УДК 330.35.01:517.977.57

А. Ю. Меерсон[1], *А. П. Черняев*[2]

[1]Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
[2]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Задачи оптимального управления среднедушевым потреблением с уравнением связи для капиталовооруженности

Рассматривается оптимизационная задача максимизации интегральной дисконтированной полезности потребления с уравнением связи для капиталовооруженности, которое следует из модели экономического роста Солоу. Как известно, Солоу строил свою модель на основании производственной функции Кобба–Дугласа. Однако в математических моделях широко применяются и другие производственные функции. Статистические исследования показывают, что на практике и производственная функция Кобба–Дугласа, и другие известные производственные функции описывают зависимость народнохозяйственной производительности труда от капиталовооруженности лишь приближенно. Поэтому особый интерес представляют собой постановки задач оптимизации, в которых уравнение, следующее из модели Солоу, выступает, как уравнение связи, для произвольного характера зависимости народнохозяйственной производительности труда от капиталовооруженности. Именно в таком виде уравнение связи, следующее из модели Солоу, является удобным инструментом для экономических исследований. Выработка и изучение таких постановок и являются целью настоящей статьи.

Ключевые слова: модель Солоу, экономический рост, капиталовооруженность, среднедушевое потребление, предельная полезность, отвращение к риску.

A. Yu. Meerson[1], *A. P. Chernyaev*[2]

[1]Plekhanov Russian University of Economics
[2]Moscow Institute of Physics and Technology

Tasks of optimal control of per capita consumption with the equation of connection for the capital labor ratio

The optimization problem of maximizing the integral discounted utility of consumption with the equation of relation for the capital labor ratio which follows from the Solow economic growth model is considered. As you know, Solow builds his model on the basis of the Cobb-Douglas production function. However, other production functions are widely used in mathematical models. Statistical studies show that in practice both the Cobb–Douglas production function and other well-known production functions describe the dependence of national economic productivity on the capital labor ratio only approximately. Therefore, of particular interest is the formulation of optimization problems in which the equation following from the Solow model acts as a communication equation for the arbitrary nature of the dependence of the national economic productivity on capital labor ratio. It is in this form that the coupling equation, the following from the Solow model, is a convenient tool for economic research. The development and study of such productions are the goal of this paper.

Key words: Solow model, economic growth, capital labor ratio, per capita consumption, marginal utility, aversion to risk.

1. Введение

Модели экономического роста сразу стали популярны с самого момента своего возникновения благодаря своей универсальной применимости к различным объектам в различных экономических структурах. Особенно популярной стала модель Солоу [1, 2]. Выявленная этой моделью капиталовооруженность является очень важной экономической характеристикой и требует внимательного изучения. Различные обобщения этой модели роста свидетельствуют о повышенной актуальности экономической мысли в этом направлении. Цель статьи – выработка точных постановок задач оптимизации полезности потребления, но с уравнением связи для капиталовооруженности, которое следует из модели экономического роста Солоу. Как известно, Солоу строил свою модель на основании производственной функции Кобба–Дугласа. Однако в математических моделях широко применяются и другие производственные функции. Статистические исследования показывают, что на практике и производственная функция Кобба–Дугласа, и другие известные производственные функции описывают зависимость народнохозяйственной производительности труда от капиталовооруженности лишь приближенно. Поэтому особый интерес представляют собой постановки задач оптимизации, в которых уравнение, следующее из модели Солоу, выступает, как уравнение связи, для произвольного характера зависимости народнохозяйственной производительности труда от капиталовооруженности. Именно в таком виде уравнение связи, следующее из модели Солоу, является удобным инструментом для экономических исследований при работе со статистикой. Выработка и изучение таких постановок и являются целью настоящей статьи.

