2}\right), \tag{3}$$

где $\sigma_{x_0}^2 = \overline{(\Delta x)^2}$ — квадрат среднеквадратичной пространственной ширины $|\psi(x,0)|^2$. Полная энергия E частицы в потенциальном поле $U(x)$ сохраняется и будет, с учётом (2), равна

$$E = \int \psi^*(x,t)\, \hat{H}\, \psi(x,t)\, dx = \frac{1}{2m} \int \psi^*(x,t)\, \hat{p}^2\, \psi(x,t)\, dx - F \int \psi^*(x,t)\, \hat{x}\, \psi(x,t)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2m} \cdot \overline{p^2(t)} - F \cdot \overline{x(t)} = \frac{1}{2m}\left(\overline{p^2(t)} - \overline{p(t)}^2\right) + \frac{\overline{p(t)}^2}{2m} - F \cdot \overline{x(t)} =$$
$$= \frac{\overline{(\Delta p)^2}}{2m} + \frac{(Ft)^2}{2m} - F \cdot \frac{Ft^2}{2m} = \frac{\overline{(\Delta p)^2}}{2m} = \frac{\hbar^2}{8m\sigma_{x_0}^2}\,, \tag{4}$$

поскольку [2, задача 7.36 (б)]

$$\overline{x(t)} = \frac{Ft^2}{2m}, \quad \overline{p(t)} = Ft, \quad \overline{(\Delta p)^2} = \overline{\left(p(t) - \overline{p(t)}\right)^2} = \frac{\hbar^2}{4\sigma_{x_0}^2}\,,$$

т. е. среднеквадратичное отклонение импульса частицы в этих условиях не зависит от времени и определяется начальной шириной волнового пакета σ_{x_0} .

Среднеквадратичная пространственная ширина $\sigma_x(t)$ волнового пакета увеличивается по закону [2, задача 7.36 (б)]

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\sigma_{x_0}^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma_{x_0}^2}} = \frac{\hbar\, t}{2m\sigma_{x_0}} \sqrt{1 + \frac{4b^2 2\sigma_{x_0}^4}{\hbar^2 t^2}} = \frac{\hbar\, t}{2m\sigma_{x_0}} \sqrt{1 + \left(\frac{t_*}{t}\right)^2}, \tag{5}$$

где характерное время

$$t_* = \frac{2m}{\hbar}\, \sigma_{x_0}^2,$$

и при $t \gg t_*$ пространственная ширина будет линейно меняться со временем:

$$\sigma_x(t) = \frac{\hbar}{2m\sigma_{x_0}}\, t \qquad \text{при } t \gg t_*\,.$$

Так как в данном случае средняя скорость $\overline{v(t)} = \overline{p(t)}/m = Ft/m$ также линейно зависит от времени, то временна́я ширина пакета, равная времени τ прохождения волновым пакетом $|\psi(x,t)|^2$ расстояния, равного своей пространственной среднеквадратичной ширине $\sigma_x(t)$, будет при $t \gg t_*$ стремиться к постоянному пределу:

$$\tau = \frac{\sigma_x(t)}{\overline{v(t)}} = \frac{\hbar}{2\sigma_{x_0} F} \qquad \text{при } t \gg t_*, \tag{6}$$

и при $2\sigma_{x_0}F > E = \hbar^2/(8m\sigma_{x_0}^2)$ (см. (4)), т. е. при

$$F > \frac{E}{2\sigma_{x_0}} = \frac{\hbar^2}{16m\sigma_{x_0}^3} \quad \text{или} \quad \sigma_{x_0} > \left(\frac{\hbar^2}{16mF}\right)^{1/3} \tag{7}$$

длительность τ волнового пакета $|\psi(x,t)|^2$ с энергией E будет удовлетворять неравенству

$$\tau < \frac{\hbar}{E}\,, \tag{8}$$

и, следовательно, не будет подчиняться соотношению неопределённостей «энергия–время».

