Введение в физику металлов и сверхпроводимость

Валерий Владимирович Рязанов

Лекция 5

Функционал Гинзбурга-Ландау
Уравнения Гинзбурга-Ландау
Эффекты близости
Критическое поле и критический ток тонкой пленки.
Промежуточное и смешанное состояния.
Энергия SN-границы

Уравнения Гинзбурга-Ландау

На Лекции 4 получили для разности плотностей энергии Гиббса $g_s(r)$- g_n :

$$g_s(r)-g_n=\alpha|\Psi|^2(r)+(\beta/2)|\Psi|^4(r)-BH+B^2/(2\mu_0)+[1/(4m)]\left|-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi\right|^2 \quad \text{(см 4.40)}$$

Функционал ГЛ (Полная свободная энергия Гиббса сверхпроводника):

$$G_s=G_n+\int dV[\alpha|\Psi|^2+(\beta/2)|\Psi|^4+(1/4m)|-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi|^2+\underbrace{(\mathrm{rot}\,A)^2}_{B^2}/(2\mu_0)-\underbrace{(\mathrm{rot}AH_0)}_{BH_0}] \quad (5.1)$$

G_n - энергия Гиббса нормального состояния; α, β – коэфф. разложения;

Чтобы получить уравнения ГЛ надо найти min функционала ГЛ по *Ψ, Ψ^* и A*:

$$\delta_\Psi G_s=0; \qquad \delta_{\Psi^*}G_s=0; \qquad \delta_A G_s=0$$

Первое уравнение ГЛ

Минимизация функционала путем варьирования по Ψ^*: $\delta_{\Psi^*}G_s=0$ →

$$\delta_{\Psi^*}G_s=\int dV\{\delta_{\Psi^*}[\alpha(\Psi\Psi^*)+(\beta/2)(\Psi\Psi^*)^2+(1/4m)\delta_{\Psi^*}[(i\hbar\nabla\Psi^*-2eA\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi)]\}=$$

поскольку $|\Psi|^2=\Psi\Psi^*$, $|\Psi|^4=(|\Psi|^2)^2$, $|-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi|^2=(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi)(i\hbar\nabla\Psi^*-2eA\Psi^*)$

$$=\int dV[\alpha\Psi\delta\Psi^*+\beta|\Psi|^2\Psi\delta\Psi^*+(1/4m)(i\hbar\nabla\delta\Psi^*-2eA\delta\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi)] \Rightarrow \quad (5.2)$$

вынести $\delta\Psi^*$ за квадратные скобки мешает только член $i\hbar\nabla\delta\Psi^*$

Первое уравнение Гинзбурга-Ландау

Покажем, что

$$\int dV[(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi)\nabla\delta\Psi^*] = -\int dV[\delta\Psi^*\,\nabla(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi)]+\oint\!\!\!\oint_S dS[\delta\Psi^*(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi)]$$

Обозначим вектор скорости $(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi) = V$ (5.3)

$\nabla(\delta\Psi^* V) = \delta\Psi^*\nabla V + V\,\nabla\delta\Psi^*$, поскольку $\nabla(\varphi\mathbf{A}) = \mathrm{div}\,(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\,\mathrm{div}\mathbf{A}+\mathbf{A}\,\mathrm{grad}\varphi$

тогда $\int dV\,\nabla\delta\Psi^* V = -\int \delta\Psi^*\nabla V\,dV + \int \nabla(\delta\Psi^* V)dV$

но по теореме Гаусса $\int \mathrm{div}(\delta\Psi^* V)dV = \oint\!\!\!\oint_S \delta\Psi^* V\,d\mathbf{S}$

Из (5.2)

$$\delta_{\Psi^*}G_s = \int dV[\alpha\Psi\delta\Psi^*+\beta|\Psi|^2\Psi\delta\Psi^*+(1/4m)(i\hbar\nabla\delta\Psi^*-2eA\delta\Psi^*)\underbrace{(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi)}_{V}] =$$

$$= \int dV[\alpha\Psi\delta\Psi^*+\beta|\Psi|^2\Psi\delta\Psi^*+(1/4m)(i\hbar\nabla\delta\Psi^*\,V-2eA\delta\Psi^*\,V)] =$$

$$= \int dV[\alpha\Psi\delta\Psi^*+\beta|\Psi|^2\Psi\delta\Psi^*+(1/4m)(-i\hbar\nabla V-2eA\,V)\,\delta\Psi^*] + (1/4m)\,i\hbar\oint\!\!\!\oint_S V\,\delta\Psi^* dS=$$

$$= \int dV[\alpha\Psi+\beta\,\Psi|\Psi|^2+(1/4m)(-i\hbar\nabla-2eA)\,V\,]\delta\Psi^* + (1/4m)\,i\hbar\oint\!\!\!\oint_S V\,\delta\Psi^* dS=$$

$$=\int dV[\alpha\Psi+\beta\,\Psi|\Psi|^2+(1/4m)(-i\hbar\nabla-2eA)^2\Psi]\delta\Psi^* - (1/4m)\,i\hbar\oint\!\!\!\oint_S(i\hbar\nabla\Psi+2eA\Psi)\,\delta\Psi^* dS$$