В условиях недостаточного финансирования широкомасштабных исследований моделей экономической динамики особенное значение приобретают точные аналитические методы, определяющие зависимости между основными экономическими показателями. В настоящей работе основой является вариационный метод. Этим методом ищется максимизация интегральной дисконтированной полезности среднедушевого потребления. Вариационная постановка изучаемой в настоящей статье задачи оптимизации очень удобна и вполне достаточна. Сначала ограничиваемся лишь гладкими возмущениями. Разнообразные ограничения не дают возможности полностью довериться использованию классических вариационных методов, поэтому привлекаются элементы различных методов оптимизации.

В работе найдены и исследованы постановки оптимизационных задач с ограничениями различного рода, которые следуют из естественных экономических свойств для модели роста. Проинтегрировано уравнение Эйлера, которое получено на основании вариационного метода. Исследованы ограничения как сверху, так и снизу на среднедушевое потребление, а также фазовое ограничение снизу на капиталовооруженность. Рассмотрены постановки задач Понтрягина и Дубовицкого–Милютина.

Предложенная методика дает богатые возможности разнообразных постановок задач оптимального управления для уравнения модели роста: задачи Понтрягина и задачи Дубовицкого–Милютина. Роль управления во всех рассмотренных в настоящей работе оптимизационных задачах играет среднедушевое потребление. Благодаря проинтегрированному уравнению Эйлера ожидаются богатые возможности получения экономических результатов.

2. Постановки задач оптимального управления

В своих работах, ставших классическими, Роберт Солоу, во-первых, основывался на производственной функции Кобба–Дугласа [1, 2], а во-вторых, не написал в явном виде дифференциального уравнения, описывающего поведение капиталовооруженности, для производственной функции более общего характера, которое появилось позже у других авторов [3–5]. С моделью Солоу сравнивали и более поздние макроэкономические модели [6]. Кроме этого, эта модель, включающая дифференциальное уравнение, завоевывает популярность и в классической математике [7–9], причем как в научной, так и в учебной литературе, и в математическом моделировании [10]. Обыкновенное дифференциальное уравнение модели роста макроэкономической динамики Солоу с переменными коэффициентами, которые получены на основании производственной функции произвольного характера [3], имеет вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a)f(k). \tag{1}$$

Здесь t – время, которое считается непрерывным и измеряется в годах, а t_0 – его начальный момент; $k = k(t)$ — фондовооруженность или капиталовооруженность; $\lambda = \mu + \nu$, где $\mu \in (0,1)$ – доля выбывших за год основных производственных фондов, а $\nu \in (-1,1)$ – годовой темп прироста числа занятых; $a \in (0,1)$ – коэффициент прямых затрат (доля промежуточного продукта в валовом общественном продукте); $\rho \in (0,1)$ – норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте); $x = f(k)$ – народнохозяйственная производительность труда; а $c = c(t)$ – среднедушевое потребление [3, с. 39–41].

Сразу заметим, что уравнение, следующее из модели Солоу, основанное на производственной функции Кобба–Дугласа, является уравнением Бернулли и поэтому интегрируется в квадратурах [7—9]. Мы в настоящей работе для общности постановки задач оптимизации отвлекаемся от производственной функции Кобба–Дугласа и, поскольку уравнение (1) выведено в более общих предположениях, отмечаем, что уравнение (1) в квадратурах не интегрируется [11].

На основании статистических исследований [12, 13] можно сделать вывод, что зависимость народнохозяйственной производительности труда $x = f(k)$ от фондовооруженности $k = k(t)$ описывается производственной функцией Кобба–Дугласа или какой-нибудь еще производственной функцией [14] лишь приближенно. Поэтому мы сосредоточились на исследованиях экономических и экономико-статистических моделей экономической динамики, в которых присутствует зависимость народнохозяйственной производительности труда от капиталовооруженности произвольного характера. Исследования эти, на наш взгляд, важны, потому что именно оптимизация капиталовооруженности является основным фактором инвестиционной привлекательности.