Этот же результат получается и при подсчёте временно́й дисперсии $|\psi(x,t)|^2$ при $t \to \infty$ и $x \to \infty$. Функция Грина для уравнения Шрёдингера (1) с гамильтонианом (2) равна [2, задача 7.24]

$$G(x,t,x') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\, \exp\!\left(-\frac{iF^2}{24m\hbar}\, t^3 + \frac{iF}{2\hbar}\, tx + \frac{im}{2\hbar\, t}\, x^2\right) \cdot \exp\left[\frac{im}{2\hbar\, t}\, x'^2 - \frac{im}{\hbar\, t}\left(x - \frac{Ft^2}{2m}\right) x'\right],$$

что позволяет записать для решения уравнения Шрёдингера с начальным условием (3):

$$|\psi(x,t)|^2 = \left| \int G(x,t,x')\,\psi(x',0)\,dx' \right|^2 =$$

$$= \frac{m}{(2\pi)^{3/2}\hbar\sigma_{x_0}t} \cdot \left| \int \exp\left[\left(-\frac{1}{4\sigma_{x_0}^2} + \frac{im}{2\hbar\, t} \right) x'^2 - i\,\frac{mx'}{\hbar\, t}\left(x - \frac{Ft^2}{2m} \right) \right] dx' \right|^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m\sigma_{x_0}}{\hbar\, t\sqrt{1+\frac{t_*^2}{t^2}}} \cdot \exp\left(-\frac{2m^2\sigma_{x_0}^2}{\hbar^2 t^2\left(1+\frac{t_*^2}{t^2}\right)} \cdot \left(x - \frac{Ft^2}{2m} \right)^2 \right),$$

временна́я часть которого при $t \gg t_*$ пропорциональна выражению

$$|\psi(x,t)|^2 :: \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{2m^2\sigma_{x_0}^2 x^2}{\hbar^2 t^2} - \frac{F^2\sigma_{x_0}^2}{2\hbar^2}\, t^2 \right),$$

временны́е моменты которого определяются интегралами [3, формула 3.471.9]

$$m_n = \int\limits_0^\infty t^n\,|\psi(x,t)|^2\,dt :: \int\limits_0^\infty t^{n-1}\exp\left(-\frac{2m^2\sigma_{x_0}^2 x^2}{\hbar^2}\frac{1}{t^2} - \frac{F^2\sigma_{x_0}^2}{2\hbar^2}\,t^2 \right) dt = \left[{t=\sqrt{u}\,, \atop dt::du/\sqrt{u}} \right] ::$$

$$:: \int\limits_0^\infty u^{\frac{n}{2}-1}\cdot\exp\left(-\frac{2m^2\sigma_{x_0}^2 x^2}{\hbar^2}\,\frac{1}{u} - \frac{F^2\sigma_{x_0}^2}{2\hbar^2}\,u \right) du :: \left(\frac{2mx}{F} \right)^{n/2} K_{n/2}\left(\frac{2mF\sigma_{x_0}^2}{\hbar^2}\,x \right), \qquad (9)$$

где $K_{n/2}(z)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя 3-го рода), имеющая следующую асимптотику при большом значении аргумента z [3, формула 8.451.6]:

$$K_{n/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\left[1 + \frac{n^2-1}{8z} + O\left(z^{-2}\right) \right] :: 1 + \frac{n^2-1}{8z} + O\left(z^{-2}\right),$$

откуда ($z = \frac{2mF\sigma_{x_0}^2}{\hbar^2}\,x$)

$$m_0 :: K_0(z) :: 1 - \frac{1}{8z} + O\left(x^{-2}\right),$$

$$m_1 :: \sqrt{\frac{2mx}{F}}K_{1/2}(z) :: \sqrt{\frac{2mx}{F}}\left[1 + O\left(x^{-2}\right) \right],$$

$$m_2 :: \frac{2mx}{F}\,K_1(z) :: \frac{2mx}{F}\left[1 + \frac{3}{8z} + O\left(x^{-2}\right) \right],$$

и среднеквадратичная длительность квантового волнового пакета будет даваться выражением

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2} = \sqrt{\frac{2mx}{F}\left[\frac{1+\frac{3}{8z}+O\left(x^{-2}\right)}{1-\frac{1}{8z}+O\left(x^{-2}\right)} - \left(1 + \frac{1}{4z} + O\left(x^{-2}\right) \right) \right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{2mx}{4Fz}\left[1+O\left(x^{-3}\right)\right]} = \sqrt{\frac{mx}{2Fz}}\left[1+O\left(x^{-3}\right)\right] = \frac{\hbar}{2\sigma_{x_0}F} \qquad (10)$$

при $x \sim t^2 \to \infty$. Выражение (10) совпадает с длительностью (6) квантового волнового пакета, полученной косвенным путём, и которая при выполнении условий (7) будет меньше длительности, получаемой из соотношения неопределённостей «энергия–время».