Первое уравнение Гинзбурга-Ландау

Таким образом, условие min функционала ГЛ по Ψ^***:** $\delta_{\Psi^*}G_s = 0$ $\rightarrow$

$$\delta_{\Psi^*}G_s =$$

$$\int dV[\alpha\Psi+\beta\Psi|\Psi|^2+(1/4m)(-i\hbar\nabla-2eA)^2\Psi]\delta\Psi^* - (1/4m)\,i\hbar\oint_S(i\hbar\nabla\Psi+2eA\Psi)\,\delta\Psi^* dS=0$$

При произвольных вариациях $\delta\Psi^*$ **все члены суммы (интеграла) должны =0:**

$$\alpha\Psi+\beta\Psi|\Psi|^2+(1/4m)(-i\hbar\nabla-2eA)^2\Psi=0; \qquad (\text{ГЛ Ia})$$

$(i\hbar\nabla\Psi+2eA\Psi)\,\mathbf{n}=0,$ где n - единичный вектор, нормальный к поверхности св-ка.

Ур.(*ГЛ Ia*) – **первое уравнение ГЛ+ гран. условие к нему**

Из (5.3) $(-i\hbar\nabla\Psi-2eA\Psi)=V$ – “сверхтекучая” скорость, т.е. гран условие означает, что отсутствует компонента сверхтока, перпендикулярная поверхности св-ка.

такое же уравнение верно и для Ψ^* ***!***

Второе уравнение Гинзбурга-Ландау

Чтобы получить второе уравнение ГЛ надо найти min функционала ГЛ по *A*:

$$\delta_A G_s = 0$$

Минимизация функционала путем варьирования по A : $\delta_A G_s = 0$ →

$$\delta_A G_s = \int dV\{\delta_A[\alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4] + (1/4m)\delta_A[(i\hbar\nabla\Psi^* - 2eA\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi)] + \delta_A[(\mathrm{rot}A)^2/(2\mu_0) - (\mathrm{rot}A H_0)]\} =$$

$$= \int dV\{(1/4m)(-2e\Psi^*\delta A)(-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi) + (1/4m)(i\hbar\nabla\Psi^* - 2eA\Psi^*)(-2e\Psi\delta A)] + (1/\mu_0)(\mathrm{rot}A - \mu_0 H_0)\,\mathrm{rot}\,\delta A\} = 0 \qquad (5.4)$$

Чтобы вынести за скобки δA преобразуем последний член. Используем соотношение:

$$a \times \mathrm{rot}\, b = b\,\mathrm{rot}\, a - \mathrm{div}\,[a\, b]$$

или $(\mathrm{rot}A - \mu_0 H_0)\,\mathrm{rot}\,\delta A = \delta A\,\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}A - \mu_0 H_0) - \mathrm{div}\,[(\mathrm{rot}A - \mu_0 H_0) \times \delta A]$

Таким образом, последний член ур.(5.4):

$$\int dV\{(1/\mu_0)(\mathrm{rot}A - \mu_0 H_0)\,\mathrm{rot}\,\delta A\} = \int dV\,[\delta A(1/\mu_0)\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,A - \delta A\,\mathrm{rot}\,H_0] - \oiint_S dS(1/\mu_0)(\mathrm{rot}A - \mu_0 H_0)\,\delta A$$

последний член равен нулю т.к. на поверхности поле задано, и $\delta A|_S = 0$

кроме того, $\mathrm{rot}\, H_0 = 0$**, т.к. это постоянное однородное заданное поле**

Второе уравнение Гинзбурга-Ландау

Таким образом, ур. (5.4) *:*

$\delta_A G_s = \int dV \{(1/4m)(-2e\Psi^*\delta A)(-i\hbar\nabla\Psi - 2eA\Psi) + (1/4m)(i\hbar\nabla\Psi^* - 2eA\Psi^*)(-2e\Psi\delta A)] +$

$+(1/\mu_0)(rotA - \mu_0 H_0)\, rot\, \delta A\} =$

$= \int dV\{(e/2m)(i\hbar\Psi^*\nabla\Psi + 2eA\Psi\Psi^* - i\hbar\Psi\nabla\Psi^* + 2eA\Psi\Psi^*) + (1/\mu_0)\, rotrotA\}\, \delta A =$