Для уравнения (1) естественно поставить задачу Коши, задав начальное условие:

$$k(t_0) = k_0 \geqslant 0. \tag{2}$$

Для постановок задач оптимального управления нам понадобится конечное условие

$$k(t_1) = k_1 \geqslant 0, \tag{3}$$

а также выражение для среднедушевого потребления [3, с. 41]

$$c = c(t) = (1-\rho)(1-a)x = (1-\rho)(1-a)f(k). \tag{4}$$

Теперь мы можем поставить задачу оптимизации: найти не только капиталовооруженность, но и такое среднедушевое потребление, которое максимизирует интегральную дисконтированную полезность среднедушевого потребления:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} u\left(c\left(t\right)\right) \exp(-\delta t) dt \Rightarrow \max, \tag{5}$$

где u – функция полезности, на свойствах которой мы остановимся в следующем пункте, а δ – коэффициент дисконтирования будущей полезности [3, с. 51], [15–17]. При этом на среднедушевое потребление естественно накладываются либо ограничение

$$0 < \underline{c} \leqslant c(t) < +\infty, \tag{6}$$

либо

$$0 < \underline{c} \leqslant c(t) \leqslant \overline{c} < +\infty. \tag{7}$$

В (6) и (7) $\underline{c}$ – среднедушевой прожиточный минимум, а $\overline{c}$ – среднедушевой прожиточный максимум. Еще одно экономически естественное фазовое ограничение на капиталовооруженность:

$$k(t) \geqslant \mathrm{const} \geqslant 0. \tag{8}$$

Остановимся на терминологии. Задачу (1), (2), (3), (5) назовем простой вариационной задачей; задачу (1), (2), (3), (5), (6) – задачей Понтрягина, так же как и задачу (1), (2), (3), (5), (7); задачу (1), (2), (3), (5), (8) назовем вариационной задачей с фазовым ограничением; задачу (1), (2), (3), (5), (6), (8) – задачей Дубовицкого–Милютина, так же как и задачу (1), (2), (3), (5), (7), (8).

Во всех сформулированных задачах присутствуют уравнение (1) и граничные условия (2), (3), иногда для удобства первое из них мы называем начальным, а второе — конечным. На первый взгляд, это может показаться странным, поскольку (1) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и решение его полностью определяется постановкой задачи Коши, т.е. начальным или граничным условиями, что в данном случае одно и то же, (2). Однако это рассуждение справедливо, если коэффициенты правой части уравнения (1) известны. В нашем же случае, т.е. в любом из случаев поставленных нами задач оптимального управления, коэффициенты правой части уравнения (1) неизвестны и определяются в ходе рассматриваемой оптимизационной постановки. Граничное условие (3), так же как и начальное условие (2), необходимо для решения уравнения Эйлера, которое появится в дальнейшем изложении из каждой из разбираемых нами постановок задач оптимального управления, поскольку это дифференциальное уравнение будет иметь второй порядок.

3. Полезность среднедушевого потребления

Во всех сформулированных задачах присутствует условие (5). Аналогично [18—20], предполагаем, что полезность среднедушевого потребления характеризует постоянное отвращение к риску по Эрроу–Пратту:

$$\alpha = -\frac{u''(c)c}{u'(c)} \geqslant 0. \tag{9}$$

Экономический смысл (9) становится ясным после введения простого обозначения

$$g(c) = u'(c), \tag{10}$$

где $g(c)$ будет являться предельной полезностью среднедушевого потребления [21]. Для $E_c(g)$ – эластичности изменения переменной g по переменной c с учетом (9) и (10) можно записать:

$$g'(c) = u''(c),\ E_c(g) = \frac{g'(c)}{g(c)/c} = \frac{u''(c)c}{u'(c)} = -\alpha. \tag{11}$$

Далее, мы предполагаем, что $g(c)$ – функция монотонно невозрастающая, и поэтому $\alpha \geqslant 0$. Противоположное предположение возрастания $g(c)$, очевидно, связано с риском. Поэтому случай, когда $g(c)$ не возрастает, естественно назвать отвращением к риску.

