УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной и методической работе
Д.А. Зубцов
15 декабря 2014 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Линейная алгебра**
по направлению	03.03.01 «Прикладные математика и физика»
факультеты:	**для всех факультетов (кроме ФИВТ)**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	I
Трудоёмкость:	базовые — 4 зач. ед.
семестр:	2
лекции:	34 часа
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ —	68

Экзамен — 2 семестр

Самостоятельная работа — 46 часов

Программу составили:

Д.В. Беклемишев, д.п.н., профессор
П.А. Кожевников, к.ф.-м.н., доцент
О.К. Подлипский, к.ф.-м.н., доцент
И.А. Чубаров, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 9 октября 2014 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса. Теорема Фредгольма.

Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.

Подпространства и линейные оболочки в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств. Вывод формулы размерности суммы подпространств.

Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Координатная форма необходимого и достаточного условия линейной зависимости элементов.

Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода. Координатная форма задания подпространств.

Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и множество образов. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений.

Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Приведение матрицы линейного преобразования к треугольному виду.[1]

Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Вторичное сопряженное пространство.[2]

Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Приведение квадратичной формы к диагональному виду элементарными преобразованиями.[3]

Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

Конечномерное евклидово пространство. Ортогонализация базиса. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства.

Линейные преобразования евклидова пространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряжённого преобразования.

Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования.

Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы.

Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования.[4] Сингулярное разложение. [4]

Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Применение к ортогональной классификации поверхностей второго порядка. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.

---

[1] Поток Беклемишева Д.В.

[2] Потоки Беклемишева Д.В. и Чубарова И.А.

[3] Поток Беклемишева Д.В.

[4] Потоки Беклемишева Д.В. и Чубарова И.А.

Поток Беклемишева Д.В.: Унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы матрицы. Унитарные и эрмитовы преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований. Свойства эрмитовых форм.

Литература

1. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 10-е изд. – М.: Наука, 2003.
2. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. – М.: Физматлит, 2004.
3. *Умнов А.Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. – М.: МФТИ, 2006, http://www.umnov.ru.
4. *Чехлов В.И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: МФТИ, 2000.

З А Д А Н И Я

Все номера задач указаны по книге:
Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2003, 2006. (Б)

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 23–28 марта)

I. Матрицы

1. Обратная матрица

<u>15.56</u>; 15.59; 15.65(1,5*); 15.54(12).

2. Ранг матрицы

<u>16.19(4)</u>; 16.22; 16.25(1); 16.26(1); 16.34; 16.40*; 16.28*.

II. Системы линейных уравнений

<u>17.1(4)</u>; 18.1(9); 18.17(2); 19.6(21,30); 19.7(3); 19.14; 19.15*; 19.19(2)*; <u>19.23(1)</u>*.

III. Линейные пространства

1. Подпространство, линейная оболочка, базис

20.3(<u>3</u>,4);

20.4(2,<u>3</u>); 20.8(<u>1</u>,4); 20.14(6); <u>20.18</u>; 20.20; <u>20.22(3)</u>; 20.23(4); 20.29.

2. Сумма и пересечение, прямая сумма

21.6(4); 21.7(5,<u>7</u>); 21.13*.

1* Пусть $\operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$ — пространство квадратных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{R}$, а U, V, W — его подпространства, состоящие из кососимметрических, симметрических и верхних треугольных матриц. Доказать, что V и W — различные прямые дополнения к U в $\operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$ и найти проекции матричных единиц E_{ij}, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, на U параллельно V и на U параллельно W.

2* Пусть U, V, W — подпространства некоторого конечномерного векторного пространства.

а) Верна ли формула

$$\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U \cap V) - \\ - \dim(V \cap W) - \dim(W \cap U) + \dim(U \cap V \cap W)?$$

б) Предположим, что выполнены условия

$$U \cap V = V \cap W = W \cap U = \{0\}. \qquad \text{(i)}$$

Верно ли тогда, что сумма $U+V+W$ подпространств U, V, W прямая? Если нет, то как нужно изменить условия (i), чтобы это было верно?

IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения, ядро, образ

23.8(<u>1</u>,3); 23.9(<u>3</u>); 23.10(2); 24.82.