$= \int dV\{(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + (2e^2/m)|\Psi|^2 A + (1/\mu_0)\, rotrotA\}\, \delta A = 0$

Из ур. Максвелла: $(1/\mu_0)\, rotrotA = (1/\mu_0)\, rotB = j_s$

$$j_s = (1/\mu_0)\, rotB = -(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - (2e^2/m)|\Psi|^2 A \qquad \textit{ГЛ IIa}$$

Приведенный параметр порядка и длины теории ГЛ

Приведенный параметр порядка: $\psi = \Psi(r)/\Psi_0$, где $|\Psi_0|^2 = n_{s0} = -(\alpha/\beta)$;

$H_{cm}{}^2 = \beta n_{s0}{}^2/\mu_0 = \alpha^2/(\mu_0\beta)$;

Длина когерентности ГЛ: $\xi^2 = \hbar^2/(4m|\alpha|) = -\hbar^2/(4m\alpha)$; (5.5) $\xi(T) = \xi_0(1 - T/T_c)^{-1/2}$

$\lambda^2 = m/(\mu_0 n_{s0} e^2) = m\beta/(2\mu_0 e^2|\alpha|) = -m\beta/(2\mu_0 e^2\alpha)$, т.к. $n_{s0} = -(\alpha/\beta)$; $\lambda = \lambda_0(1 - T/T_c)^{-1/2}$

Параметр ГЛ: $\kappa = \lambda/\xi$; $\lambda\xi = \hbar\beta^{1/2}/(2\sqrt{2}|\alpha|\mu_0{}^{1/2}) \rightarrow \sqrt{2}H_{cm} = \Phi_0/(2\pi\mu_0\lambda\xi)$ (5.6)

$\Phi_0 = h/2e$

Полные и приведенные уравнения ГЛ

$\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + (1/4m)(i\hbar\nabla + 2eA)^2\Psi = 0;$ (ГЛ-1a)

или $\xi^2 [i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0$ (ГЛ-1b)

гран. условие с вакуумом (SI-*граница*): $[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]\,\mathbf{n}\,\psi = 0;$

гран. условие с норм. металлом (SN-*гран.*): $[i\nabla + (2\pi/\Phi_0)A]\,\mathbf{n}\,\psi = i\,\psi/b$

без вывода

где $\psi = \Psi(r)/\Psi_0$, $|\Psi_0|^2 = n_{s0} = -(\alpha/\beta)$ ***-значение в однородном случае***

$\xi^2 = \hbar^2/(4m|\alpha|) = -\hbar^2/(4m\alpha)$ ***- длина когерентности Гинзбурга-Ландау***

$(1/\mu_0)\,\mathrm{rot\,rot}\,A = -(i\hbar e/2m)(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - (2e^2/m)|\Psi|^2 A;$ (ГЛ-II)

или $\mathrm{rot\,rot}\,A = -i[\Phi_0/(4\pi\lambda^2)](\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2 A/\lambda^2$ (ГЛ-2a)

если $\psi = |\psi|\exp(i\theta) \leftrightarrow \mu_0 J_S \equiv \mathrm{rot\,rot}\,A = (|\psi|^2/\lambda^2)[(\Phi_0/2\pi)\nabla\theta - A]$ (ГЛ-2b)

сравни с “квазикласс. ур.”: $\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v}_s + 2e\mathbf{A}$

Калибровочное преобразование $A \rightarrow A' = A + \nabla\chi(r)$, $\theta \rightarrow \theta' = \theta + (e/\hbar)\nabla\chi(r)$

оставляет ГЛ-II без изменений $\psi \rightarrow \psi' = \psi\exp[i(2\pi/\Phi_0)\chi(r)]$

$\lambda^2 = m/(\mu_0 n_{s0} e^2) = m\beta/(2\mu_0 e^2|\alpha|) = -m\beta/(2\mu_0 e^2\alpha),$

$\Phi_0 = h/2e$ ***– квант магнитного потока***

Параметры теории ГЛ

Коэффициенты разложения:

$\alpha(T) = -\mu_0 H_{cm}^2(T)/|\Psi_0|^2(T) = -\mu_0 H_{cm}^2(T)/n_{s0}(T) \sim [1-(T/T_c)]$; $\boxed{\alpha(T) < 0}$

феноменологические выражения

$H_{cm}(T) \sim [1-(T/T_c)^2]$ $\sim [1-(T/T_c)]$ *вблизи* T_c

$n_{s0}(T) = |\Psi_0|^2(T) \sim [1-(T/T_c)^4]$ $\sim [1-(T/T_c)]$ *вблизи* T_c

$-\alpha/\beta = n_{s0} = |\Psi_0|^2$; $\beta = -\alpha(T)/n_{s0}(T) = \mu_0 H_{cm}^2(T)/n_{s0}^2(T)$; $\boxed{\beta > 0}$, **не завис от Т**