Равенство (11) интегрируется аналогично [18], в результате чего получаем

$$g(c) = \gamma c^{-\alpha},\ \ \gamma = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Проинтегрировав (12) по переменной c, легко получаем выражение для функции полезности среднедушевого потребления [21]:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{\gamma c^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \chi,\ \alpha \neq 1; \\ \gamma \ln c + \chi,\ \alpha = 1; \end{cases} \quad \gamma = \mathrm{const} > 0,\ \ \chi = \mathrm{const}, \tag{13}$$

которое обобщает аналогичные формулы в [18—20].

4. Простейшая вариационная оптимизационная задача

Для удобства из (4) получим выражение

$$(1-a)f(k) = \frac{c}{1-\rho}, \ \ \rho \neq 1. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (1), будем иметь

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \frac{c\rho}{1-\rho}, \ \ \rho \neq 1. \tag{15}$$

Отметим, что (15) можно рассматривать как уравнение Солоу (1), записанное в другой форме, в правой части которого имеется среднедушевое потребление.

Выражая из (15) среднедушевое потребление, получим

$$c = c(t) = \frac{1-\rho}{\rho}\left[\frac{dk}{dt} + \lambda k\right], \ \ \rho \neq 0, \ \ \rho \neq 1. \tag{16}$$

Простейшая вариационная оптимизационная задача ставится как максимизация интегральной дисконтированной полезности среднедушевого потребления (5) при выполнении уравнения связи (1) или, что то же самое (15), при справедливости граничных условий (2) и (3).

Опишем алгоритм решения этой простейшей вариационной оптимизационной задачи. Необходимым условием экстремума в сформулированной нами в настоящей работе простейшей вариационной задачи является справедливость уравнения Эйлера [21]:

$$u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t} - \frac{d}{dt}[u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}] = 0, \ \ \rho \neq 0, \ \ \rho \neq 1. \tag{17}$$

Принимая во внимание (9), мы получаем другую форму записи уравнения Эйлера, чем (17), через функцию предельной полезности среднедушевого потребления:

$$g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t} - \frac{d}{dt}[g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}] = 0, \ \ \rho \neq 0, \ \ \rho \neq 1. \tag{18}$$

Подставляя (16) в (17) или в (18), мы можем заключить, что полученное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной капиталовооруженности $k = k(t)$ будет иметь второй порядок. Поэтому для однозначного отыскания капиталовооруженности нужны оба граничных условия, как начальное (2), так и конечное (3). После того как будет найдена искомая капиталовооруженность $k(t)$, мы из (16) находим и среднедушевое потребление $c(t)$.

5. Проверка решения простейшей вариационной задачи

Итак, пользуясь лишь необходимым условием, мы нашли $k(t)$ и $c(t)$ и обязаны проверить, является ли найденная пара функций решением простейшей вариационной задачи оптимизации.

Уравнение (1) справедливо, потому что, зная $k(t)$, мы находим $c(t)$ из равенства (16), которое было получено из уравнения (15). А уравнение (15) эквивалентно уравнению (1).

Граничные условия (2) и (3) справедливы, потому что они являются составной частью краевой задачи для дифференциального уравнения Эйлера (18) при (11) и (16), являющегося необходимым условием простейшей вариационной задачи оптимизации.

Для того чтобы доказать выполнение условия (5) для интегральной дисконтированной полезности среднедушевого потребления, мы вводим обозначение

$$J(k) = \int_{t_0}^{t_1} u\,(c\,(t))exp\,(-\delta t)\,dt.$$

Пусть $h = h(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[t_0, t_1]$ такая, что $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Аналогично [21] рассматриваем разность $J(k+h) - J(k)$ и получим

$$J(k+h) - J(k) = \int_{t_0}^{t_1} h\{u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t} - \frac{d}{dt}[u'(c(t)\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}]\}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h' + \lambda h\right)\right]^2 e^{-\delta t}dt + \int_{t_0}^{t_1} R(t)e^{-\delta t}dt. \quad (19)$$