Полученный результат не должен вызывать удивления, так как соотношение неопределённости «энергия–время» является только оценкой (см. [4]) в отличие от строгого неравенства, например, в соотношении неопределённости «координата–импульс»:

$$\sigma_x\sigma_p \geqslant \frac{\hbar}{2}, \qquad (11)$$

где $\sigma_x^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}$ и $\sigma_p^2 = \overline{(p_x-\overline{p_x})^2}$, так как физическим переменным в квантовой механике соответствуют самосопряжённые (эрмитовы) операторы с действительными собственными значениями (которые равны возможным значениям соответствующей физической величины), а оператора времени в квантовой механике не существует [4].

П. А. М. Дирак в первом издании «Основ квантовой механики» [5] 1932 г. попытался последовательно провести понятие «квантовомеханического состояния» в 4-мерном пространстве–времени Минковского, где пространственные и временна́я координаты имеют одинаковую геометрическую природу и являются равноправными, однако впоследствии был вынужден отказаться от этой точки зрения и во втором издании [6] (англ. издание 1935 г.) Дирак уже отмечал, что «*понятие „состояния" в его нерелятивистском смысле* [т. е. с временем, выделенным как отдельный параметр t] *в такой степени способствует ясности изложения, что поневоле начинаешь подозревать, не нуждаются ли основные идеи современной квантовой механики в серьёзной переделке как раз в этом пункте, и не будет ли более совершенная теория в лучшем согласии с тем изложением, которое дано здесь, нежели с тем изложением, которое стремится повсюду сохранить релятивистский смысл „состояния"*».

Координате и соответствующей проекции импульса в квантовой механике сопоставляются операторы $\hat{x} = x$ и $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ с коммутатором $[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$; с математически строгим доказательством неравенства (11) на основе этих операторов и их коммутатора можно познакомится, например, в [7, § 16].

Результаты настоящей работы были частично изложены в [8].

Литература

1. *Булыгин В.С.* Эволюция квантового пакета в стационарном ускоряющем потенциале // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 1. С. 12–30.
2. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 648 с.
3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 1100 с.
4. *Воронцов Ю.И.* Соотношение неопределённости энергия – время измерения // УФН 1981. Т. 133, вып. 2. С. 351–365.
5. *Дирак П.А.М.* Основы квантовой механики / пер. М. П. Бронштейна; под ред. Д.Д. Иваненко. Москва–Ленинград : Государственное технико-теоретическое издательство, 1932. 323 с.
6. *Дирак П.А.М.* Основы квантовой механики / пер. под ред. М.П. Бронштейна. Ленинград–Москва : ОНТИ НКПТ СССР. Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. 320 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Серия: «Теоретическая физика». Т. III. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. 752 с.
8. *Булыгин В.С.* О соотношении неопределённостей «энергия–время» в кинематических задачах // Сб. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть II. Общая и прикладная физика. Труды 50-й научн. конф. МФТИ. Москва–Долгопрудный : 2007. С. 119–120.

References

1. *Bulygin V.S.* Evolution of a Quantum Package in the stationary accelerating potential. Proceedings of MIPT. 2020. V. 12, N 1 P. 12–30. (in Russian).

2. *Galitsky V.M., Karnakov B.M., Kogan V.I.* Tasks of a Quantum Mechanics. Moscow : Nauka. GRFML, 1981. 648 p. (in Russian).

3. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of integrals, series and products. Moscow : GRFML, 1962. 1100 p. (in Russian).

4. *Vorontsov Yu.I.* The uncertainty relation between energy and time of measurement. UFN. 1981. V. 133, N. 2. P. 351–365. (in Russian).

5. *Dirac P.A.M.* The Principles of Quantum Mechanics. Moscow–Leningrad : GTTI, 1932. 323 p. (in Russian).

6. *Dirac P.A.M.* The Principles of Quantum Mechanics. Leningrad–Moscow : ONTI NKPT SSSR. GRFML, 1937. 320 p. (in Russian).

7. *Landau L.D., Lifschitz E.M.* Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory). Ser.: «Theoretical Physics». V. III. Moscow : Nauka. GRFML, 1974. 752 p. (in Russian)

8. *Bulygin V.S.* About an Indeterminacy Relation «Energy–Time» in Kinematic Tasks. Coll. Modern Problems of Fundamental and Applied Sciences. Part II. General and Applied Physics. Proc. of the 50th Scientific Conf. of MIPT. Moscow–Dolgoprudny : 2007. P. 119–120. (in Russian).

Поступила в редакцию 10.09.2019