Характерные длины:

$\xi^2 = -\hbar^2/(4m\alpha)$; $\xi \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ - *длина когерентности Гинзбурга-Ландау*

$\lambda^2 = m/(\mu_0 n_{s0} e^2) = -m\beta/(\mu_0 e^2 \alpha)$; $\lambda \sim [1-(T/T_c)]^{-1/2}$ – глуб. *проникновения маг. поля*

Параметр Гинзбурга-Ландау: $\boxed{\kappa = \lambda / \xi}$

$\sqrt{2} H_{cm} = \Phi_0/(2\pi\mu_0\lambda\xi)$;   (5.6)

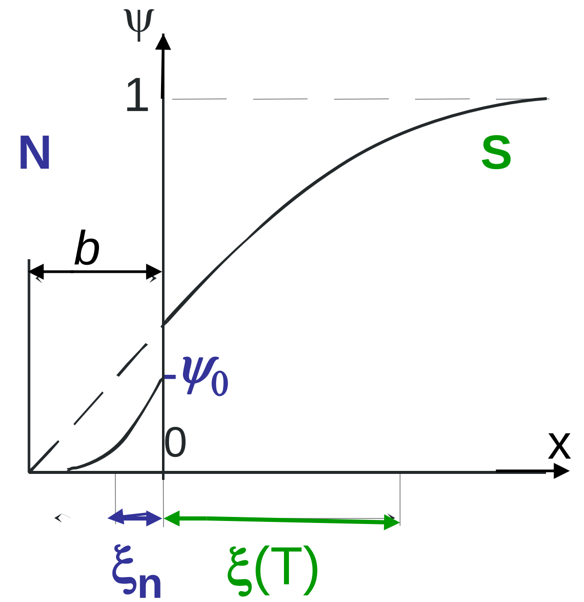
В грязном сверхпроводнике (***l*-длина пробега мала**)

$\xi_d = (\xi_{cl} l)^{1/2}$; $\lambda = \lambda_L(\xi_0 / l)^{1/2}$; $l \ll \xi_0$ *(см* (2.4))

для чистого случая   (без вывода)

Эффект близости на NS-границе

Покажем, что i) ξ(T)- характерная длина подавления сверхпроводимости и ii) вычислим ξ_n–характерную длину проникновения сверхпроводимости в нормальный металл



---

*В **S**-области при x >> ξ(T)* (из **ГЛ-1** ***для A****=0*):

$$n_{s0}=|\Psi_0|^2= -\alpha/\beta; \quad \psi=1$$

Все однородно, минимизируем плотность св. энерг. F

В области NS-границы раздела пространственно-неоднородная ситуация даже при A=0*:*

$$\xi^2= \hbar^2/(4m|\alpha|) = - \hbar^2/(4m\alpha)$$

$$\xi^2[i\,\nabla\,]^2\psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0 \quad (5.7a) \qquad \textit{из (ГЛ-1)b}$$

$$\nabla\psi\,\mathbf{n} = \psi/b$$

Одномерная задача $\psi=\psi(x)$: $\;-\xi^2\, d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0; \qquad d\psi/dx = \psi/b \qquad (5.7b)$

Для односвязного сверхпроводника: $\nabla\theta=0$, $\psi=\Psi(\mathbf{r})/\Psi_0$ - вещественная ф-ия.

$\psi(x)=1-f(x)$, *где* $f(x)<<1$. *Тогда:* $\xi^2 d^2f/dx^2-1+f(x)+(1-f(x))^3=0;$

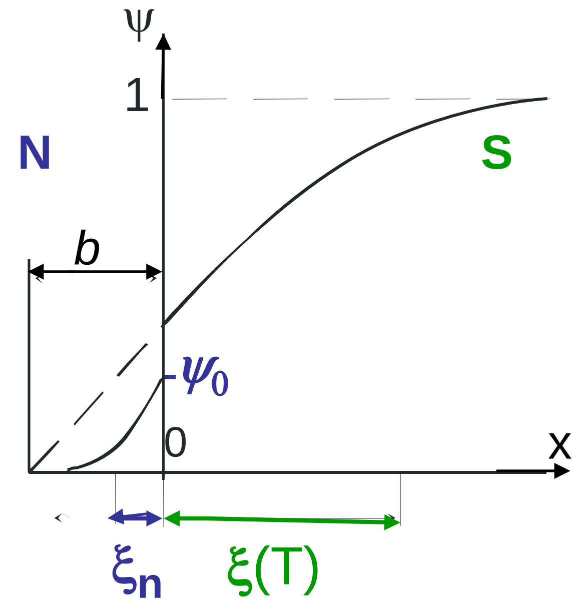
$(1-f(x))^3 \approx (1- f(x))(1- 2f(x)) \approx (1- 3f(x)) \leftrightarrow \quad \xi^2 d^2f/dx^2-2f(x) = 0;$