На основании (17) или (9) и (18) правая часть (19) упрощается:

$$J(k+h) - J(k) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h' + \lambda h\right)\right]^2 e^{-\delta t}dt + \int_{t_0}^{t_1} R(t)e^{-\delta t}dt. \quad (20)$$

Исходя из правой части (20), важно определить, каким слагаемым правой части определяется знак. Для того чтобы установить, что знак (20) определяется первым слагаемым правой части, нужно сначала заменить $h = h(t)$ на $\beta h = \beta h(t)$, где β – постоянная. При этом $h' = h'(t)$ заменяется на $\beta h' = \beta h'(t)$. Сделав вышеуказанную замену в (20) и исследуя остаточный член, имеем

$$J(k+\beta h) - J(k) = \frac{\beta^2}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h' + \lambda h\right)\right]^2 e^{-\delta t}dt + o\left(\beta^2\right) \text{ при } \beta \to 0. \quad (21)$$

На основании (21) мы можем утверждать, что знак исследуемой разности совпадает со знаком первого слагаемого правой части (21).

Для того чтобы установить, что согласно (5) реализуется именно максимум, нужно, чтобы разность (21) была не положительна. Для этого достаточно, чтобы подынтегральная функция первого слагаемого правой части (21) была бы не положительна. Это будет выполнено, если $u''(c(t)) \leqslant 0$. Последнее следует из (8). Таким образом, мы установили справедливость уравнения для капиталовооруженности (1), граничных условий (2), (3) и условия максимизации вариационного функционала, выражающего интегральную дисконтированную полезность среднедушевого потребления (5), т.е. всех условий простейшей вариационной задачи.

6. Интегрирование уравнения Эйлера

На основании описания алгоритма простейшей вариационной задачи становится ясно, что граничные условия (2) и (3) относятся не к уравнению (1), а к уравнению Эйлера (17), которое может быть записано и в эквивалентной форме (18). На первый взгляд, неизвестной функцией в уравнении Эйлера (17) является среднедушевое потребление $c = c(t)$, но в силу (16) неизвестной функцией в (17) будет уже фондовооруженность. Причем относительно среднедушевого потребления $c = c(t)$ уравнение (17) является уравнением первого порядка, а относительно фондовооруженности $k = k(t)$ – второго.

Именно из-за того, что уравнение Эйлера (17), рассматриваемое относительно капиталовооруженности $k = k(t)$ как неизвестной функции, имеет второй порядок, необходимы два граничных условия (2) и (3).

Введением обозначения

$$w = g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}, \quad (22)$$

уравнение Эйлера (18) упрощается:

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w. \quad (23)$$

Предполагая в (23) $w \neq 0$, разделив на w обе части (23) и интегрируя полученное, имеем

$$\ln|w| = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s)ds + \text{const},$$

или, что то же самое,

$$w = C_0 \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}, \quad C_0 = \text{const}. \tag{24}$$

Принимая во внимание (22), из (24) получим

$$g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t} = C_0 \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}.$$

Выражая из последнего равенства предельную полезность среднедушевого потребления, будем иметь

$$g(c(t)) = C_0\frac{\rho}{1-\rho}\exp\left\{\delta t + \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}. \tag{25}$$

Взяв обратную функцию от предельной полезности среднедушевого потребления, определим из (25) само среднедушевое потребление:

$$c(t) = g^{-1}\left(C_0\frac{\rho}{1-\rho}\exp\left\{\delta t + \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}\right). \tag{26}$$

Эквивалентное выражение для среднедушевого потребления может быть получено и при помощи преобразования уравнения (12):

$$c(t) = \frac{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}{g(c(t))^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{27}$$

если в него подставить (25).

Если теперь (26) или (27) при (25) подставить в (16), мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка, где неизвестной функцией будет уже капиталовооруженность.