3* Найти матрицу линейного преобразования $\varphi_{\mathbf{v}}$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$, заданного формулой $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}, \mathbf{x}]$, где $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение, а $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ — фиксированный вектор.

4* Рассмотрим множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1, i\}$. Проверьте, что для каждого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ отображение $\varphi_z(w) = z \cdot w$, $w \in \mathbb{C}$, определяет линейное преобразование $\mathbb{C}$ и найдите его матрицу в базисе $\{1, i\}$. Покажите, что сопоставление $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ определяет биекцию между $\mathbb{C}$ и подмножеством матриц указанного вида в $\operatorname{Mat}_2 \mathbb{R}$, сохраняющую все операции (сложение, умножение, взятие обратного). Какие матрицы при этой биекции соответствуют числам $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$?

23.14(1,3); 23.18; 23.24(2,3); 23.28(3); 23.30(1); 23.40(1, б, в).

5* Пусть φ — линейное преобразование пространства V. Доказать, что $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi \iff \ker(\varphi^2) = \ker\varphi$.

23.62(3); 23.73*; 23.74(3)*.

2. Линейные функции

31.21*; 31.22*; 31.37*; 31.44*; 31.45*; 31.50*.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

Неделя	Задачи
1	15.56; 15.59; 15.65(1,5*); 15.54(12). 16.19(4); 16.22; 16.25(1); 16.26(1); 16.34; 16.40*; 16.28*.
2	17.1(4); 18.1(9); 18.17(2); 19.6(21,30); 19.7(3); 19.14; 19.15*; 19.19(2)*; 19.23(1)*.
3	20.3(3,4); 20.4(2,3); 20.8(1,4); 20.14(6); 20.18; 20.20; 20.22(3); 20.23(4); 20.29.
4	21.6(4); 21.7(5,7); 21.13*; **Т.1***; **Т.2***;
5	23.8(1,3); 23.9(3); 23.10(2); 24.82; **Т.3**; **Т.4***.
6	23.14(1,3); 23.18; 23.24(2,3); 23.28(3); 23.30(1); 23.40(1, б, в); 23.62(3). **Т.5***; 23.73*; 23.74(3)*; 31.21*; 31.22*; 31.37*; 31.44*; 31.45*; 31.50*.

47+19*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 11–16 мая)

I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения, диагонализируемость

24.13; 24.14(1,2*); 24.18; 24.20(3); 24.37(3).

6* Пусть P — матрица оператора проектирования (см. задачи 24.18(1) и 24.82) в некотором базисе. Докажите, что ранг матрицы P равен ее следу.

7* Пусть A — матрица (в некотором базисе) вращения трехмерного пространства вокруг некоторой оси на угол α. Выразить α через элементы матрицы A.

24.30(20,<u>28</u>); 24.42(1,<u>3</u>); 24.49*; 24.53; 24.26(4)*.

8* Последовательность Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... определяется тем, что каждый следующий член последовательности равен сумме двух предыдущих, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, и двумя начальными членами $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Найти явную форму для a_n. <u>*Указание.*</u> Заметим, что вектор $\xi_n := (a_n, a_{n-1})^{\mathrm{T}}$ линейно выражается через ξ_{n-1}: $\xi_n = A\xi_{n-1}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем $\xi_1 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$. Поэтому a_n есть первая компонента $A^{n-1}\xi_1$.

2. Инвариантные подпространства

24.69; <u>24.70</u>; <u>24.72(1)</u>; 24.74*; 24.100*.

II. Билинейные и квадратичные функции

<u>32.2(4)</u>; 32.3(2); 32.7(2); 32.8(3,6,<u>8</u>); 32.9(6,<u>8</u>); <u>32.16</u>; 32.21*.

III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация

<u>25.7</u>; 25.25(2); <u>25.23</u>; 25.10*; <u>26.13(3)</u>; 26.14(3); <u>26.16(2)</u>; <u>26.27(2)</u>; 26.28(2); 26.42(3); <u>26.44(1)</u>.

9. Может ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ быть матрицей Грама некоторого базиса евклидова пространства?

10* Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее матрица A представляется в виде $A = C^{\mathrm{T}}C$ для некоторой невырожденной верхней треугольной матрицы C.

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования

28.34(1); 29.15*; 29.13.

11. <u>а)</u> Выяснить, может ли матрица A являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором (не обязательно ортонормированном) базисе, если

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

б)* В случае положительного ответа предъявить (хотя бы одно) скалярное произведение, относительно которого оператор самосопряжен.

29.19(4,<u>8</u>); 29.47(<u>1</u>,2); 29.49.

12* Доказать, что в трехмерном евклидовом пространстве любое ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию, является вращением относительно некоторой оси (теорема Эйлера).

29.32(1,2)*; 29.33(1)*; 29.53(1)*.

13* На линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1{,}1]$, со скалярным произведением из задачи 25.7, преобразование φ задано формулой $\varphi(f)(y) = \int\limits_{-1}^{1} K(x{,}y)f(x)\,dx$, где $K\colon [-1{,}1]\times[-1{,}1]\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на K преобразование φ является сомосопряженным?

14* Показать, что оператор двукратного дифференцирования $\mathbf{A} = \frac{d^2}{dx^2}$ является самосопряженным оператором в пространстве V тригонометрических многочленов

$$V = \{a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx\}$$

с евклидовым скалярным произведением

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Показать, что функции $1/2$, $\cos x$, $\sin x$, …, $\cos nx$, $\sin nx$ образуют ортонормированный базис для оператора $\mathbf{A}$, найти соответствующие собственные значения.

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

32.27(3,<u>9</u>); 32.31*; 32.32*; 32.33(1)*; 32.36(3,<u>5</u>); 32.39(1).

IV* Тензоры

35.14; 35.15; 35.25.

15. Пусть $[\cdot,\cdot]\colon\ \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ — векторное произведение в ориентированном трехмерном пространстве $\{e_1,e_2,e_3\}$ — произвольный базис в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что набор коэффициентов a_{ij}^k, определенных равенствами $[e_i,e_j] = a_{ij}^k e_k$, образует тензор.

16. Пусть $u{,}v\in V$ — векторы, а $\xi{,}\eta\in V^*$ — ковекторы. Пусть полилинейная функция T определена равенством

$$T(u{,}v{,}\xi{,}\eta) = \det\begin{pmatrix}\xi(u) & \eta(u)\\ \xi(v) & \eta(v)\end{pmatrix}.$$

а) Найти разложение тензора T по базису $\{e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l\}$ в пространстве тензоров $T^2_2(V)$.

б) Пусть $\dim V = n$. Найти полную свертку тензора T.

17. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Определить канонический изоморфизм $V^* \otimes V \to \mathrm{End}(V)$, где $\mathrm{End}(V)$ — пространство линейных операторов на V. Чему соответствует функционал следа при этом изоморфизме?

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

Неделя	**Задачи**
1	24.13; 24.14(1,2*); 24.18; 24.20(3); 24.37(3); **Т.6***; **Т.7***.
2	24.30(20,28); 24.42(1,3); 24.49*; 24.53; 24.26(4)*; **Т.8***; 24.69; 24.70; 24.72(1); 24.74*; 24.100*.
3	32.2(4); 32.3(2); 32.7(2); 32.8(3,6,8); 32.9(6,8); 32.16; 32.21*.
4	25.7; 25.25(2); 25.23; 25.10*; 26.13(3); 26.14(3); 26.16(2); 26.27(2); 26.28(2); 26.42(3); 26.44(1); **Т.9**; **Т.10***.
5	28.34(1); 29.15*; 29.13; **Т.11(а, б*)**; 29.19(4,8); 29.47(1,2); 29.49; **Т.12***; 29.32(1,2)*; 29.33(1)*; 29.53(1)*; **Т.13***; **Т.14***.
6	32.27(3,9); 32.31*; 32.32*; 32.33(1)*; 32.36(3,5); 32.39(1). 35.14*; 35.15*; 35.25*; **Т.15***; **Т.16***; **Т.17***.

46+29*

Задания составил А.В. Ершов, к.ф.-м.н., доцент

Усл.печ.л. 0,75 Тираж 1045 экз.