Решение: $f(x)= f_0 \exp[-\sqrt{2}\,(x/\xi)]; \qquad \psi(x)=1-f_0 \exp[-\sqrt{2}\,(x/\xi)] \quad (5.8)$

Наведенная сверхпроводимость в N вблизи SN-границы

Температурные флуктуации разрушают пары, “залетающие” в нормальный металл за время τ_{dph} *(время жизни пар):*

$\tau_{dph} \sim \hbar/\Delta E \sim \hbar/(k_B T)$; $k_B T$ – *“распаривающая” энергия*



$$\xi_N^d = \sqrt{D\tau_{dph}} = \sqrt{\frac{\hbar D}{2\pi k_B T}}$$ длина когерентности в грязном металле

*Предположим, что **N** –это сверхпроводник, но при **T** слегка большем T_{cn}, с небольшим (флуктуационным) параметром парядка* Ψ ***(поскольку появление пар в нормальном металле – это возникновение некоторого порядка)***

$\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + (1/4m)(i\hbar\nabla)^2\Psi = 0$; ***(ГЛ-1 для A**=0)* $\nabla\psi\ \mathbf{n} = \psi/b$ *(гран. усл.)*

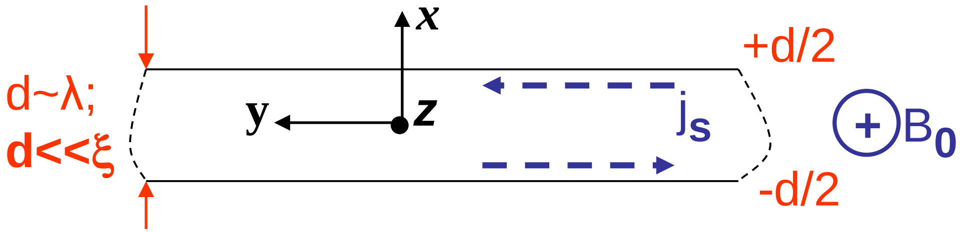
$\xi_n^2[i\nabla]^2\psi + \psi + \psi|\psi|^2 = 0$; $\xi_n^2 = \hbar^2/(4m\alpha_n)$ *или* $-\xi^2 d^2\psi/dx^2 + \psi + \psi^3 = 0$ (для **1D**-случая)

$\alpha(T) \sim -(1-T/T_c)$

$T \geq T_{cn} \leftrightarrow \alpha_n(T) \sim (T/T_{cn} - 1) > 0$; $\psi(x<0) \ll 1 \leftrightarrow -\xi^2 d^2\psi/dx^2 + \psi = 0$;

$\psi_N(x) = \psi_0 \exp[-(|x|/\xi_N)]$; $x=0$, $\psi_N = \psi_0$; $x \to -\infty$; $\psi_N = 0$. (5.9)

Распределение поля в тонкой пленке



Бесконечная сверхпроводящая пластина с тощиной d~λ , d<<ξ в параллельном магнитном поле

$\kappa=\lambda/\xi<<1$

Поле и параметр порядка меняется только по x (из симметрии)

Сверхпроводник –односвязный: $\nabla\theta=0$

$\psi=\Psi(\mathbf{r})/\Psi_0$ ***– вещественная функция***

d<<ξ ←→ $\nabla\psi\cong 0$ ***– параметр порядка однороден***

$\xi^2[(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi-\psi+\psi^3=0$ **(ГЛ I)** или $\underline{\psi^2=1-(2\pi\xi A/\Phi_0)^2}$ (5.10)

$\mu_0 J_s=d^2A_y/dx^2=(\psi^2/\lambda^2)A_y$ **(ГЛ II)** *ср.* $d^2A/dx^2=(1/\lambda^2)A$ ***(из ур. Лондонов)***

$\Psi=1$, ***т.к.*** d~λ>> ξ

Общее решение ГЛ II: $\mathbf{A}(x)=a\,ch(\psi x/\lambda)+b\,sh(\psi x/\lambda)$;

$\mathbf{B}(x)=d\mathbf{A}/dx=a\,(\psi/\lambda)\,sh(\psi x/\lambda)+b\,(\psi/\lambda)\,ch(\psi x/\lambda)$;

Подставляя $B(\pm d/2)=B_0=\mu_0H_0$ *получим* $a=0$; $b=(\mu_0H_0\lambda)/[\psi\,ch(\psi d/2\lambda)]$