7. Возможности переключений описываемого процесса

При рассмотрении любой рассматриваемой в настоящей работе оптимизационной экономической задачи предлагается использовать следующий естественный подход: как начальное приближение рассмотреть простейшую вариационную задачу, а найдя ее решение, проверить, удовлетворяет ли оно дополнительным условиям (6), (7) и (8). Это всегда возможно сделать, т.к. эти условия являются неравенствами. Если так случится, что найденное решение простейшей вариационной задачи этим дополнительным условиям удовлетворяет, то рассматриваемая задача решена.

Однако может случиться, что полученное решение простейшей вариационной задачи может выйти за рамки какого-нибудь из неравенств (6), (7), (8). Поскольку мы естественно предполагаем, что условие (2) задано так, что в некоторой малой правой окрестности начального момента времени нужные условия удовлетворяются, то целесообразно несколько сузить рассматриваемый момент времени, т.е. уменьшить t_1. Далее, в зависимости от характера поставленной задачи, можно попытаться уже при новом граничном условии, роль которого будет играть уменьшенное t_1, изменить начальные условия так, чтобы решение поставленной задачи на некотором более значительном временном промежутке удовлетворяло нужному из неравенств. Те значения времени, в которых мы изменяем начальные условия, и назовем моментами переключения рассматриваемого оптимизационного экономического процесса.

8. Заключение

Остановимся на новизне представленных результатов. Как известно, равновесный экономический рост совместим с различными нормами сбережения, но оптимальной будет только та, которая обеспечивает экономический рост с максимальным уровнем потребления. Оптимальную норму накопления позволяет определить золотое правило Солоу: оптимальная норма накопления в стационарном режиме равна коэффициенту эластичности по фондам. Но это справедливо для производственной функции Кобба–Дугласа. Для других производственных функций это правило, вполне возможно, будет другим. Базовая модель Солоу показывает, что само по себе накопление капитала не может объяснить непрерывный экономический рост. Для такого объяснения нужно расширить модель и включать в нее два других источника экономического роста – рост населения и технологический процесс, под которым понимается очень широкий круг явлений. В [17] формулируется проблема оптимального распределения производственного продукта на накопление и потребление на заданном отрезке времени. Качество распределения характеризуется суммарной дисконтированной полезностью потребительского продукта, накопленного на соответствующей траектории роста. При этом считаем, что полезность измеряется количеством потребительского продукта на единицу рабочей силы в единицу времени. Это очень важный аргумент в пользу того, чтобы в макроэкономике целесообразно не просто максимизировать потребление, а осуществлять максимизацию интегральной дисконтированной его полезности (5), чему и посвящена настоящая статья.

Остановимся на общем экономическом анализе содержания работы. Математический аппарат макроэкономической модели Солоу оказался настолько привлекательным, что элементы этой модели с разной степенью полноты активно применяются и в микроэкономике. И это несмотря на разницу экономических целей государства и предприятия. На уровне государства ставится задача добиться максимального уровня потребления, а для предприятия – максимизация прибыли. В связи с этим обстоятельством достаточно полная модель Солоу может быть применима только для предприятия в форме рабочей акционерной собственности, т.к. в данном случае целью будет максимизация потребления, как и в случае с государством в классической модели Солоу. Или же таким предприятием, целью которого является максимизация потребления, может быть предприятие государственной формы собственности, где государственная собственность отождествляется с народной. Иное дело экономика домашних хозяйств [15, 16, 18–20], где максимизация интегральной дисконтированной полезности потребления используется достаточно активно.

Опишем круг прикладных проблем, в которых возникают такие задачи. Элементы математического аппарата модели Солоу весьма удобны для применения в экономике домашних хозяйств, которая в основном относится к микроэкономике. Однако настоящая статья – это попытка замены максимизации среднедушевого потребления максимизацией интегральной дисконтированной полезности среднедушевого потребления. Заметим, что это взаимопроникновение математических вопросов должно быть весьма полезным, хотя бы потому, что домашнее хозяйство очень устойчиво к разнообразным экономическим возмущениям. Однако использование интегральной дисконтированной полезности потребления в качестве критерия максимизации технически более трудоемко, чем простая максимизация.