Решение ГЛ II: $B(x)=(\mu_0H_0)\,ch(\psi x/\lambda)/ch[(\psi d/(2\lambda)]$

$A(x)=[(\mu_0H_0\lambda)/\psi]\,sh(\psi x/\lambda)/ch[(\psi d/(2\lambda)]$

Вблизи T_c, H_{cm} - ψ *–мало* ←→ $\psi d/(2\lambda)<<1$: $B=\mu_0H_0$; $A(x)=\mu_0H_0\,x$ (см. 2.7а -2.8а)

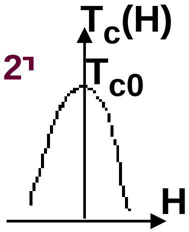
Критическое поле тонкой пленки

Подставим результат в ГЛ I (5.10) и найдем средний квадрат параметра порядка в пленке:

$$\frac{1}{d/2}\int_0^{d/2}\ldots dx \qquad \psi^2(x) = 1 - (2\pi\xi/\Phi_0)^2(\mu_0 H_0\, x)^2$$

$$\langle\psi^2\rangle = 1-(1/12)d^2(\mu_0 H_0)^2(2\pi\xi/\Phi_0)^2 = 1-(1/24)(H_0/H_{cm})^2(d/\lambda)^2,$$

Поскольку из (5.6) $\sqrt{2}H_{cm}=\Phi_0/(2\pi\mu_0\lambda\xi)$ ***или*** $(2\pi\xi\mu_0/\Phi_0)^2= 1/[2(H_{cm}\lambda)^2]$



Квадратичная зависимость подавления параметра порядка (величины, пропорциональной T_c) магнитным полем.

Определим критическое поле $H_К$, при котором зануляется параметр порядка:

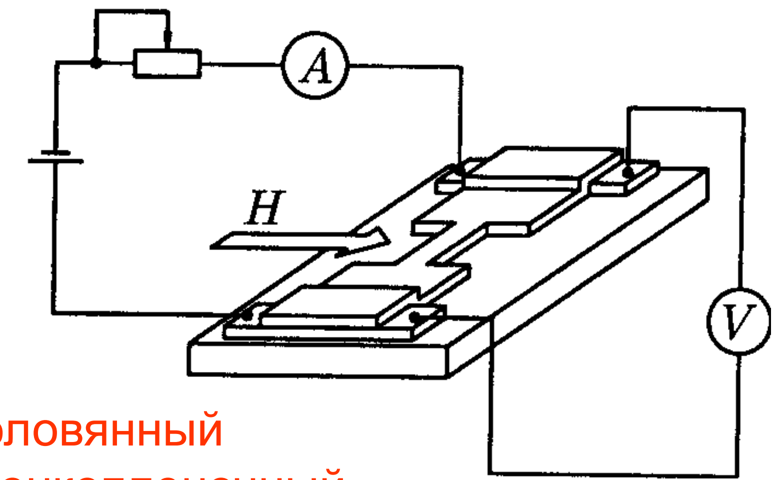
$$\psi^2 = 0 \text{ при } \boxed{H_к=2\sqrt{6}\,(\lambda/d)H_{cm}} \qquad (5.11)$$

При $d\sim\lambda \leftarrow\rightarrow H_к > H_{cm}$ поскольку нет проигрыша в энергии, связанного с выталкиванием поля.

Чем меньше d, тем больше $H_к$!

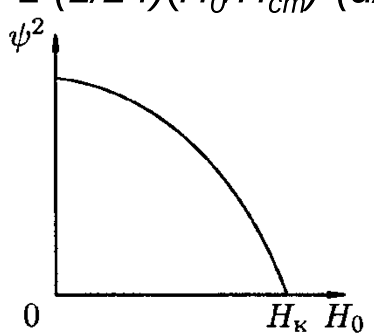
При $\lambda/d=10$ и $H_{cm} = 10^3$ Э (10^{-1} Т), $H_к \sim 40000$ Э (4 Т) !!!