В настоящей работе наиболее подробно рассмотрена простейшая вариационная постановка оптимизационной задачи с уравнением связи, следующим из модели Солоу. Однако в результате проведенных исследований получены возможности и более сложных постановок задач оптимального управления, а именно: задачи Понтрягина и задачи Дубовицкого–Милютина.

Роль управления во всех рассмотренных в настоящей работе оптимизационных задачах играет среднедушевое потребление. Благодаря проинтегрированному уравнению Эйлера ожидаются широкие возможности получения экономических результатов в различных моделях экономического роста.

Литература

1. *Solow R.M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Journal of Economics. 1956. V. 70, N 1. P. 65–94.
2. *Solow R.M.* A Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. 1957. V. 39, N 3. P. 312–320.
3. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. Москва : ЮНИТИ, 1998.
4. *Курзенев В., Матвеенко В.* Экономический рост. Санкт-Петербург : Питер, 2018.
5. *Ромер Д.* Высшая макроэкономика. Москва : Издательский дом ВШЭ, 2014.
6. *Красносельская Д.Х.* Сравнительный анализ моделей экономического роста Р. Солоу и Мэнкью–Ромера–Уэйла (на примере Республики Башкартостан) // Креативная экономика. 2013. Т. 7, № 9. С. 14–23.
7. *Самаров К.Л.* Экономико-математические модели. Москва : Резольвента, 2009.
8. *Самаров К.Л., Самарова С.С.* Модель экономического роста Роберта Солоу в курсе дифференциальных уравнений // Информационно-технологический вестник. 2014. № 2(02). С. 81–84.
9. *Самаров К.Л., Самарова С.С.* Классические экономические модели в курсе математики: сб. трудов международной научно-практической конференции // Перспективы, организационные формы и эффективность развития сотрудничества российских и зарубежных вузов. 2014. С. 479–490.
10. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. Москва : Наука, 1997.
11. *Меерсон А.Ю., Черняев А.П.* Интегральный метод исследования переходного режима в Модели Солоу // Экономика природопользования. 2010. № 3. С. 105–109.
12. *Ковалева Т.Ю.* Статистическое изучение взаимосвязи динамики производительности труда и фондовооруженности в структурах РФ // Приволжский научный вестник. 2015. № 7(47). С. 85–91.
13. *Давыдова Г.В.* Источники экономического роста // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2017. Т. 17, № 4. С. 52–64.
14. *Ашманов С.А.* Математические методы и модели в экономике. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1980.
15. *Гуриев С.М., Поспелов И.Г.* Модель общего равновесия экономики переходного периода // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 2. С. 3–21.
16. *Гуриев С.М.* Модель формирования сбережений и спроса на деньги: I // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 7. С. 15–40.
17. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. Москва : Энергоатомиздат, 1996.
18. *Дикусар В.В., Меерсон А.Ю., Черняев А.П.* Задачи оптимального распределения ресурсов на примере домашних хозяйств. Москва : ВЦ РАН, 2004.
19. *Дикусар В.В., Меерсон А.Ю., Черняев А.П.* Модели потребления и вопросы оптимального управления // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. Москва : ВЦ РАН, 2005. С. 46–61.

20. *Дикусар В.В., Меерсон А.Ю., Черняев А.П.* Задачи оптимального управления потреблением в домашних хозяйствах // Динамика неоднородных систем. Москва : ИСА РАН, 2005. С. 212–229.

21. *Меерсон А.Ю., Черняев А.П.* Вариационная задача оптимизации среднедушевого потребления модели Солоу для уравнения с переменными коэффициентами, описывающего фондовооруженность // Менеджмент и Бизнес–Администрирование. 2015. № 3. С. 127–131.