Экспериментальное наблюдение критических полей тонких пленок



оловянный тонкопленочный мостик в параллельном поле

$\psi^2 = 1-(1/24)(H_0/H_{cm})^2(d/\lambda)^2$

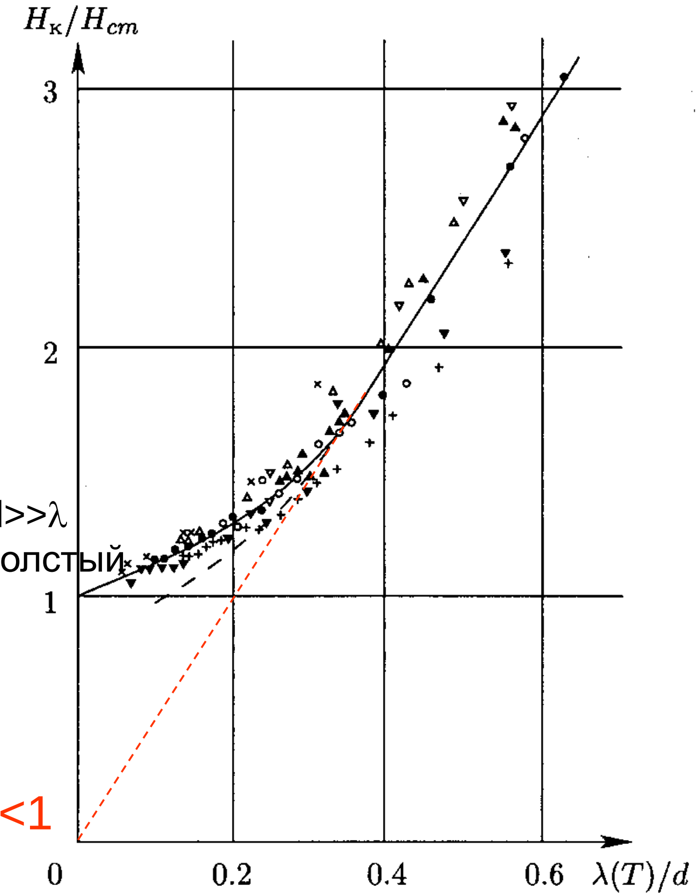


$H_к \sim \lambda/d$

при

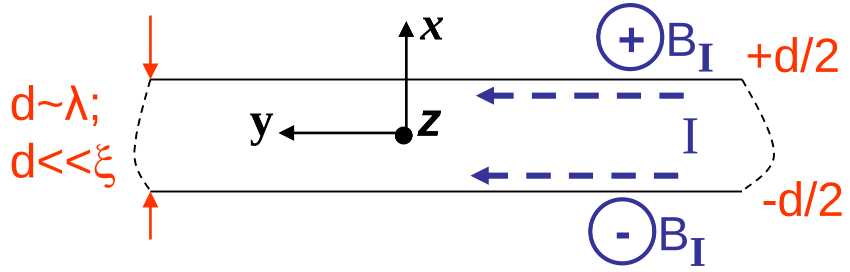
$\psi\, d/(2\lambda) \ll 1$

d>>λ
толстый



Н.В.Заварицкий (1951)

Критический ток тонкой пленки



Бесконечная сверхпроводящая пластина с толщиной $d\sim\lambda$, $d\ll\xi$ *с током вдоль пленки*

$$\xi^2[(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi^3 = 0 \quad \text{(ГЛ I)}$$

$$\mu_0 J_s = d^2A/dx^2 = (\psi^2/\lambda^2)A \quad \text{(ГЛ II)}$$

см (5.10)

Общее решение ГЛ II: $\mathbf{A}(x) = a\, ch(\psi x/\lambda) + b\, sh(\psi x/\lambda)$;

$$\mathbf{B}(x) = d\mathbf{A}/dx = a\,(\psi/\lambda)\, sh(\psi x/\lambda) + b\,(\psi/\lambda)\, ch(\psi x/\lambda);$$

Подставляя $B(\pm d/2) = \pm B_I$ *получим* $b=0$; $a=(B_I\lambda)/[\psi\, sh(\psi d/2\lambda)]$

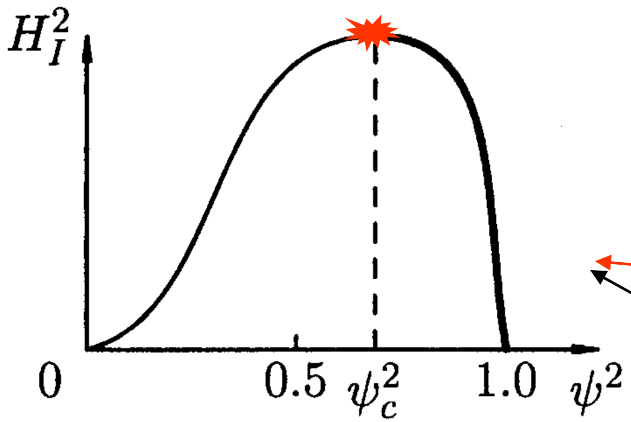
Решение ГЛ II: $B(x) = B_I\, sh(\psi x/\lambda)/sh[(\psi d/(2\lambda)]$ (5.12)

$$A(x) = [(\lambda B_I)/\psi]\, ch(\psi x/\lambda)/sh[(\psi d/(2\lambda)]$$

Вблизи T_c: ψ *–мало* $\leftrightarrow$ $\psi d/(2\lambda) \ll 1$: $ch \to 1$; $sh \to \psi d/(2\lambda)$: $A(x) = 2\lambda^2 B_I/(\psi^2 d)$

Постоянный векторный потенциал (постоянная плотность сверхтока) по толщине пленки

Критический ток распаривания ГЛ



Подставим $A(x) = 2\lambda^2 B_I/(\psi^2 d)$ в **(ГЛ I)**

$\xi^2[(2\pi/\Phi_0)A]^2\psi - \psi + \psi^3 = 0$ **(ГЛ I):**

$[2\lambda^2 H_I^2/(\psi^4 d^2)]\,(2\sqrt{2}\pi\mu_0\lambda\xi/\Phi_0)^2\psi = \psi - \psi^3$

Учитывая, что $\Phi_0/(2\sqrt{2}\pi\mu_0\lambda\xi) = H_{cm}$,

получим: $2\lambda^2 H_I^2/(d^2 H_{cm}^2) = \psi^4 - \psi^6$ (5.13)

ψ^2 от H_I^2 – функция неоднозначная:

Левая ветвь-неустойчива, поскольку при $H_I = 0$ ($I = 0$) нет причин зануляться парам. Сверхпроводимость прекращается при некоторой ***критической плотности*** ψ_c^2 достигаемой при H_I, соответствующей максимуму функции (*нет пар для больших H*):

$$d(H_I^2)/d(\psi^2) = 0;\ \text{т.е. при}\ \ 2(\psi^2) - 3(\psi^2)^2 = 0; \qquad \psi_c^2 = 2/3\ !$$

Подставим в (5.13): $(H_I)_{max} = [\sqrt{2}/(3\sqrt{3})]\,(d/\lambda)H_{cm}$ (5.14)

- зависимость от **d** обратная, чем для $H_к$ критического поля тонкой пленки!

$H_к = 2\sqrt{6}\,(\lambda/d)H_{cm}$ (ур.(5.11)). При **d** $<\lambda$: $H_к > H_{cm}$, тогда как $(H_I)_{max} < H_{cm}$.

Используя *(2.11),* ***вычислим критический ток*** $\mu_0 I_C/2 = B_I$; $I_c = 2(H_I)_{max}$ (в расчете на ед. ширины [А/м])!

Ток пропорцианален **d,** а критичесая плотность тока не зависит от **d** :

$$j_c = [2\sqrt{2}/(3\sqrt{3})]\,(H_{cm}/\lambda) \qquad (5.15)$$

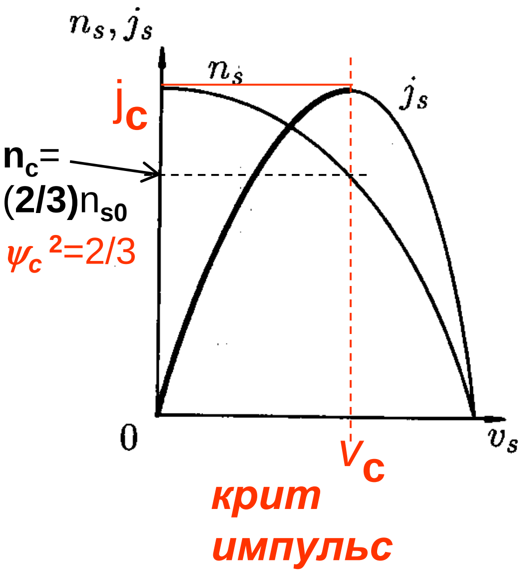
Критический импульс

$$j_{ГЛ} = [2\sqrt{2}/(3\sqrt{3})]\,(H_{cm}/\lambda) \qquad (5.15)$$

$$j_{ГЛ} \sim (H_{cm}/\lambda) \sim (1-T/T_c)/(1-T/T_c)^{-1/2} \sim (1-T/T_c)^{3/2} \qquad (5.16)$$

Критичесая плотность тока распаривания ГЛ не зависит от d !

Покажем, что она связана с достижением парами критического импульса.



Минимизируем “упрощенный” функционал ГЛ, добавив к плотности свободной энергии Гельмгольца кинетическую энергию сверхтока:

$$f_s(T,r) = f_n(T) + \alpha\,|\Psi|^2(r) + (\beta/2)\,|\Psi|^4(r)$$

$$f^*_s(T,r) = f_n(T) - |\alpha|\,n_s(r) + (\beta/2)\,n_s^2(r) + n_s(mv_s^2)/2$$

$$\delta_{ns} f^*_s = 0 = -|\alpha| + \beta n_s + (mv_s^2)/2$$

min при: $n_s = [|\alpha| - (mv_s^2)/2]/\beta = n_{s0} - (mv_s^2)/(2\beta)$

с другой стороны $j_s = n_s e v_s = n_{s0} e v_s - e(mv_s^3)/(2\beta)$

Сверхтекучий импульс является распаривающим фактором!

Не хватает пар при $v > v_c$, чтобы переносить ток больше j_c !