References

1. *Solow R.M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth. The Quarterly Journal of Economics. 1956. V. 70, N 1. P. 65–94.

2. *Solow R.M.* A Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. 1957. V. 39, N 3. P. 312–320.

3. *Kolemaev V.A.* Mathematical economics. Moscow : UNITY, 1998. (in Russian).

4. *Kurzenev V., Matveenko V.* Economic growth. Saint-Petersburg : Piter, 2018. (in Russian).

5. *Romer D.* Advanced Macroeconomics. Moscow : HSE Publishing House, 2014.

6. *Krasnoselskaya D.H.* The comparative analysis of R. Solow and Mankiw-Romer-Weil models for economic growth (the Republic of Bashkortostan). Creative economy. 2013. V. 7, N 9. P. 14–23. (in Russian).

7. *Samarov K.L.* Economic and mathematical models. Moscow : Resolventa, 2009. (in Russian).

8. *Samarov K.L., Samarova S.S.* Robert Solow's model of economic growth in the course of differential equations. Informacionno-technologicheskij vestnik. 2014. N 2(02). P. 81–84. (in Russian).

9. *Samarov K.L., Samarova S.S.* Classical economic models in the course of mathematics: Proceedings of the international scientific and practical conference. Prospects, organizational forms and efficiency of cooperation between Russian and foreign Universities. 2014. P. 479–490. (in Russian).

10. *Samarskiy A.A., Mikhaylov A.P.* Mathematical modeling. Moscow : Nauka, 1997. (in Russian).

11. *Meerson A.Yu., Chernyaev A.P.* The Integral Method of the Investigation for the Transitional Regime in Solou's Model. Ekonomika prirodopolzovaniya. 2010. N 3. P. 105–109. (in Russian).

12. *Kovaleva T.Yu.* Statistical Study of the Relationship Between the Dynamics of Labor Productivity and Capital Intensity in the Structures of the Russian Federation. Privolzhskiy nauchnyy vestnik. 2015. N 7(47). P. 85–91. (in Russian).

13. *Davydova G.V.* Sources of Economic Growth. Izvestiya vuzov. Investment. Building. Realty. 2017. V. 17, N 4. P. 52–64. (in Russian).

14. *Ashmanov S.A.* Mathematical Methods and Models in Economics. Moscow : Moscow university press, 1980. (in Russian).

15. *Guriev S.M., Pospelov I.G.* General Equilibrium Model of Transition Economy. Matematicheskoye modelirovaniye. 1994. V. 6, N 2. P. 3–21. (in Russian).

16. *Guriev S.M.* Model of Formation of Savings and Demand for Money: I. Matematicheskoye modelirovaniye. 1994. V. 6, N 7. P. 15–40. (in Russian).

17. *Petrov A.A., Pospelov I.G., Shananin A.A.* Experience of Mathematical Modeling of Economy. Moscow : Energoatomizdat, 1996. (in Russian).

18. *Dikusar V.V., Meerson A.Yu., Chernyaev A.P.* Problems of Optimal Allocation of Resources on the Example of Households. Moscow : CC RAS, 2004. (in Russian).

19. *Dikusar V.V., Meerson A.Yu., Chernyaev A.P.* Consumption Patterns and Optimal Management Issues. Theoretical and Applied Problems of Nonlinear Analysis. Moscow : CC RAS, 2005. P. 46–61. (in Russian).

20. *Dikusar V.V., Meerson A.Yu., Chernyaev A.P.* The Problem of Optimal Control of Consumption in Households. Dynamics of Heterogeneous Systems. Moscow : ISA RAS, 2005. P. 212–229. (in Russian).

21. *Meerson A.Yu., Chernyaev A.P.* Variational Optimization Problem of the Per Capita Consumption Solow Model for Equations with Variable Coefficients Describing the Capital-labor Ratio. Management and Business Administration. 2015. N 3. P. 127–131. (in Russian).

Поступила в редакцию 03.09.2018